Thai Science and Technology Journal Vol. 34 No. 3 May-June 2026

ISSN 3027-6365 (Online)

Thai Science and Technology Journal

วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

Journal Homepage : http://li01.tci-thaijo.org/index.php/tstj

ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 3^y = z^2$ และ $17^x - 5^y = z^2$

The Solutions of the Diophantine Equations $17^x - 3^y = z^2$ and $17^x - 5^y = z^2$

ปุณชญา พัฒนางกูร*, เพชรลดา กุนามี, สิรินดา บุญเรือง, อภิสิทธิ์ โพธิ์สลิด

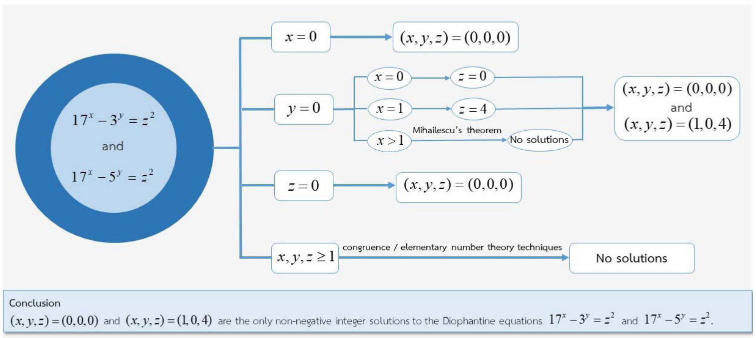
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12120

Poonchayar Patthanangkoor*, Phetrada Kunamee, Sirinda Boonrueang, Aphisit Phothisarit

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University, Pathum Thani 12120

Received 9 December 2025; Received in revised 11 March 2026; Accepted 9 April 2026

GRAPHICAL ABSTRACT



ABSTRACT

In this paper, we investigated the non-negative integer solutions to the Diophantine equations $17^x - 3^y = z^2$ and $17^x - 5^y = z^2$. The results showed that $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ and $(x, y, z) = (1, 0, 4)$ are the only non-negative integer solutions for both equations.

คำสำคัญ

สมการไดโอแฟนไทน์;
ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ;
สมภาค

บทคัดย่อ

บทความวิจัยฉบับนี้ได้ทำการหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 3^y = z^2$ และ $17^x - 5^y = z^2$ โดยพบว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, 0, 4)$ เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลยเท่านั้นของทั้งสองสมการ

Keywords

Diophantine equation;
Non-negative integer solution;
Congruence

***ผู้รับผิดชอบบทความ:** poonchayar@mathstat.sci.tu.ac.th

DOI:

1. บทนำ

การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เป็นหนึ่งในหัวข้อที่มีผู้วิจัยให้ความสนใจศึกษาเป็นจำนวนมาก ซึ่งสมการไดโอแฟนไทน์ในรูป $a^x - p^y = z^2$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวก p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบนั้นเป็นรูปแบบหนึ่งของสมการไดโอแฟนไทน์ที่มีผู้วิจัยสนใจศึกษา การศึกษาสมการรูปแบบนี้เป็นการขยายขอบเขตของข้อคาดการณ์ของคาตาลัน (Catalan's conjecture) ซึ่งต่อมาได้รับการพิสูจน์โดย Mihailescu ในปี ค.ศ. 2004 แม้ว่าทฤษฎีบทของ Mihailescu จะช่วยระบุผลเฉลยในกรณีพื้นฐานได้ แต่ความท้าทายในการหาผลเฉลยจะเพิ่มขึ้นเมื่อมีการเปลี่ยนค่าฐานของสมการไดโอแฟนไทน์ซึ่งมักนำไปสู่โครงสร้างผลเฉลยที่ซับซ้อนและแตกต่างกันออกไป

ในช่วงไม่กี่ปีที่ผ่านมา มีผู้วิจัยจำนวนมากได้ศึกษาผลเฉลยของสมการในลักษณะนี้ อาทิ ในปี ค.ศ. 2020 Burshtein [1] ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $13^x - 5^y = z^2$ และ $19^x - 5^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งพบว่าสมการ $13^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น คือ $(x, y, z) = (2, 2, 12)$ และสมการ $19^x - 5^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลย ต่อมาในปี ค.ศ. 2021 Thongnak et al. [2] ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x - 5^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งพบว่ามีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ในปีถัดไปคือปี ค.ศ. 2022 Tadee and Laomalaw [3] ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - n^y = z^2$ และ $2^x - p^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \neq 1$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ จากนั้นในปี ค.ศ. 2023 Thongnak et al. [4, 5] ได้พิสูจนว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เป็นเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $15^x - 13^y = z^2$ และ $55^x - 53^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และในปีเดียวกันนี้ Tadee [6] ก็ได้แสดงว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เป็นเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบโดยมีเงื่อนไขบางประการ และ Tadee [7] ยังศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - 5^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 11 \pmod{20}$ ซึ่งพบว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เป็นเพียงผลเฉลยเดียวของสมการนี้เท่านั้น นอกจากนี้ Tadee and Laomalaw [8] ก็ยังทำการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $(p+2)^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 5 \pmod{24}$ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบซึ่งพบว่ามีเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

ถัดมาในปี ค.ศ. 2024 Tadee [9] ก็ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $11^x - 3^y = z^2$ และ $14^x - 3^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบซึ่งพบว่าสมการ $11^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และสมการ $14^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยสองผลเฉลยคือ $(x, y, z) = (2, 3, 13)$ และ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ซึ่งในปีเดียวกันนี้ Tadee [10] ยังศึกษาผลเฉลยของไดโอแฟนไทน์ $(p-1)^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งพบว่า ถ้า $p = 2$ แล้วผลเฉลยคือ $(x, y, z) \in \{(t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ ถ้า $p \equiv 1 \pmod 4$ แล้ว $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เป็นเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น ถ้า $p = 3$ แล้วจะมีผลเฉลย 3 ผลเฉลยคือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ และ $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ และถ้า $p \neq 3$ และ $p \equiv 3 \pmod 4$ แล้วผลเฉลยคือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, 0, \sqrt{p-2})$ เมื่อ $\sqrt{p-2}$ เป็นจำนวนเต็ม นอกจากนี้ ในปี ค.ศ. 2024 ยังมีผลงานวิจัยของ Tadee and Wannaphan [11] ซึ่งได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $(p+a)^x - p^y = z^2$ และ $p^x - (p+a)^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ a เป็นจำนวนเต็มบวกและ p เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่งพบว่า ถ้า $a \equiv 2 \pmod 4$ และ $p \equiv 1 \pmod 4$ โดยที่ $a \equiv -1, 1 \pmod p$ แล้วสมการ $(p+a)^x - p^y = z^2$ มีเพียงผลเฉลยเดียว คือ

$(x,y,z)=(0,0,0)$ และถ้า a และ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $a\neq p,\ a\equiv 1 \pmod{4p}$ และ $p\equiv a+r^{s_2}a+r^{s_2}$ $(\bmod 2a)$ เมื่อ $s_2\in\{1,3,5,...,a-2\}$ และ r เป็นรากปฐมฐานมอดุโล a แล้วผลเฉลยของสมการ $(p+a)^x-p^y=z^2$ เมื่อ $x\neq 1$ มีเพียงผลเฉลยเดียวเช่นกัน คือ $(x,y,z)=(0,0,0)$ นอกจากนี้ยังพบอีกว่า ถ้า $a\equiv 2 \pmod 4$ และ $p\equiv 3 \pmod 4$ โดยที่ $p+a$ เป็นจำนวนเฉพาะ $\gcd(p,a+1)=1$ และ $\operatorname{ord}_p a=p-1$ แล้วสมการ $p^x-(p+a)^y=z^2$ มีเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x,y,z)=(0,0,0)$

อย่างไรก็ตาม การกำหนดเงื่อนไขที่เฉพาะเจาะจงเกินไป เช่น การระบุรูปแบบมอดุโลของฐานของสมการไดโอแฟนไทน์ มักส่งผลให้ผลเฉลยที่ได้ขาดความครอบคลุม บทความวิจัยฉบับนี้จึงมุ่งเน้นที่จะลดข้อจำกัดดังกล่าว โดยเลือกวิเคราะห์สมการที่มีฐานเป็น 17 เพื่อขยายขอบเขตความเข้าใจในโครงสร้างของผลเฉลยให้กว้างขวางยิ่งขึ้น เนื่องจากสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x-3^y=z^2$ และ $17^x-5^y=z^2$ เมื่อ x,y,z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบนั้น ยังไม่มีผู้ใดทำการศึกษามาก่อน จึงเป็นแรงจูงใจสำคัญให้ผู้วิจัยสนใจศึกษาหาผลเฉลยของสมการทั้งสองนี้ ความท้าทายหลักของงานวิจัยนี้อยู่ที่กระบวนการพิสูจน์ที่อาศัยเทคนิคการแยกตัวประกอบร่วมกับการวิเคราะห์อันดับมอดุโล โดยปราศจากการกำหนดเงื่อนไขบังคับตัวแปรเพิ่มเติม โดยเฉพาะในกรณีของสมการที่มีฐานเป็น 17 และ 5 ซึ่งมีความซับซ้อนในการพิสูจน์เนื่องจากต้องแสดงความเป็นจำนวนคู่ของเลขชี้กำลังก่อน จากนั้นจึงประยุกต์ใช้สมบัติของตัวหารร่วมมากเพื่อหาข้อขัดแย้งในการระบุผลเฉลยที่ถูกต้องทั้งหมด

2. ความรู้เบื้องต้น

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงบทนิยามและสมบัติต่าง ๆ ที่เป็นพื้นฐานในการศึกษางานวิจัยนี้

ทฤษฎีบท 2.1 (Patthanangkoor [12]) กำหนดให้ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนเต็มและ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า ถ้า $p\mid(a_1a_2\cdots a_n)$ แล้ว $p\mid a_k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k เมื่อ $1\leq k\leq n$

ทฤษฎีบท 2.2 (Patthanangkoor [12]) ถ้า a เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 แล้วสามารถเขียน a ในรูป

$$a=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$$

ได้เพียงอย่างเดียวเท่านั้น เมื่อ $p_1,p_2,\ldots,p_r$ เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันโดยที่ $p_1<p_2<\cdots<p_r$ และ k_i เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับทุก $i=1,2,3,\ldots,r$

ทฤษฎีบท 2.3 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 โดยที่ $\gcd(a,b)=1$ ถ้า $ab=c^2$ สำหรับบางจำนวนเต็ม c แล้ว $a=u^2$ และ $b=v^2$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก u และ v โดยที่ $\gcd(u,v)=1$

<u>บทพิสูจน์</u> กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $a,b>1$ และ $\gcd(a,b)=1$

สมมติให้ $ab=c^2$ สำหรับบางจำนวนเต็ม c โดยทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า

$a=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$ $\quad p_1<p_2<\cdots<p_r$ โดยที่ และ $b=q_1^{t_1}q_2^{t_2}\cdots q_m^{t_m}$ $\quad q_1<q_2<\cdots<q_m$ โดยที่ เมื่อ $p_1,p_2,\ldots,p_r,q_1,q_2,\ldots,q_m$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $k_1,k_2,\ldots,k_r,t_1,t_2,\ldots,t_m$ เป็นจำนวนเต็มบวก เนื่องจาก $\gcd(a,b)=1$ จึงได้ว่า $p_i\neq q_j$ สำหรับทุก $i=1,2,\ldots,r,\ j=1,2,\ldots,m$

เนื่องจาก $ab=(p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r})(q_1^{t_1}q_2^{t_2}\cdots q_m^{t_m})=c^2$ ดังนั้น k_i เป็นจำนวนเต็มคู่ สำหรับทุก $i=1,2,\ldots,r$ และ t_j เป็นจำนวนเต็มคู่ สำหรับทุก $j=1,2,\ldots,m$ จึงได้ว่า $k_i=2u_i$ เมื่อ u_i เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับทุก $i=1,2,\ldots,r$ และ $t_j=2v_j$ เมื่อ v_j เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับทุก $j=1,2,\ldots,m$ ดังนั้น

$a=(p_1^{2u_1}p_2^{2u_2}\cdots p_r^{2u_r})=(p_1^{u_1}p_2^{u_2}\cdots p_r^{u_r})^2$ และ

$b=(q_1^{2v_1}q_2^{2v_2}\cdots q_m^{2v_m})=(q_1^{v_1}q_2^{v_2}\cdots q_m^{v_m})^2$

ดังนั้น $a=u^2$ และ $b=v^2$ เมื่อ $u=p_1^{u_1}p_2^{u_2}\cdots p_r^{u_r}$ และ $v=q_1^{v_1}q_2^{v_2}\cdots q_m^{v_m}$

ต่อไปสมมติให้ $\gcd(u,v)=d$ จะได้ว่า $d|u$ และ $d|v$

ดังนั้น $u=dl_1$ และ $v=dl_2$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก l_1 และ l_2

จึงได้ว่า $u^2=d^2l_1^2$ และ $v^2=d^2l_2^2$ นั่นคือ $a=d^2l_1^2$ และ $b=d^2l_2^2$

ทำให้ได้ว่า $d^2|a$ และ $d^2|b$ เนื่องจาก $\gcd(a,b)=1$ จึงได้ว่า $d^2\le 1$ นั่นคือ $d=1$

เพราะฉะนั้น $\gcd(u,v)=1$

บทนิยาม 2.1 กำหนดให้ a,b เป็นจำนวนเต็มและ n เป็นจำนวนเต็มบวก เรากล่าวว่า a **สมภาคกับ** b **มอดุโล** n (a **is congruent to** b **modulo** n) ซึ่งเขียนแทนด้วย $a\equiv b \pmod n$ ก็ต่อเมื่อ n หาร $a-b$ ลงตัว

ทฤษฎีบท 2.4 (Patthanangkoor [12]) กำหนดให้ a,b,c,d เป็นจำนวนเต็มและ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

(1) $a\equiv a \pmod n$

(2) ถ้า $a\equiv b \pmod n$ แล้ว $b\equiv a \pmod n$

(3) ถ้า $a\equiv b \pmod n$ และ $b\equiv c \pmod n$ แล้ว $a\equiv c \pmod n$

(4) ถ้า $a\equiv b \pmod n$ และ $c\equiv d \pmod n$ แล้ว $a+c\equiv b+d \pmod n$ และ $ac\equiv bd \pmod n$

(5) ถ้า $a\equiv b \pmod n$ แล้ว $a+c\equiv b+c \pmod n$ และ $ac\equiv bc \pmod n$

(6) ถ้า $a\equiv b \pmod n$ แล้ว $a^k\equiv b^k \pmod n$ สำหรับทุก $k\in\mathbb{N}$

(7) ถ้า $ac\equiv bc \pmod n$ และ $\gcd(c,n)=d$ แล้ว $a\equiv b \left(\bmod \frac{n}{d}\right)$

(8) $a\equiv b \pmod n$ ก็ต่อเมื่อ เศษที่ได้จากการหาร a ด้วย n เท่ากับเศษที่ได้จากการหาร b ด้วย n

ทฤษฎีบท 2.5 กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า $a^2\equiv 0 \pmod 3$ หรือ $a^2\equiv 1 \pmod 3$

<u>บทพิสูจน์</u> กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่ามี $r\in\{0,1,2\}$ ซึ่งทำให้ $a\equiv r \pmod 3$

ถ้า $a\equiv 0 \pmod 3$ แล้ว $a^2\equiv 0^2\equiv 0 \pmod 3$

ถ้า $a\equiv 1 \pmod 3$ แล้ว $a^2\equiv 1^2\equiv 1 \pmod 3$

และ ถ้า $a\equiv 2 \pmod 3$ แล้ว $a^2\equiv 2^2\equiv 1 \pmod 3$

ดังนั้น จากทั้งสามกรณีจึงสรุปได้ว่า $a^2\equiv 0 \pmod 3$ หรือ $a^2\equiv 1 \pmod 3$

ทฤษฎีบท 2.6 กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า $a^2\equiv 0 \pmod 5$, $a^2\equiv 1 \pmod 5$ หรือ $a^2\equiv 4 \pmod 5$

<u>บทพิสูจน์</u> กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่ามี $r\in\{0,1,2,3,4\}$ ซึ่งทำให้ $a\equiv r \pmod 5$

ถ้า $a\equiv 0 \pmod 5$ แล้ว $a^2\equiv 0^2\equiv 0 \pmod 5$

ถ้า $a\equiv 1 \pmod 5$ แล้ว $a^2\equiv 1^2\equiv 1 \pmod 5$

ถ้า $a\equiv 2 \pmod 5$ แล้ว $a^2\equiv 2^2\equiv 4 \pmod 5$

ถ้า $a\equiv 3 \pmod 5$ แล้ว $a^2\equiv 3^2\equiv 4 \pmod 5$

และ ถ้า $a\equiv 4 \pmod 5$ แล้ว $a^2\equiv 4^2\equiv 1 \pmod 5$

ดังนั้น จากทั้งห้ากรณีจึงสรุปได้ว่า $a^2\equiv 0 \pmod 5$, $a^2\equiv 1 \pmod 5$ หรือ $a^2\equiv 4 \pmod 5$

บทนิยาม 2.2 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n>1$ และ a เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $\gcd(a,n)=1$ เรียกจำนวนเต็มบวก k ที่น้อยสุดซึ่ง $a^k\equiv 1 \pmod n$ ว่า **อันดับของ** a **มอดุโล** n (**Order of** a **modulo** n) และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathrm{ord}_n a$

ทฤษฎีบท 2.7 (Patthanangkoor [12]) กำหนดให้ n และ m เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n>1$ ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $\gcd(a,n)=1$ แล้วจะได้ว่า $a^m\equiv 1 \pmod n$ ก็ต่อเมื่อ $\mathrm{ord}_n a|m$

ทฤษฎีบท 2.8 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

(1) ถ้า $2^n\equiv 1 \pmod 5$ แล้ว n เป็นจำนวนเต็มคู่

(2) ถ้า $2^n\equiv 4 \pmod 5$ แล้ว n เป็นจำนวนเต็มคู่

<u>บทพิสูจน์</u> กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

เนื่องจาก 4 เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด ซึ่ง $2^4\equiv 1 \pmod 5$ ดังนั้น $\mathrm{ord}_5 2=4$

(1) สมมติให้ $2^n \equiv 1 \pmod 5$ โดยทฤษฎีบท 2.7 จึงได้ว่า $4|n$

ดังนั้น $n = 4k = 2(2k)$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก k นั่นคือ n เป็นจำนวนเต็มคู่

(2) สมมติให้ $2^n \equiv 4 \pmod 5$ เนื่องจาก $4 \equiv -1 \pmod 5$ จึงได้ว่า $2^n \equiv -1 \pmod 5$

ดังนั้น $(2^n)^2 \equiv (-1)^2 \pmod 5$ นั่นคือ $2^{2n} \equiv 1 \pmod 5$

โดยทฤษฎีบท 2.7 จึงได้ว่า $4|(2n)$ ดังนั้น $2n = 4m$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก m

จึงได้ว่า $n = 2m$ ดังนั้น n เป็นจำนวนเต็มคู่

ทฤษฎีบท 2.9 (Mihailescu's theorem) (Mihailescu, P. [13]) สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ เมื่อ a, b, x และ y เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $\min\{a, b, x, y\} > 1$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$

3. ผลงานวิจัย

ในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยจะดำเนินการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 3^y = z^2$ และ $17^x - 5^y = z^2$ ซึ่งประกอบด้วยตัวแปรหลัก 3 ตัวแปร คือ x, y และ z โดยที่ตัวแปรเหล่านี้ถูกกำหนดอยู่ในเซตของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่ง x และ y ทำหน้าที่เป็นเลขชี้กำลังของฐาน 17 และ 3 (หรือ 5) ตามลำดับ และ z แทนฐานของผลลัพธ์ที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ สำหรับการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 3^y = z^2$ นั้น จะแบ่งการพิจารณาออกเป็น 4 กรณี ดังแสดงในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 สมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 3^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลย 2 ผลเฉลยคือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, 0, 4)$

<u>บทพิสูจน์</u> กำหนดให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 3^y = z^2$

กรณีที่ 1 กำหนดให้ $x = 0$

จะได้สมการ $17^0 - 3^y = z^2$ หรือ $1 - 3^y = z^2$

เนื่องจาก $z^2 \geq 0$ จึงได้ว่า $1 - 3^y \geq 0$ นั่นคือ $1 \geq 3^y$

แต่ $3^y \geq 1$ ดังนั้น $3^y = 1$ จึงได้ว่า $y = 0$

ทำให้ได้ว่า $z^2 = 1 - 3^0 = 1 - 1 = 0$ ฉะนั้น $z = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยของกรณีนี้ คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

กรณีที่ 2 กำหนดให้ $y = 0$

จะได้สมการ $17^x - 3^0 = z^2$ หรือ $17^x - 1 = z^2$

จะเห็นได้ว่า ถ้า $x = 0$ แล้วจะได้ว่า $z^2 = 17^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ ดังนั้น $z = 0$

ถ้า $x = 1$ แล้วจะได้ว่า $z^2 = 17^1 - 1 = 17 - 1 = 16$ ดังนั้น $z = 4$

และ ถ้า $x > 1$ แล้วจะได้ว่า $z^2 = 17^x - 1 > 1$ ดังนั้น $z > 1$

จึงทำให้ได้ว่า $\min\{17, z, x, 2\} > 1$ โดยทฤษฎีบท 2.9 จึงได้ว่า $(17, z, x, 2) = (3, 2, 2, 3)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

จึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยของกรณีนี้คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, 0, 4)$

กรณีที่ 3 กำหนดให้ $z = 0$

จะได้สมการ $17^x - 3^y = 0$ หรือ $17^x = 3^y$

ถ้า $y > 0$ แล้วจะได้ว่า $3|3^y$ ดังนั้น $3|17^x$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น $y = 0$ และทำให้ได้ว่า $17^x = 3^0 = 1$ นั่นคือ $x = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยของกรณีนี้ คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

กรณีที่ 4 กำหนดให้ $x, y, z \geq 1$

เนื่องจาก $17 \equiv 2 \pmod 3$ และ $3 \equiv 0 \pmod 3$ ดังนั้น $17^x \equiv 2^x \pmod 3$ และ $3^y \equiv 0^y \equiv 0 \pmod 3$

จึงได้ว่า $17^x - 3^y \equiv 2^x - 0 \equiv 2^x \pmod 3$

แต่ $17^x - 3^y = z^2$ ดังนั้น $z^2 \equiv 2^x \pmod 3$

โดยทฤษฎีบท 2.5 จะเห็นได้ว่า $z^2 \equiv 0 \pmod 3$ หรือ $z^2 \equiv 1 \pmod 3$

ดังนั้น $2^x \equiv 0 \pmod 3$ หรือ $2^x \equiv 1 \pmod 3$

ถ้า $2^x \equiv 0 \pmod 3$ แล้ว $3 \left| 2^x \right.$ จึงทำให้ได้ว่า $3|2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $2^x \equiv 1 \pmod 3$

สมมติให้ x เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า $x = 2k+1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

เนื่องจาก $2^x \equiv 1 \pmod 3$ จะได้ว่า $2^{2k+1} \equiv 1 \pmod 3$ นั่นคือ $2(2^{2k}) \equiv 1 \pmod 3$

แต่ $1 \equiv 2^2 \pmod 3$ ดังนั้น $2(2^{2k}) \equiv 2(2) \pmod 3$

โดยทฤษฎีบท 2.4 จะได้ว่า $2^{2k} \equiv 2 \pmod 3$ นั่นคือ $(2^k)^2 \equiv 2 \pmod 3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น x เป็นจำนวนเต็มคู่ จึงได้ว่า $x = 2m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก

เนื่องจาก $17^x - 3^y = z^2$ จึงได้ว่า $17^{2m} - 3^y = z^2$ หรือ $17^{2m} - z^2 = 3^y$

ดังนั้น $\left(17^m - z\right)\left(17^m + z\right) = 3^y$

สมมติให้ $17^m - z = 3^u$ และ $17^m + z = 3^v$ เมื่อ u และ v เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยที่ $u < v$ และ $u + v = y$

ถ้า $y = 1$ แล้วจะได้ว่า $u = 0$ และ $v = 1$ จึงได้ว่า $17^m - z = 3^0 = 1$ และ $17^m + z = 3^1 = 3$

ดังนั้น $2(17^m) = 4$ หรือ $17^m = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น $y \neq 1$ นั่นคือ $y \geq 2$

จะเห็นได้ว่า $2(17^m) = 3^u + 3^v = 3^u(1 + 3^{v-u})$

ในกรณีที่ $u \geq 1$ จะได้ว่า $3 | 3^u$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $3 | 2(17^m)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $u = 0$

จึงได้ว่า $2(17^m) = 3^0 + 3^v = 1 + 3^y$

เนื่องจาก $17 \equiv -1 \pmod 9$ ดังนั้น $17^m \equiv (-1)^m \pmod 9$ และได้ว่า $2(17^m) \equiv 2(-1)^m \pmod 9$

เนื่องจาก $y \geq 2$ ดังนั้น $3^y \equiv 0 \pmod 9$ จึงได้ว่า $1 + 3^y \equiv 1 + 0 \equiv 1 \pmod 9$

เพราะฉะนั้น $2(-1)^m \equiv 1 \pmod 9$ จะเห็นได้ว่า

ถ้า m เป็นจำนวนเต็มคู่แล้ว $2(-1)^m = 2(1) = 2$ ซึ่ง $2 \not\equiv 1 \pmod 9$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

และ ถ้า m เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว $2(-1)^m = 2(-1) = -2$ ซึ่ง $-2 \not\equiv 1 \pmod 9$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น ในกรณีนี้ไม่มีผลเฉลย

จึงสรุปได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมด 2 ผลเฉลย คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, 0, 4)$ □

ต่อไปจะหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 5^y = z^2$ โดยแบ่งการพิจารณาออกเป็น 4 กรณีเช่นกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2 สมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 5^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลย 2 ผลเฉลยคือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, 0, 4)$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 5^y = z^2$

กรณีที่ 1 กำหนดให้ $x = 0$

จะได้สมการ $17^0 - 5^y = z^2$ หรือ $1 - 5^y = z^2$

เนื่องจาก $z^2 \geq 0$ จึงได้ว่า $1 - 5^y \geq 0$ นั่นคือ $1 \geq 5^y$

แต่ $5^y \geq 1$ ดังนั้น $5^y = 1$ จึงได้ว่า $y = 0$

ทำให้ได้ว่า $z^2 = 1 - 5^0 = 1 - 1 = 0$ ฉะนั้น $z = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยของกรณีนี้ คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

กรณีที่ 2 กำหนดให้ $y = 0$

จะได้สมการ $17^x - 5^0 = z^2$ หรือ $17^x - 1 = z^2$

จะเห็นได้ว่า ถ้า $x = 0$ แล้วจะได้ว่า $z^2 = 17^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ ดังนั้น $z = 0$

ถ้า $x = 1$ แล้วจะได้ว่า $z^2 = 17^1 - 1 = 17 - 1 = 16$ ดังนั้น $z = 4$

และ ถ้า $x > 1$ แล้วจะได้ว่า $z^2 = 17^x - 1 > 1$ ดังนั้น $z > 1$

จึงทำให้ได้ว่า $\min\{17,z,x,2\}>1$ โดยทฤษฎีบท 2.9 จึงได้ว่า $(17,z,x,2)=(3,2,2,3)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

จึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยของกรณีนี้คือ $(x,y,z)=(0,0,0)$ และ $(x,y,z)=(1,0,4)$

กรณีที่ 3 กำหนดให้ $z=0$

จะได้สมการ $17^x-5^y=0$ หรือ $17^x=5^y$

ถ้า $y>0$ แล้วจะได้ว่า $5\mid 5^y$ ดังนั้น $5\mid 17^x$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น $y=0$ และทำให้ได้ว่า $17^x=5^0=1$ นั่นคือ $x=0$

ดังนั้น ผลเฉลยของกรณีนี้ คือ $(x,y,z)=(0,0,0)$

กรณีที่ 4 กำหนดให้ $x,y,z\geq 1$

เนื่องจาก $17\equiv 2 \pmod 5$ และ $5\equiv 0 \pmod 5$ ดังนั้น $17^x\equiv 2^x \pmod 5$ และ $5^y\equiv 0^y\equiv 0 \pmod 5$

จึงได้ว่า $17^x-5^y\equiv 2^x-0\equiv 2^x \pmod 5$

แต่ $17^x-5^y=z^2$ ดังนั้น $z^2\equiv 2^x \pmod 5$

โดยทฤษฎีบท 2.6 จะเห็นได้ว่า $z^2\equiv 0 \pmod 5$ หรือ $z^2\equiv 1 \pmod 5$ หรือ $z^2\equiv 4 \pmod 5$

ดังนั้น $2^x\equiv 0 \pmod 5$ หรือ $2^x\equiv 1 \pmod 5$ หรือ $2^x\equiv 4 \pmod 5$

ถ้า $2^x\equiv 0 \pmod 5$ แล้ว $5\mid 2^x$ ทำให้ได้ว่า $5\mid 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $2^x\equiv 1 \pmod 5$ หรือ $2^x\equiv 4 \pmod 5$ โดยทฤษฎีบท 2.8 จะได้ว่า x เป็นจำนวนเต็มคู่

เนื่องจาก $17\equiv -1 \pmod 3$ และ $5\equiv -1 \pmod 3$ จึงได้ว่า $17^x\equiv (-1)^x \pmod 3$ และ $5^y\equiv (-1)^y \pmod 3$

ดังนั้น $17^x-5^y\equiv (-1)^x-(-1)^y \pmod 3$ นั่นคือ $z^2\equiv (-1)^x-(-1)^y \pmod 3$

แต่ x เป็นจำนวนเต็มคู่ จึงทำให้ได้ว่า $z^2\equiv 1-(-1)^y \pmod 3$

ถ้า y เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว $z^2\equiv 1-(-1)\equiv 2 \pmod 3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น y เป็นจำนวนเต็มคู่

สมมติให้ $x=2a$ และ $y=2b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้สมการ $17^{2a}-5^{2b}=z^2$ หรือ $\left(17^a-5^b\right)\left(17^a+5^b\right)=z^2$

เนื่องจาก 5 และ 17 เป็นจำนวนเต็มคี่ ดังนั้น 17^a และ 5^b เป็นจำนวนเต็มคี่

จึงทำให้ 17^a-5^b และ 17^a+5^b เป็นจำนวนเต็มคู่

เพราะฉะนั้น $2\mid(17^a-5^b)$ และ $2\mid(17^a+5^b)$

นั่นคือ 2 เป็นตัวหารร่วมของ 17^a-5^b และ 17^a+5^b

สมมติให้ c เป็นจำนวนเต็มบวกที่เป็นตัวหารร่วมของ 17^a-5^b และ 17^a+5^b

ดังนั้น $c\mid(17^a-5^b)$ และ $c\mid(17^a+5^b)$

จะได้ว่า $c\mid((17^a+5^b)+(17^a-5^b))$ และ $c\mid((17^a+5^b)-(17^a-5^b))$ นั่นคือ $c\mid(2(17^a))$ และ $c\mid(2(5^b))$

จะเห็นได้ว่า ถ้า $c\mid 2$ แล้ว $c\leq 2$

และถ้า $c\nmid 2$ แล้ว $c\mid 17$ และ $c\mid 5$ จึงได้ว่า c เป็นตัวหารร่วมของ 17 และ 5

เนื่องจาก $\gcd(17,5)=1$ ดังนั้น $c\leq 1$

จึงได้ว่า 2 เป็นตัวหารร่วมมากของ 17^a-5^b และ 17^a+5^b นั่นคือ $\gcd(17^a-5^b,17^a+5^b)=2$

เนื่องจาก $2\mid(17^a-5^b)$ และ $2\mid(17^a+5^b)$

จะได้ว่า $17^a-5^b=2s$ และ $17^a+5^b=2t$ เมื่อ s และ t เป็นจำนวนเต็ม

เนื่องจาก $2=\gcd(17^a-5^b,17^a+5^b)=\gcd(2s,2t)=2\gcd(s,t)$ ดังนั้น $\gcd(s,t)=1$

จะเห็นว่า $(2s)(2t)=\left(17^a-5^b\right)\left(17^a+5^b\right)=17^{2a}-5^{2b}=17^x-5^y=z^2$ นั่นคือ $st=\left(\frac{z}{2}\right)^2$

โดยทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า $s=u^2$ และ $t=v^2$ เมื่อ u และ v เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $\gcd(u,v)=1$

ทำให้ได้ว่า $17^a - 5^b = 2u^2$ และ $17^a + 5^b = 2v^2$

เพราะฉะนั้น $2v^2 - 2u^2 = (17^a + 5^b) - (17^a - 5^b) = 2(5^b)$

นั่นคือ $v^2 - u^2 = 5^b$ หรือ $(v-u)(v+u) = 5^b$

สมมติให้ $v - u = 5^k$ และ $v + u = 5^l$ เมื่อ k และ l เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $0 \le k < l \le b$ และ $k + l = b$

ดังนั้น $2v = 5^k + 5^l = 5^k(1 + 5^{l-k})$

สมมติว่า $k > 0$ เนื่องจาก $5 \mid 5^k$ ดังนั้น $5 \mid (2v)$ แต่ $5 \nmid 2$ จึงได้ว่า $5 \mid v$

ทำให้ได้ว่า $5 \mid v^2$ นั่นคือ $5 \mid t$ จึงได้ว่า $5 \mid (2t)$

เนื่องจาก $5 \mid 5^b$ ดังนั้น $5 \mid (2t - 5^b)$

แต่ $17^a + 5^b = 2t$ จึงได้ว่า $5 \mid 17^a$ ดังนั้น $5 \mid 17$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $k = 0$ จึงได้ว่า $l = b - k = b - 0 = b$

นั่นคือ $v - u = 5^0 = 1$ และ $v + u = 5^b$

เนื่องจาก $(v-u)+(v+u) = 1 + 5^b$ และ $(v-u)-(v+u) = 1 - 5^b$

จึงได้ว่า $v = \dfrac{5^b + 1}{2}$ และ $u = \dfrac{5^b - 1}{2}$

ดังนั้น $17^a + 5^b = 2v^2 = 2\left(\dfrac{5^b + 1}{2}\right)^2$

$$= \frac{5^{2b} + 2\left(5^b\right) + 1}{2}$$

และ $17^a - 5^b = 2u^2 = 2\left(\dfrac{5^b - 1}{2}\right)^2$

$$= \frac{5^{2b} - 2\left(5^b\right) + 1}{2}$$

จะได้ว่า $17^a = \dfrac{5^{2b} + 1}{2}$ ดังนั้น $2(17^a) = 5^{2b} + 1$ หรือ $5^{2b} = 2(17^a) - 1$

เนื่องจาก $5 \equiv -1 \pmod 3$ จะได้ว่า $5^{2b} \equiv (-1)^{2b} \equiv ((-1)^2)^b \equiv 1^b \equiv 1 \pmod 3$

เนื่องจาก $17 \equiv 2 \pmod 3$ โดยทฤษฎีบท 2.4 จะได้ว่า $17^a \equiv 2^a \pmod 3$

ดังนั้น $2(17^a) \equiv 2(2^a) \equiv 2^{a+1} \pmod 3$ และ $5^{2b} + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 3$

เนื่องจาก $2(17^a) = 5^{2b} + 1$ จะได้ว่า $2^{a+1} \equiv 2 \pmod 3$

สมมติให้ a เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า $a + 1$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ดังนั้น $a + 1 = 2m$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก m

เนื่องจาก $2^2 \equiv 1 \pmod 3$ จึงได้ว่า $(2^2)^m \equiv 1^m \pmod 3$ หรือ $2^{2m} \equiv 1 \pmod 3$

นั่นคือ $2^{a+1} \equiv 1 \pmod 3$ แต่ $2^{a+1} \equiv 2 \pmod 3$ จึงทำให้ $2 \equiv 1 \pmod 3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น a เป็นจำนวนเต็มคู่

เนื่องจาก $b \ge 1$ ดังนั้น $5^{2b} \equiv 0 \pmod 5$

เนื่องจาก $17 \equiv 2 \pmod 5$ โดยทฤษฎีบท 2.4 จึงได้ว่า $17^a \equiv 2^a \pmod 5$

ดังนั้น $2(17^a) \equiv 2(2^a) \equiv 2^{a+1} \pmod 5$ และจะได้ว่า $2(17^a) - 1 \equiv 2^{a+1} - 1 \pmod 5$

เนื่องจาก $5^{2b} = 2(17^a) - 1$ จึงได้ว่า $5^{2b} \equiv 2^{a+1} - 1 \pmod 5$

แต่ $5^{2b} \equiv 0 \pmod 5$ ดังนั้น $2^{a+1} - 1 \equiv 0 \pmod 5$ นั่นคือ $2^{a+1} \equiv 1 \pmod 5$

เนื่องจาก $\operatorname{ord}_5 2 = 4$ โดยทฤษฎีบท 2.7 จึงได้ว่า $4 \mid (a+1)$

ทำให้ได้ว่า $2 \mid (a+1)$ นั่นคือ $a + 1$ เป็นจำนวนเต็มคู่

แต่เนื่องจาก a เป็นจำนวนเต็มคู่ ดังนั้น $a + 1$ เป็นจำนวนเต็มคี่ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้นกรณีนี้ไม่มีผลเฉลย

จึงสรุปได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมด 2 ผลเฉลย คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, 0, 4)$

4. สรุปผลการวิจัยและวิจารณ์

บทความวิจัยนี้ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 3^y = z^2$ และ $17^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลยที่เหมือนกัน คือ $(x,y,z)=(0,0,0)$ และ $(x,y,z)=(1,0,4)$ โดยการพิสูจน์มีความแตกต่างกัน ซึ่งสมการ $17^x - 5^y = z^2$ มีความซับซ้อนกว่าเนื่องจากต้องอาศัยการพิสูจน์ความเป็นจำนวนคู่ของเลขชี้กำลัง x และ y ก่อน จากนั้นจึงประยุกต์ใช้เทคนิคการแยกตัวประกอบร่วมกับการวิเคราะห์ตัวหารร่วมมากเพื่อหาข้อขัดแย้ง ทั้งนี้ วิธีการที่นำเสนอนี้ทำให้สามารถหาผลเฉลยได้โดยไม่จำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขบังคับตัวแปรเพิ่มเติม แต่ใช้อันดับมอดุโลและทฤษฎีบทของ Mihailescu ในการจำกัดขอบเขตของตัวแปรแทน ซึ่งแนวทางนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปทั่วไป $p^x - q^y = z^k$ ที่มีฐานสูงขึ้นในอนาคตได้

5. References

[1] Burshtein, N., 2020, All the solutions of the diophantine equations $13^x - 5^y = z^2$ and $19^x - 5^y = z^2$ in positive integers x, y, z, Ann. Pure Appl. Math. 22(2): 93-96.

[2] Thongnak, S., Chuayjan, W. and Kaewong, T., 2021, The solution of the exponential diophantine equation $7^x - 5^y = z^2$, MJMATh. 66(703): 62-67.

[3] Tadee, S. and Laomalaw, N., 2022, On the diophantine equation $n^x - n^y = z^2$ and $2^x - p^y = z^2$, Phranakhon Rajabhat Res. J. (Sci. Technol.) 17(21): 10-16. (in Thai)

[4] Thongnak, S., Chuayjan, W. and Kaewong, T., 2023, On the diophantine equation $15^x - 13^y = z^2$, Ann. Pure Appl. Math. 27(1): 23-26.

[5] Thongnak, S., Kaewong, T. and Chuayjan, W., 2023, On the diophantine equation $55^x - 53^y = z^2$, Ann. Pure Appl. Math. 27(1): 27-30.

[6] Tadee, S., 2023, On the diophantine equation $3^x - p^y = z^2$ when p is prime, J. Sci. Technol. Thonburi Univ. 7(1): 1-6.

[7] Tadee, S., 2023, On the diophantine equation $n^x - 5^y = z^2$ when $n \equiv 11 \pmod{20}$, J. KPRU Sci. Math. Technol. 2(1): 57-60. (in Thai)

[8] Tadee, S. and Laomalaw, N., 2023, On the diophantine equation $(p+2)^x - p^y = z^2$ where p is prime and $p \equiv 5 \pmod{24}$, Int. J. Math. Comput. Sci. 18(2): 149-152.

[9] Tadee, S., 2024, The solutions of the diophantine equation $11^x - 3^y = z^2$ and $14^x - 3^y = z^2$, J. Sci. Technol. Phetchabun Rajabhat Univ. 4(2): 12-17. (in Thai)

[10] Tadee, S., 2024, On the diophantine equation $(p-1)^x - p^y = z^2$ where p is a prime, SciTech Res. J. 7(3): 17-24.

[11] Tadee, S. and Wannaphan, C., 2024, On the diophantine equations $(p+a)^x - p^y = z^2$ and $p^x - (p+a)^y = z^2$, Int. J. Math. Comput. Sci. 19(2): 459-465.

[12] Patthanangkoor, T., 2007, Elementary of Number Theory, Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University, Pathum Thani, 230 p. (in Thai)

[13] Mihailescu, P., 2004, Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture, J. Reine Angew. Math. 572: 167-195.