สถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน สำหรับข้อมูลมิติสูง

ปารณัท สุขเจริญ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติประยุกต์)
คณะสถิติประยุกต์
สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์
2561

สถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน สำหรับข้อมูลมิติสูง

ปารณัท สุขเจริญ

คณะสถิติประยุกต์

..... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ศาสตราจารย์ ดร.สำรวม จงเจริญ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ได้พิจารณาแล้วเห็นสมควรอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติประยุกต์)

..... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.วิชิต หล่อจีระชุณห์กุล)

..... กรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.จิราวัลย์ จิตรถเวช)

..... กรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.สำรวม จงเจริญ)

..... คณบดี

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ ลือนาม)

_____/_____/_____

บทคัดย่อ

ชื่อวิทยานิพนธ์	สถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน สำหรับข้อมูลมิติสูง
ชื่อผู้เขียน	นายปารณัท สุขเจริญ
ชื่อปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติประยุกต์)
ปีการศึกษา	2561

งานวิจัยนี้ได้นำเสนอตัวสถิติทดสอบสำหรับทดสอบสมมุติฐานเชิงสถิติความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร ภายใต้ข้อกำหนดเบื้องต้นว่าข้อมูลทั้งสองตัวอย่างมีการแจกแจงปกติหลายตัวแปร ที่ไม่ทราบเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรแต่ทราบว่าไม่เท่ากันและเป็นอิสระกัน สำหรับข้อมูลมิติสูง การพัฒนาตัวสถิติทดสอบมีพื้นฐานจากแนวคิดการเก็บรักษาข้อมูลจากเมทริกซ์ความแปรปรวนของตัวอย่างให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ ตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอมีคุณสมบัติไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การแปลงสเกลาร์และมีการแจกแจงปรกติมาตรฐานโดยประมาณเมื่อจำนวนตัวแปรสุ่มมีจำนวนมาก ผลการศึกษาด้วยการจำลองข้อมูลพบว่าตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอมีระดับนัยสำคัญที่ได้รับเข้าใกล้ระดับนัยสำคัญที่กำหนดอย่างน่าพอใจและมีกำลังการทดสอบที่ได้รับมากกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ เมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนของตัวอย่างสามารถจัดให้มีโครงสร้างแบบเมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อก โดยกำลังการทดสอบที่ได้รับของตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอจะเพิ่มสูงขึ้นเมื่อจำนวนตัวแปรสุ่มมีจำนวนเพิ่มขึ้นเมื่อขนาดตัวอย่างคงที่ หรือในทางกลับกัน หรือตัวแปรสุ่มภายในแต่ละตัวอย่างมีระดับความสัมพันธ์เพิ่มมากขึ้น และได้ประยุกต์ใช้ตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอกับข้อมูลจริงเกี่ยวกับข้อมูลไมโครอาร์เรย์ของดีเอ็นเอ

ABSTRACT

Title of Thesis	A Two Sample Test for Mean Vectors with Unequal Covariance Matrices in High–Dimensional Data
Author	Paranut Sukcharoen
Degree	Master of Science (Applied Statistics)
Year	2018

In this paper, we proposed a new testing statistic for testing the equality of mean vectors from two multivariate normal populations when the covariance matrices are unknown and unequal in high–dimensional data. A new test is proposed based on the idea of keeping more information from the sample covariance matrices as much as possible. A proposed test is invariant under scalar transformations. We showed that the asymptotic distribution of proposed statistic is standard normal distribution when number of random variables approach infinity. We also compared the performance of the proposed test with other three existing tests by the simulation study. The simulation results showed that the attained significance level of proposed test close to setting nominal significance level satisfactorily. The attained power of proposed test outperforms as the other comparative tests under form of covariance matrices considered which can be arranged to block diagonal matrix structure. The attained power becomes more powerful when the dimension increases for a given sample size or vice versa, or relationship level between random variables in each sample increases. Finally, the proposed test is also illustrated with an analysis of DNA microarray data.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดีเนื่องมาจากข้าพเจ้าได้รับความกรุณาและช่วยเหลือเป็นอย่างดียิ่งจาก ศาสตราจารย์ ดร.สำรวม จงเจริญ ผู้เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ได้จุดประกายแนวความคิดสำหรับการริเริ่มหัวข้อวิทยานิพนธ์ อีกทั้งให้คำปรึกษา ข้อชี้แนะ และข้อคิดเห็น ตลอดจนติดตามความคืบหน้าการทำวิทยานิพนธ์ในทุกขั้นตอน รวมทั้งตรวจสอบและแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ เพื่อให้วิทยานิพนธ์ของข้าพเจ้ามีมาตรฐานในระดับสากล อันเป็นคุณวิเศษสำหรับวิทยานิพนธ์ของข้าพเจ้าอย่างยิ่ง ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.วิชิต หล่อจีระชุณห์กุล ประธานกรรมการสอบป้องกันวิทยานิพนธ์ และ ศาสตราจารย์ ดร.จิราวัลย์ จิตรถเวช กรรมการสอบป้องกันวิทยานิพนธ์ของข้าพเจ้า ที่กรุณาและเมตตาให้คำแนะนำ และแนวคิดที่เป็นประโยชน์ ตลอดจนช่วยตรวจสอบ และแก้ไขให้วิทยานิพนธ์ของข้าพเจ้ามีความสมบูรณ์และถูกต้องตามหลักวิชาการสถิติมากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณสถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ ที่ได้อนุเคราะห์ทุนส่งเสริมการศึกษาและทุนสนับสนุนการทำและการตีพิมพ์วิทยานิพนธ์แก่ข้าพเจ้า และขอขอบคุณเจ้าหน้าที่คณะสถิติประยุกต์และภาคส่วนอื่นของสถาบันทุกท่าน ที่ให้ความช่วยเหลือ และอำนวยความสะดวกในทุกเรื่องแก่ข้าพเจ้าเป็นอย่างดี

ขอขอบคุณความอนุเคราะห์และช่วยเหลือสำหรับการคำนวณทางตัวเลขและการจำลองข้อมูลแก่ข้าพเจ้าเป็นอย่างดียิ่ง จากคุณสุวัฒฑนา ฉ้งทับ คุณธนานพ ลิ่มสุวรรณโรจน์ คุณรุ่งเรือง สีทองคำ คุณปมิตา วงษ์ประเสริฐ คุณรวีวรรณ บุญภา และคุณธัชกร ติวาภาณุชัย ความช่วยเหลือดังกล่าวที่ข้าพเจ้าได้รับมาเป็นพลวัตให้การทำวิทยานิพนธ์ของข้าพเจ้ามีความรวดเร็วขึ้นอย่างวิเศษ และสามารถสำเร็จเห็นผลได้สมดั่งที่ข้าพเจ้าปรารถนา

สุดท้ายนี้ ขอกราบขอบพระคุณและมอบความสำเร็จทั้งหมดจากการทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้และจากการศึกษาในระดับปริญญาโท แด่คุณจุมพล และคุณปราณี สุขเจริญ ผู้ซึ่งเป็นคุณพ่อและคุณแม่ของข้าพเจ้า ตลอดจนญาติ พี่ น้อง ครูบาอาจารย์ และเพื่อนของข้าพเจ้า ที่กรุณามอบความห่วงใย และกำลังใจส่งเสริม สนับสนุนในทุก ๆ ด้าน ซึ่งนับได้ว่าเป็นสิ่งสำคัญและถือเป็นเกียรติอย่างยิ่งของข้าพเจ้า

ปารณัท สุขเจริญ

มีนาคม 2562

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อ ..... ก

ABSTRACT ..... ข

กิตติกรรมประกาศ ..... ง

สารบัญ ..... จ

สารบัญตาราง ..... ฉ

สัญลักษณ์ ..... ช

บทที่ 1 บทนำ 1

1.1 ที่มาและความสำคัญ 1

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย 4

1.3 ขอบเขตการวิจัย 4

1.4 นิยามคำจำกัดความ 5

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย 5

บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 6

2.1 สถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อ $n_i \geq p$ 6

2.2 สถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อ $n_i < p$ 9

บทที่ 3 การดำเนินงานวิจัย 13

3.1 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย 13

3.2 การพัฒนาตัวสถิติทดสอบ 14

3.3 เงื่อนไขสำหรับการเลือกบล็อกหรือเมทริกซ์ย่อย $\tilde{\mathbf{S}}_{kk}$ จากเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ 23

3.4 การจำลองข้อมูล 24

บทที่ 4 ผลการดำเนินงานวิจัย 27

4.1 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน 27
4.2 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน 33
4.3 การประยุกต์ใช้ตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอกับข้อมูลจริง 39
บทที่ 5 สรุปและอภิปรายผลการดำเนินงานวิจัย 41
5.1 ข้อสรุปของการดำเนินงานวิจัย 41
5.2 ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยในอนาคต 44
บรรณานุกรม 45
ภาคผนวก 48
ภาคผนวก ก บทนิยามและทฤษฎีที่ใช้ในงานวิจัย 49
ภาคผนวก ข ขนาด จำนวนและตำแหน่งอย่างสุ่มของบล็อกหรือเมทริกซ์ย่อย บนแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\mathfrak{I}_1$ และ $\mathfrak{I}_2$ สำหรับขนาดตัวอย่างเท่ากัน 51
ภาคผนวก ค ขนาด จำนวนและตำแหน่งอย่างสุ่มของบล็อกหรือเมทริกซ์ย่อย บนแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\mathfrak{I}_1$ และ $\mathfrak{I}_2$ สำหรับขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน 55
ภาคผนวก ง คำสั่งโปรแกรมอาร์ที่ใช้ในการวิจัย 59
ประวัติผู้เขียน 71

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 4.1 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_1$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_2$ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$ 28

ตารางที่ 4.2 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_3$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_4$ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$ 29

ตารางที่ 4.3 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_5$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_6$ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$ 30

ตารางที่ 4.4 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_7$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_8$ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$ 31

ตารางที่ 4.5 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_9$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_{10}$ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$ 32

ตารางที่ 4.6 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_1$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_2$ เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$ 34

ตารางที่ 4.7 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_3$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_4$ เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$ 35

ตารางที่ 4.8 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_5$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_6$ เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$ 36

ตารางที่ 4.9 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_7$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_8$ เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$ 37

ตารางที่ 4.10 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_9$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_{10}$ เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$ 38

ตารางที่ 4.11 ค่าสถิติทดสอบและค่าพีของการทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของการแสดงออกของยีนระหว่างต่อมลูกหมากปกติและต่อมลูกหมากที่พบเซลล์มะเร็ง 40

สัญลักษณ์

$\mathbf{a}$	เวกเตอร์แนวตั้ง (Column Vector)
$\mathbf{a}'$	เวกเตอร์แถว (Row Vector)
$\mathbf{A}'$	เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose of a Matrix) ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	เมทริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix) ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$
$\mathrm{tr}(\mathbf{A})$	รอย (Trace) ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$
$\mathbf{I}$	เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix)
$\mathbf{0}$	เวกเตอร์หรือเมทริกซ์ที่สมาชิกทุกตัวมีค่าเป็น 0
(a_{ij})	เมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็น a_{ij}
$\lvert a \rvert$	ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ของ a
$\lfloor a \rfloor$	ฟังก์ชันพื้น (Floor Function) ของ a
$\xrightarrow{d}$	การลู่เข้าเชิงการแจกแจง (Convergence in Distribution)
$\mathrm{diag}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)$	เมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonal Matrix) ที่สมาชิกในแนวทแยงมุมคือ $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$
$\mathrm{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k)$	เมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อก (Block–Diagonal Matrix) ที่สมาชิกในแนวทแยงมุมคือเมทริกซ์ $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$
p	จำนวนตัวแปรสุ่ม
$\boldsymbol{\mu}_i$	เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของประชากร (Population Mean vector) ที่ i , $i=1,2$ ขนาด $p\times 1$
$\boldsymbol{\Sigma}_i$	เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร (Population Covariance Matrix) ที่ i , $i=1,2$ ขนาด $p\times p$
$\mathfrak{R}$	เมทริกซ์สหสัมพันธ์ของประชากร (Population Correlation Matrix) ขนาด $p\times p$
n_i	ขนาดตัวอย่าง (Sample Size) ที่สุ่มจากประชากรที่ i ,
$\bar{\mathbf{x}}_i$	เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง (Sample Mean vector) ที่ i , $i = 1,2$ ขนาด $p\times 1$
$\mathbf{S}_i$	เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง (Sample Covariance Matrix) ที่ i , $i=1,2$ ขนาด $p\times p$

$\mathbf{R}$	เมทริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวอย่าง (Sample Correlation Matrix) ขนาด $p \times p$
$\overset{a}{\sim}$	การแจกแจงโดยประมาณ (Approximately)
$\overset{iid}{\sim}$	การแจกแจงที่เป็นอิสระกันและมีการแจกแจงเดียวกัน (Independent Identically Distributed: i.i.d.)
$N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$	การแจกแจงปรกติ p ตัวแปร (Multivariate Normal Distribution) ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu}_i$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\boldsymbol{\Sigma}_i$
$Z_{1-\alpha}$	ค่าจากตารางการแจกแจงปรกติมาตรฐาน (Standard Normal Distribution) ณ พื้นที่หางด้านขวา (Right Tail) เท่ากับ α
$F_{\alpha;a,b}$	ค่าจากตารางการแจกแจงเอฟ (F – Distribution) ณ ระดับนัยสำคัญ α ที่องศาเสรี a และ b
$U(a,b)$	ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเอกรูปต่อเนื่อง (Continuous Uniform Distribution) ด้วยพารามิเตอร์ a และ b

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

ในปัจจุบันเทคโนโลยีการจัดเก็บข้อมูล (Storage Technology) มีความเจริญก้าวหน้าและมีประสิทธิภาพเพิ่มมากขึ้นเมื่อเทียบกับในอดีต อีกทั้งต้นทุนสำหรับการจัดเก็บข้อมูลที่ถูกลงประกอบกับภายใต้สถานการณ์ของข้อมูลในปัจจุบันที่มีการเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม การเปลี่ยนแปลงของข้อมูลต่าง ๆ เหล่านี้ล้วนทำให้นักวิจัยสามารถจัดเก็บข้อมูลได้อย่างรวดเร็วและในปริมาณที่มากขึ้นกว่าเดิม หลายครั้งพบว่าจำนวนตัวแปรที่นักวิจัยหรือนักวิเคราะห์ข้อมูลต้องการพิจารณามีมากขึ้นกว่าในอดีตอย่างมหาศาล รวมทั้งในกรณีที่ขนาดตัวอย่างมีจำนวนน้อยกว่าจำนวนตัวแปรที่สนใจศึกษา ตัวอย่างเช่น การศึกษาทางด้านชีวสารสนเทศศาสตร์เกี่ยวกับความผิดปรกติของโครโมโซมที่ได้รับการถ่ายทอดทางพันธุกรรมโดยใช้เทคโนโลยีไมโครอาร์เรย์ของดีเอ็นเอ (DNA Microarray) เพื่อตรวจสอบการแสดงออกของยีน (Gene Expression) โดยปรกติจำนวนหน่วยทดลอง เนื้อเยื่อ หรือขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการเก็บข้อมูล (Subjects) จะมีจำนวนไม่มาก ในขณะที่จำนวนตัวแปรคือการแสดงออกของยีนต่าง ๆ ภายในเนื้อเยื้อหรือหน่วยทดลองเดียวกันอาจมีจำนวนมากกว่าขนาดตัวอย่าง หรือการศึกษาการแปรผันของจำนวนชุดดีเอ็นเอ (Copy Number Variation: CNV) ในโครงการสร้างแผนที่จีโนมของโรคมะเร็ง (The Cancer Genome Atlas: TCGA) เพื่อปรับปรุงความสามารถในการวินิจฉัยรักษาและป้องกันโรคมะเร็งโดยอาศัยความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับพื้นฐานทางด้านพันธุกรรม ในการศึกษาได้เก็บข้อมูลจากหน่วยทดลอง 230 คน ซึ่งในจำนวน 230 คน พบว่า 92 คน มีชีวิตรอดมากกว่า 2 ปี ตั้งแต่ได้รับการวินิจฉัยว่าเป็นโรคมะเร็ง และอีก 138 คน ที่เสียชีวิตภายใน 2 ปี ตั้งแต่ได้รับการวินิจฉัยว่าเป็นโรคมะเร็ง สำหรับตัวแปรที่สนใจคือปริมาณการแปรผันของจำนวนชุดดีเอ็นเอจำนวน 8,895 ตัวแปร (Gregory, Carroll, Baladandayuthapani, & Lahiri, 2015)

ด้วยสถานการณ์ของขนาดตัวอย่างที่น้อยกว่าจำนวนตัวแปรอย่างมากดังกล่าวหรือ $n_i \ll p,$ $i=1,2$ จะนำไปสู่ปัญหาข้อมูลมิติสูง (High–Dimensional Data) หรือบางครั้งเรียกว่า “ p ใหญ่–n เล็ก” (Large p, Small n) ซึ่งวิธีการทางสถิติแบบเดิม (Classical Statistical) หลายวิธีไม่สามารถนำมาใช้วิเคราะห์กับข้อมูลมีมิติสูงได้ (Bühlmann & Geer, 2011) โดยในปัจจุบันข้อมูลมิติสูงได้ปรากฏอยู่ในหลายด้านด้วยเหตุผลที่แตกต่างกัน เช่น เทคโนโลยีการฉายภาพทาง

การแพทย์ (Medical Imaging) เศรษฐมิติ (Econometrics) ธรณีฟิสิกส์ (Geophysics) เทคโนโลยีสารสนเทศ (Information Technology) ชีวสารสนเทศศาสตร์ (Bioinformatics) ดาราศาสตร์ (Astronomy) และการเงิน (Finance) เป็นต้น (Bühlmann & Geer, 2011; Jiamwattanapong & Chongcharoen, 2017; J. Yao, Zheng, & Bai, 2015)

การทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร (Test for Mean Vectors from Two Populations) เป็นการทดสอบสมมุติฐานเชิงสถิติว่าเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม p ตัวแปร ระหว่าง 2 ประชากรมีความแตกต่างกันหรือไม่ ตัวอย่างเช่นต้องการทดสอบการแปรผันของจำนวนชุดดีเอ็นเอจำนวน 8,895 ตัวแปร ระหว่างกลุ่มคนที่ชีวิตรอดมากกว่า 2 ปี และกลุ่มคนที่เสียชีวิตภายใน 2 ปี ตั้งแต่ได้รับการวินิจฉัยว่าเป็นโรคมะเร็งว่ามีความแตกต่างกันหรือไม่ เป็นต้น หากการทดสอบดังกล่าวอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ว่าตัวแปรสุ่มทั้ง 2 ตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงปรกติ p ตัวแปร ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu}_i$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\boldsymbol{\Sigma}_i$ หรือ $\boldsymbol{N}_p(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$ ขนาด n_i , $i=1,2$ และตัวอย่างสุ่มจากทั้ง 2 ประชากรเป็นอิสระกัน โดยกรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรเท่ากัน $(\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2)$ ตัวสถิติทดสอบจะมีการแจกแจกโฮเทลลิ่งทีกำลังสอง (Hotelling's T^2) และถ้าหากข้อมูลมีมิติสูงคือเมื่อขนาดตัวอย่างมีลักษณะเป็น $p > n_1 + n_2 - 2$ จะพบว่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่างรวม (Pooled Sample Covariance Matrix) ไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix) ได้ หรือตัวสถิติทดสอบในกรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน $(\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2)$ ตัวสถิติทดสอบมีการแจกแจกเอฟโดยประมาณ และถ้าหากข้อมูลมีมิติสูงคือเมื่อขนาดตัวอย่างมีลักษณะเป็น $p > n_1 + n_2 - 2$ จะพบว่าเมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่าง (Sample Covariance Matrix) ระหว่าง 2 ประชากร ไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้ ด้วยปัญหาทางคณิตศาสตร์เหล่านี้ส่งผลให้ไม่สามารถคำนวณค่าสถิติทดสอบได้ไม่ว่าจะในกรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรเท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ตาม และท้ายที่สุดนักวิจัยหรือนักวิเคราะห์ข้อมูลก็ไม่สามารถทดสอบสมมุติฐานเชิงสถิติได้

ดังนั้นในอดีตจนถึงปัจจุบันได้มีกลุ่มนักสถิติหรือนักวิจัยจำนวนไม่น้อยที่สนใจศึกษาและพัฒนาตัวสถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อข้อมูลมีมิติสูงในกรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรเท่ากัน $(\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2)$ เช่น Dempster (1958) Bai and Saranadasa (1996) และ Muni S. Srivastava and Du (2008) เป็นต้น โดยการพัฒนาตัวสถิติทดสอบของ Dempster (1958) และของ Bai and Saranadasa (1996) ได้ใช้ค่าผลรวมสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุม (Diagonal) ของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่างรวม หรือค่ารอย (Trace) ของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่างรวม เป็นค่าประมาณของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม

ตัวอย่างรวม ส่วนตัวสถิติทดสอบของ Muni S. Srivastava and Du (2008) ได้ใช้สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุม (Diagonal) ของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่าง มาสร้างเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonal Matrix) ประกอบกับการใช้ค่ารอย (Trace) จากเมทริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวอย่างในตัวสถิติทดสอบ โดยแนวความคิดในการพัฒนาตัวสถิติทดสอบของทั้ง 3 ตัวสถิติทดสอบล้วนมีจุดประสงค์เพื่อแก้ไขปัญหาเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่างรวมไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้ แต่ในทางกลับกันการแก้ไขปัญหาดังกล่าวทำให้ค่าความแปรปรวนร่วม (Covariance) ระหว่างตัวแปรสุ่มที่อยู่นอกเส้นทแยงมุม (Off Diagonal) ของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่างรวม ไม่ถูกนำมาใช้ในตัวสถิติทดสอบ ซึ่งเป็นการทิ้งข้อมูลหรือสารสนเทศ (Information) ส่วนอื่น ๆ ในเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่างรวมไปทั้งสิ้น

ต่อมา Jiamwattanapong and Chongcharoen (2017) ได้เสนอตัวสถิติทดสอบโดยใช้แนวความคิดการเก็บรักษาข้อมูล (Keep More Information) จากเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่างรวม โดยมีการใช้ค่าความแปรปรวนร่วมระหว่างตัวแปรสุ่มที่อยู่นอกเส้นทแยงมุม (Off Diagonal) ของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่างรวมมาใช้ในตัวสถิติทดสอบด้วย ซึ่งเป็นการพยายามใช้ข้อมูลหรือสารสนเทศ (Information) ส่วนอื่น ๆ ของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่างรวมให้มากกว่าตัวสถิติทดสอบของ Dempster (1958), Bai and Saranadasa (1996), และ Muni S. Srivastava and Du (2008)

ส่วนในกรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน $\left(\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2\right)$ ได้มีกลุ่มนักสถิติหรือนักวิจัยพัฒนาตัวสถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากรเมื่อข้อมูลมีมิติสูง เช่น Bai and Saranadasa (1996) Chen and Qin (2010) และ Muni S. Srivastava, Katayama, and Kano (2013) เป็นต้น โดยการพัฒนาตัวสถิติทดสอบของ Bai and Saranadasa (1996) และ Chen and Qin (2010) ใช้ค่าผลรวมสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุม (Diagonal) ของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่างหรือค่ารอยของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่างของแต่ละประชากรในตัวสถิติทดสอบ ส่วนของ Muni S. Srivastava et al. (2013) ใช้สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่างของแต่ละประชากร มาสร้างเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonal Matrix) ประกอบกับการใช้ค่ารอยจากเมทริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวอย่าง (Sample Correlation Matrix) ในตัวสถิติทดสอบ โดยแนวความคิดในการพัฒนาตัวสถิติทดสอบของทั้ง 3 ตัวสถิติทดสอบล้วนมีจุดประสงค์เพื่อแก้ไขปัญหาเมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่างระหว่าง 2 ประชากรไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้ แต่ในทางกลับกันการแก้ไขปัญหาดังกล่าวทำให้ค่าความแปรปรวนร่วมระหว่างตัวแปรสุ่มที่อยู่นอกเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่างของแต่ละประชากรไม่ถูกนำมาใช้ในตัวสถิติทดสอบ ซึ่งเป็นการทิ้งข้อมูลหรือสารสนเทศส่วนอื่น ๆ ในเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่างไปทั้งสิ้น เหมือนกับในกรณี $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2$

ดังนั้นในการศึกษาครั้งนี้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะพัฒนาและนำเสนอตัวสถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปรกติ p ตัวแปร ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu}_i$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\boldsymbol{\Sigma}_i$ ขนาด n_i, $i=1,2$ และตัวอย่างสุ่มจากทั้ง 2 ประชากรเป็นอิสระกัน เมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน $\left(\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2\right)$ สำหรับข้อมูลมีมิติสูง โดยใช้แนวความคิดการเก็บรักษาข้อมูลจากเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่างรวมของ Jiamwattanapong and Chongcharoen (2017)

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1) เพื่อพัฒนาและนำเสนอสถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปรกติ p ตัวแปร ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu}_i$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\boldsymbol{\Sigma}_i$ ขนาด n_i , $i=1,2$ และตัวอย่างสุ่มจากทั้ง 2 ประชากรเป็นอิสระกัน เมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน $\left(\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2\right)$ และไม่ทราบค่าสำหรับข้อมูลมีมิติสูง (High–Dimensional Data) โดยใช้แนวความคิดการเก็บรักษาข้อมูลจากเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ให้มากที่สุด

2) เพื่อนำตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอไปใช้กับข้อมูลจริง

1.3 ขอบเขตการวิจัย

1) ข้อมูลที่ใช้ในการจำลองข้อมูล (Simulation) เป็นข้อมูลที่สุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงปรกติ p ตัวแปร เมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน $\left(\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2\right)$ และไม่ทราบค่า

2) ข้อมูลที่สุ่มจาก 2 ประชากร เป็นอิสระกัน

3) ข้อมูลมีมิติสูงคือสถานการณ์ที่จำนวนตัวแปรสุ่มมากกว่าผลรวมของขนาดตัวอย่างลบด้วยสอง นั่นก็คือสถานการณ์ที่ $p > n_1 + n_2 - 2$

4) กำหนดระดับนัยสำคัญที่ระดับ 0.05

5) ใช้โปรแกรมอาร์ (R) ในการจำลองข้อมูล (Simulation)

1.4 นิยามคำจำกัดความ

1) ระดับนัยสำคัญที่ได้รับ (Attained Significance Level: ASL) หมายถึง ค่าประมาณความน่าจะเป็นของความผิดพลาดที่เกิดจากการปฏิเสธสมมุติฐานว่าง เมื่อสมมุติฐานว่างเป็นจริง เขียนแทนด้วย $\hat{\alpha}$ โดยที่

$$\hat{\alpha} = \frac{\text{จำนวนครั้งที่ปฏิเสธสมมุติฐานว่าง เมื่อปฏิเสธสมมุติฐานว่างเป็นจริง}}{\text{จำนวนรอบที่ทำซ้ำ}} \quad (1.1)$$

2) กำลังการทดสอบที่ได้รับ (Attained Power) หมายถึง ค่าประมาณความน่าจะเป็นของการปฏิเสธสมมุติฐานว่าง เมื่อสมมุติฐานว่างไม่เป็นจริง เขียนแทนด้วย $1-\beta$ โดยที่

$$1-\beta = \frac{\text{จำนวนครั้งที่ปฏิเสธสมมุติฐานว่าง เมื่อปฏิเสธสมมุติฐานว่างไม่เป็นจริง}}{\text{จำนวนรอบที่ทำซ้ำ}} \quad (1.2)$$

3) ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (The Average Absolute Discrepancy: AAD) หมายถึง ค่าเฉลี่ยของผลรวมของความแตกต่างสัมบูรณ์ระหว่างระดับนัยสำคัญที่ได้รับและระดับนัยสำคัญที่กำหนด (α) โดยที่

$$AAD = \frac{\sum|\hat{\alpha}-\alpha|}{\text{จำนวนสถานการณ์}} \quad (1.3)$$

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

1) สามารถเป็นแนวทางในการเลือกใช้สถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปรกติ p ตัวแปร และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน $(\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2)$ และไม่ทราบค่า สำหรับข้อมูลมีมิติสูงได้ในอนาคต

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ถ้า $\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \ldots, \mathbf{x}_{1n_1}$ เป็นเวกเตอร์สุ่มที่เป็นอิสระกันขนาด n_1 จากประชากรที่มีการแจกแจงปรกติ p ตัวแปร ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu}_1$ ขนาด $p \times 1$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\boldsymbol{\Sigma}_1$ ขนาด $p \times p$ หรือ $\boldsymbol{N}_p(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$ และ $\mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{22}, \ldots, \mathbf{x}_{2n_2}$ เป็นเวกเตอร์สุ่มที่เป็นอิสระกันขนาด n_2 จากประชากรที่มีการแจกแจงปรกติ p ตัวแปร ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu}_2$ ขนาด $p \times 1$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\boldsymbol{\Sigma}_2$ ขนาด $p \times p$ หรือ $\boldsymbol{N}_p(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$ โดยที่ตัวอย่างสุ่มจากทั้ง 2 ประชากรเป็นอิสระกัน

สำหรับการทดสอบสมมุติฐานเชิงสถิติความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร สมมุติฐานที่ต้องการทดสอบคือ

$$H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 \quad \text{เทียบกับ} \quad H_1 : \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2 \tag{2.1}$$

ในกรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน $(\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2)$ และไม่ทราบค่า หรือเรียกว่าปัญหาเบห์เรนส์–ฟิชเชอร์ (Behrens–Fisher problem) ตัวสถิติทดสอบจะแบ่งตามลักษณะความสัมพันธ์ระหว่างขนาดตัวอย่างและจำนวนตัวแปรสุ่ม คือ $n_i \geq p$ และ $n_i < p$, $i = 1, 2$ ดังนี้

2.1 สถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อ $n_i \geq p$

เมื่อตัวอย่างสุ่มแต่ละกลุ่มมีขนาดมากกว่าหรือเท่ากับจำนวนตัวแปรสุ่มกล่าวคือ $n_i \geq p$, $i = 1, 2$ และเมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของทั้งสองประชากรไม่เท่ากัน $(\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2)$ ตัวสถิติทดสอบภายใต้สมมุติฐานหลักคือ (Richard & Dean, 2014)

$$T^2 \quad = \quad (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2)' \left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1} + \frac{\mathbf{S}_2}{n_2} \right)^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \tag{2.2}$$

เมื่อ $\bar{\mathbf{x}}_i$ คือ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยตัวอย่างของตัวอย่างสุ่มที่ i ขนาด $p\times 1$

คำนวณได้โดย $\bar{\mathbf{x}}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\mathbf{x}_{ij}$, $i=1,2$ (2.3)

$\mathbf{S}_i$ คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่างของตัวอย่างสุ่มที่ i ขนาด $p\times p$

คำนวณได้โดย $\mathbf{S}_i = \frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\mathbf{x}_{ij}-\bar{\mathbf{x}}_i\right)\left(\mathbf{x}_{ij}-\bar{\mathbf{x}}_i\right)'$, $i=1,2$ (2.4)

สำหรับการแจกแจงแม่นตรง (Exact Distribution) ของตัวสถิติทดสอบ T^2 นั้น D. d. Nel, van der Merwe, and Moser (1990) ได้นำเสนอการแจกแจงแม่นตรงของตัวสถิติทดสอบ T^2 ซึ่งการแจกแจงแม่นตรงดังกล่าวมีความซับซ้อนสำหรับการคำนวณและมีข้อกำจัดในทางปฏิบัติอย่างมาก (Kawasaki & Seo, 2015; Krishnamoorthy & Yu, 2004; D. d. Nel et al., 1990; Yanagihara & Yuan, 2005)

ต่อมาได้มีกลุ่มนักสถิติพยายามหาการแจกแจงโดยประมาณ (Approximate Distribution) ของตัวสถิติทดสอบ T^2 เพื่อความสะดวกในการคำนวณและสามารถนำไปใช้งานได้อย่างง่ายดาย เช่น สามารถประมาณการแจกแจงของตัวสถิติทดสอบ T^2 ด้วยการแจกแจงไคกำลังสอง (chi–squared Distribution) ด้วยองศาเสรี p ซึ่ง M. S. Srivastava (2002) ระบุว่าการแจกแจงโดยประมาณดังกล่าวจะมีความเหมาะสมก็ต่อเมื่อขนาดตัวอย่าง n_1 และ n_2 มีขนาดใหญ่ นั่นคือ $\min(n_1,n_2)\to\infty$ ซึ่งบางครั้งด้วยข้อจำกัดบางประการพบว่าขนาดตัวอย่างมีขนาดไม่ใหญ่มาก

ต่อมาได้มีกลุ่มนักสถิติหาการแจกแจงโดยประมาณของตัวสถิติทดสอบ T^2 โดยไม่มีข้อจำกัดเกี่ยวกับขนาดตัวอย่าง เช่น James (1954) ได้นำเสนอองศาที่สองโดยประมาณ (Second–Order Approximation) สำหรับคำนวณค่าวิกฤต (Critical Value) เพื่อทดสอบสมมุติฐานด้วยสถิติทดสอบ T^2 ต่อมา D. G. Nel and Van Der Merwe (1986) ได้นำเสนอการแจกแจงโดยประมาณด้วยการแจกแจงเอฟที่ไม่มีคุณสมบัติการทดสอบไม่แปรเปลี่ยน (Not Invariant Test) ต่อมา Y. Yao (1965), Johansen (1980), และ Yanagihara and Yuan (2005) ได้นำเสนอการแจกแจงโดยประมาณด้วยการแจกแจงเอฟ (F – Distribution) ที่มีคุณสมบัติไม่แปรเปลี่ยน (Invariant Test) ต่อมา Kim (1992) ได้นำเสนอการแจกแจงโดยประมาณซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับตัวสถิติทดสอบ T^2 โดยอาศัยรูปทรงรี (Ellipsoids) จากแต่ละตัวอย่าง ต่อมา Krishnamoorthy and Yu (2004) ได้นำเสนอการแจกแจงโดยประมาณซึ่งปรับปรุง (Modified) จากการแจกแจงโดยประมาณของ D. G. Nel and Van Der Merwe (1986) ให้มีคุณสมบัติการทดสอบไม่แปรเปลี่ยน และต่อมา Kawasaki and Seo (2015) ได้นำเสนอการแจกแจงโดยประมาณซึ่งปรับปรุงข้อด้อยจากการแจกแจงโดยประมาณของ Yanagihara and Yuan (2005)

จากการศึกษาของ Krishnamoorthy and Yu (2004) ระบุว่าการแจกแจงโดยประมาณที่นำเสนอมีประสิทธิภาพสูงกว่าการแจกแจงโดยประมาณของ Y. Yao (1965), Johansen (1980) และ D. G. Nel and Van Der Merwe (1986) ในขณะเดียวกันก็สามารถควบคุมระดับนัยสำคัญที่ได้รับให้ใกล้เคียงระดับนัยสำคัญที่กำหนดได้อย่างน่าพอใจ (Krishnamoorthy & Xia, 2006; Park & Sinha, 2009) และจากการศึกษาของ Yanagihara and Yuan (2005) ระบุว่าการแจกแจงโดยประมาณที่นำเสนอมีประสิทธิภาพสูง (Outperforms) กว่าการแจกแจงโดยประมาณของ James (1954), Y. Yao (1965), Johansen (1980), และ Krishnamoorthy and Yu (2004) และจากการศึกษาดังกล่าวพบว่าการแจกแจงโดยประมาณของ Yanagihara and Yuan (2005) และ Krishnamoorthy and Yu (2004) มีระดับนัยสำคัญที่ได้รับใกล้เคียงกับระดับนัยสำคัญที่กำหนดมากที่สุด แต่จากการศึกษาของ Kawasaki and Seo (2015) ระบุว่าการแจกแจงโดยประมาณของ Yanagihara and Yuan (2005) ไม่มีความเหมาะสมเมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของทั้งสองประชากรมีความแตกต่างกันอย่างมาก ดังนั้นจากการทบทวนวรรณกรรมพบว่าการแจกแจงโดยประมาณของตัวสถิติทดสอบ T^2 ที่เหมาะสมที่สุดคือการแจกแจงโดยประมาณของ Krishnamoorthy and Yu (2004)

โดย Krishnamoorthy and Yu (2004) ได้ประมาณการแจกแจงของสถิติทดสอบ T^2 ด้วยการแจกแจงเอฟ ดังนี้

$$T^2 \overset{a}{\sim} \frac{\nu p}{\nu - p + 1} F_{p,\nu-p+1} \tag{2.5}$$

เมื่อ

$$\nu = \frac{p + p^2}{\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{n_i - 1} \left\{ \mathrm{tr}\left[\left(\frac{\mathbf{S}_i}{n_i} \left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1} + \frac{\mathbf{S}_2}{n_2} \right)^{-1} \right)^2 \right] + \left(\mathrm{tr}\left[\frac{\mathbf{S}_i}{n_i} \left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1} + \frac{\mathbf{S}_2}{n_2} \right)^{-1} \right] \right)^2 \right\}} \tag{2.6}$$

$$= \frac{p + p^2}{\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{n_i - 1} \left\{ \mathrm{tr}\left[\left(\tilde{\mathbf{S}}_i \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \right)^2 \right] + \left[\mathrm{tr}\left(\tilde{\mathbf{S}}_i \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \right)^2 \right]^2 \right\}}$$

โดยที่

$$\tilde{\mathbf{S}} = \frac{\mathbf{S}_1}{n_1} + \frac{\mathbf{S}_2}{n_2} \tag{2.7}$$

และ

$$\tilde{\mathbf{S}}_i = \frac{\mathbf{S}_i}{n_i}, \; i = 1, 2 \tag{2.8}$$

โดยจะปฏิเสธสมมติฐานว่าง ที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า

$$T^2 \geq \frac{\nu p}{\nu - p + 1} F_{\alpha;p,\nu-p+1} \tag{2.9}$$

โดยถ้าในกรณีตัวแปรสุ่มตัวเดียว (Univariate) หรือ $p=1$ ตัวสถิติทดสอบ T^2 และองศาเสรี ν จะลดรูปเป็นตัวสถิติทดสอบและองศาเสรีในการทดสอบเบห์เรนส์–ฟิชเชอร์ (Behrens–Fisher test) ซึ่งเป็นการทดสอบสมมุติฐานเชิงสถิติว่าค่าเฉลี่ยของประชากร 2 ประชากรที่เป็นอิสระกันและมีการแจกแจงปรกติมีค่าเท่ากันหรือไม่ เมื่อไม่ทราบความแปรปรวนของประชากรทั้งสองและความแปรปรวนของประชากรทั้งสองมีค่าไม่เท่ากัน นอกจากนั้น Krishnamoorthy and Yu (2004) ได้แสดงว่าองศาเสรี ν จะมีค่าอยู่ในช่วง

$$\min\left(n_1-1,n_2-1\right)\le \nu \le n_1+n_2-2 \tag{2.10}$$

และ Krishnamoorthy and Yu (2004) ได้ระบุว่าระดับนัยสำคัญที่ได้รับของการแจกแจงโดยประมาณที่นำเสนอจะเข้าใกล้ระดับนัยสำคัญที่กำหนดอย่างมาก (Very Close) เมื่อ $n_1-1\ge 5p$ และ $n_2-1\ge 5p$ ในกรณีขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน $\left(n_1\ne n_2\right)$ แต่ถ้าหากขนาดตัวอย่างเท่ากัน $\left(n_1=n_2=n\right)$ เงื่อนไขดังกล่าวจะเปลี่ยนเป็น $n\ge 4p$ จากเงื่อนไขดังกล่าวสามารถสรุปได้ว่าการแจกแจงโดยประมาณของตัวสถิติทดสอบ T^2 ที่นำเสนอโดย Krishnamoorthy and Yu (2004) จะมีความเหมาะสมในกรณีที่ขนาดตัวอย่างและจำนวนตัวแปรสุ่มมีรูปแบบความสัมพันธ์ดังนี้

$$p \le \frac{n}{4} \quad \text{เมื่อ} \quad n_1=n_2=n \tag{2.11}$$

และ

$$p \le \frac{\min\left(n_1-1,n_2-1\right)}{5} \quad \text{เมื่อ} \quad n_1\ne n_2 \tag{2.12}$$

2.2 สถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อ $n_i < p$

เมื่อข้อมูลมีมิติสูง (High–Dimensional Data) คือเมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดน้อยกว่าจำนวนตัวแปรหรือ $n_i<p$, $i=1,2$ ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นคือเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่าง $\mathbf{S}_i$ ไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix) $\mathbf{S}_i^{-1}$, $i=1,2$ ได้ และเมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดน้อยกว่าจำนวนตัวแปรในลักษณะ $n_1+n_2-2<p$ จะพบว่าเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผัน $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$ ได้ ผลกระทบที่สำคัญเมื่อเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผัน $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$ ได้ก็คือจะทำให้ไม่สามารถคำนวณค่าสถิติทดสอบ T^2 ได้ด้วย และท้ายที่สุดก็จะทำให้ไม่สามารถทดสอบสมมุติฐานเชิงสถิติได้

ในปัจจุบันได้มีกลุ่มนักสถิติพยายามนำเสนอตัวสถิติทดสอบสำหรับทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อข้อมูลตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงปรกติ p ตัวแปร และข้อมูลมีมิติสูง ในกรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของทั้งสองประชากรไม่เท่ากัน $\left(\mathbf{\Sigma}_1\ne\mathbf{\Sigma}_2\right)$ เช่น Bai and Saranadasa (1996) ได้เสนอตัวสถิติทดสอบ T_{BS} คือ

$$T_{BS} = \frac{Q_n}{\hat{\sigma}_Q} \quad (2.13)$$

เมื่อ $$Q_n = \frac{(\bar{\mathbf{x}}_1-\bar{\mathbf{x}}_2)'(\bar{\mathbf{x}}_1-\bar{\mathbf{x}}_2)-\frac{\mathrm{tr}(\mathbf{S}_1)}{n_1}-\frac{\mathrm{tr}(\mathbf{S}_2)}{n_2}}{\sqrt{p}} \quad (2.14)$$

ซึ่งความแปรปรวนของ Q_n คือ σ_Q^2 ดังนี้

$$\sigma_Q^2 = \frac{2}{pn_1^2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_1^2\right)+\frac{2}{pn_2^2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_2^2\right)+\frac{4}{pn_1n_2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_1\boldsymbol{\Sigma}_2\right) \quad (2.15)$$

ต่อมา Muni S. Srivastava (2009) ได้เสนอตัวประมาณค่าของ σ_Q^2 คือ $\hat{\sigma}_Q^2$ ดังนี้

$$\hat{\sigma}_Q^2 = \frac{2}{n_1^2}\hat{a}_{21}+\frac{2}{n_2^2}\hat{a}_{22}+\frac{4}{pn_1n_2}\mathrm{tr}\left(\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\right) \quad (2.16)$$

โดย $$\hat{a}_{2i} = \frac{(n_i-1)^2}{pn_i(n_i-2)}\left\{\mathrm{tr}\left(\mathbf{S}_i^2\right)-\frac{\left[\mathrm{tr}\left(\mathbf{S}_i\right)\right]^2}{n_i-1}\right\},\ i=1,2 \quad (2.17)$$

ซึ่ง Muni S. Srivastava (2009) ได้แสดงว่าภายใต้ข้อกำหนดเบื้องต้น (Assumption) เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงปรกติแล้วตัวประมาณ $\hat{a}_{2i}$ เป็นตัวประมาณดีที่สุด (Best Estimator) ของ $\mathrm{tr}\left(\frac{\boldsymbol{\Sigma}_i^2}{p}\right)$

โดยจะปฏิเสธสมมุติฐานว่างที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า

$$T_{BS} \geq Z_{1-\alpha}$$

ต่อมา Chen and Qin (2010) ได้เสนอสถิติทดสอบ T_{CQ} คือ

$$T_{CQ} = \frac{Q_n}{\tilde{\sigma}_Q} \quad (2.18)$$

เมื่อ $$\tilde{\sigma}_Q^2 = \frac{1}{p}\left[\frac{2}{n_1(n_1-1)}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_1^2\right)+\frac{2}{n_2(n_2-1)}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_2^2\right)+\frac{4}{n_1n_2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_1\boldsymbol{\Sigma}_2\right)\right] \quad (2.19)$$

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_i^2\right) = \frac{1}{n_i(n_i-1)}\mathrm{tr}\left\{\sum_{j\neq k}^{n_i}\left(\mathbf{x}_{ij}-\bar{\mathbf{x}}_{i(j,k)}\right)\mathbf{x}_{ij}'\left(\mathbf{x}_{ik}-\bar{\mathbf{x}}_{i(j,k)}\right)\mathbf{x}_{ik}'\right\},\ i=1,2 \quad (2.20)$$

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_1\boldsymbol{\Sigma}_2\right) = \frac{1}{n_1n_2}\mathrm{tr}\left\{\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{n_2}\left(\mathbf{x}_{1j}-\bar{\mathbf{x}}_{1(j)}\right)\mathbf{x}_{1j}'\left(\mathbf{x}_{2k}-\bar{\mathbf{x}}_{2(k)}\right)\mathbf{x}_{2k}'\right\} \quad (2.21)$$

โดย $\bar{\mathbf{x}}_{i(j,k)}$ คือ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยตัวอย่างที่ i เมื่อตัด $\mathbf{x}_{ij}$ และ $\mathbf{x}_{ik}$ ออกไป คำนวณได้โดย

$$\bar{\mathbf{x}}_{i(j,k)} = \frac{1}{n_i-2}\left(n_i\bar{\mathbf{x}}_i-\mathbf{x}_{ij}-\mathbf{x}_{ik}\right),\ i=1,2;\ j,k=1,2,\ldots,n_i \quad (2.22)$$

$\bar{\mathbf{x}}_{i(k)}$ คือ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยตัวอย่างที่ i เมื่อตัด $\mathbf{x}_{ik}$ ออกไป คำนวณได้โดย

$$\bar{\mathbf{x}}_{i(k)} = \frac{1}{n_i - 1}\left(n_i \bar{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_{ik}\right), i = 1,2; k = 1,2,\ldots,n_i \tag{2.23}$$

โดยจะปฏิเสธสมมุติฐานว่างที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า

$$T_{CQ} \quad \geq \quad Z_{1-\alpha}$$

โดย Muni S. Srivastava et al. (2013) ระบุว่าตัวสถิติทดสอบ T_{CQ} ของ Chen and Qin (2010) มีคุณสมบัติไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การแปลงเชิงตั้งฉาก (Invariant Under Orthogonal Transformation) นั่นคือ $\mathbf{X} \to c\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{X}$ เมื่อ $\mathbf{X} = \left[\mathbf{x}_{i1} \quad \mathbf{x}_{i2} \quad \cdots \quad \mathbf{x}_{in_i}\right], i = 1,2$ เมื่อ $c > 0$ และ $\boldsymbol{\Gamma}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $p \times p$ โดยที่ $\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma}' = \mathbf{I}$ และ Muni S. Srivastava et al. (2013) ระบุว่าตัวสถิติทดสอบ T_{BS} ของ Bai and Saranadasa (1996) และ T_{CQ} ของ Chen and Qin (2010) แตกต่างกันเพียงตัวประมาณค่าความแปรปรวนของพารามิเตอร์ σ_Q^2 เท่านั้น และเมื่อข้อมูลมีการแจกแจงปรกติควรเลือกใช้ตัวประมาณค่า σ_Q^2 ที่มีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณดีที่สุด (Best Estimator) คือเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนสม่ำเสมอต่ำที่สุด (Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator) ของ σ_Q^2 ซึ่งก็คือ $\hat{\sigma}_Q^2$ นั่นเอง ด้วยเหตุผลดังกล่าวนี้ Muni S. Srivastava et al. (2013) จึงให้ข้อสังเกตว่าสถิติทดสอบ T_{BS} อาจจะมีประสิทธิภาพ (Performance) ไม่ด้อยกว่าตัวสถิติทดสอบ T_{CQ} อีกทั้งตัวประมาณ $\tilde{\sigma}_Q^2$ จำเป็นต้องใช้การคำนวณที่ซับซ้อนและใช้เวลาคำนวณที่นานกว่าตัวประมาณ $\hat{\sigma}_Q^2$ และการแจกแจงของตัวสถิติทดสอบ T_{CQ} ที่ Chen and Qin (2010) นำเสนอนั้นมีลักษณะห่างไกลจากการแจกแจงปรกติ (Weaker conditions Than Normality)

และต่อมา Muni S. Srivastava et al. (2013) ได้เสนอสถิติทดสอบ T_{SKK} คือ

$$T_{SKK} \quad = \quad \frac{\left(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2\right)' \hat{\mathbf{D}}^{-1}\left(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2\right) - p}{\sqrt{pVar\left(\hat{q}_n\right)\left(1 + \dfrac{\mathrm{tr}\left(\mathbf{R}^2\right)}{p^{3/2}}\right)}} \tag{2.24}$$

เมื่อ $\hat{\mathbf{D}} \quad = \quad \dfrac{\hat{\mathbf{D}}_1}{n_1} + \dfrac{\hat{\mathbf{D}}_2}{n_2}$ (2.25)

$$\hat{\mathbf{D}}_i \quad = \quad \mathrm{diag}\left(s_{i11}, s_{i22}, \ldots, s_{ipp}\right), \ i = 1,2 \tag{2.26}$$

โดย s_{ikk} คือ สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุม (Diagonal Element) ของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่าง $\mathbf{S}_i$, $i = 1,2$

$$Var(\hat{q}_n) = \frac{2\mathrm{tr}\left(\mathbf{R}^2\right)}{p} - \frac{2\left[\mathrm{tr}\left(\hat{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{S}_1\right)\right]^2}{pn_1^2(n_1-1)} - \frac{2\left[\mathrm{tr}\left(\hat{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{S}_2\right)\right]^2}{pn_2^2(n_2-1)} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{R} = \hat{\mathbf{D}}^{-1/2}\left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_2}{n_2}\right)\hat{\mathbf{D}}^{-1/2} \quad (2.28)$$

โดยจะปฏิเสธสมมุติฐานว่างที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า

$$T_{SKK} \geq Z_{1-\alpha}$$

ตัวสถิติทดสอบ T_{SKK} ของ Muni S. Srivastava et al. (2013) มีคุณสมบัติไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การหน่วยของการวัด (Invariant Under Units of Measurements) หรือมีคุณสมบัติไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การแปลงสเกลาร์ (Invariant Under Scalar Transformation) นั่นคือ $\mathbf{X} \to \mathbf{DX}$ เมื่อ $\mathbf{X} = \left[\mathbf{x}_{i1} \quad \mathbf{x}_{i2} \quad \cdots \quad \mathbf{x}_{in_i}\right]$, $i = 1,2$ และ $\mathbf{D} = \mathrm{diag}\left(c_1, c_2, \ldots, c_p\right)$ โดย $c_j \neq 0$ ทุกค่าของ j , $j = 1,2,\ldots,p$ และ Muni S. Srivastava et al. (2013) ระบุว่าการแจกแจงเชิงเส้นกำกับ (Asymptoic Distribution) ของตัวสถิติทดสอบ T_{BS} ของ Bai and Saranadasa (1996) สามารถหาได้ในทำนองเดียวกับตัวสถิติทดสอบ T_{SKK}

เมื่อพิจารณาสถิติทดสอบ T_{BS} ของ Bai and Saranadasa (1996) และ T_{CQ} ของ Chen and Qin (2010) จะสังเกตเห็นว่า Bai and Saranadasa (1996) และ Chen and Qin (2010) พยายามหลีกเลี่ยงปัญหาเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผัน $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$ได้ โดยการพัฒนาตัวสถิติทดสอบให้ใช้ค่ารอย (Trace) ของเมทริกซ์ $\mathbf{S}_\mathrm{i}$ แทน โดยเมทริกซ์ $\mathbf{S}_\mathrm{i}$ของ Chen and Qin (2010) จะแทนด้วยเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Sigma}_i^2$ ซึ่งมีการคำนวณที่ซับซ้อนและใช้เวลานาน ส่วนความพยายามหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าวของ Muni S. Srivastava et al. (2013) สำหรับสถิติทดสอบ T_{SKK} ก็คือการใช้ค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม s_{ikk} ตามแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมตัวอย่าง $\mathbf{S}_i$, $i = 1,2$, $k = 1,2,\ldots,p$ มาสร้างเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonal Matrix) $\hat{\mathbf{D}}_i$ เพื่อที่ต้องการให้เมทริกซ์ $\hat{\mathbf{D}}$ สามารถหาเมทริกซ์ผกผัน $\hat{\mathbf{D}}^{-1}$ ได้ และใช้ค่ารอย (Trace) ของเมทริกซ์ $\mathbf{R}^2$ ประกอบกันในตัวสถิติทดสอบ T_{SKK}

การแก้ไขปัญหาเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผัน $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$ ได้ ด้วยวิธีดังกล่าวทำให้ค่าความแปรปรวนร่วมระหว่างตัวแปรสุ่มตัวที่ j และ k หรือ s_{ijk} ที่อยู่นอกเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\mathbf{S}_\mathrm{i}$, $i = 1,2$, $j \neq k$, $j,k = 1,2,\ldots,p$ ไม่ได้ถูกนำมาใช้ในการคำนวณค่าสถิติทดสอบ อย่างไรก็ตามการแก้ไขปัญหาดังกล่าวแม้จะทำให้เมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับความแปรปรวนหรือความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสุ่มสามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้ แต่ต่างก็เป็นการทิ้งข้อมูลหรือสารสนเทศส่วนอื่น ๆ ในเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ไปทั้งสิ้น

บทที่ 3

การดำเนินงานวิจัย

สำหรับบทที่ 3 การดำเนินงานวิจัย ได้นำเสนอขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย ในหัวข้อที่ 3.1 การพัฒนาตัวสถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน สำหรับข้อมูลมิติสูง ในหัวข้อที่ 3.2 เงื่อนไขสำหรับการเลือกบล็อกหรือเมทริกซ์ย่อย $\tilde{\mathbf{S}}_{kk}$ จากเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ในหัวข้อที่ 3.3 และการจำลองข้อมูล ในหัวข้อที่ 3.4

3.1 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

1) ศึกษาแนวความคิดในการแก้ไขปัญหาเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผัน $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$ ได้ ในสถานการณ์ข้อมูลมีมิติสูง

2) ศึกษาสถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปรกติ p ตัวแปร และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน $\left(\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2\right)$ สำหรับข้อมูลมีมิติสูง ที่นำเสนออยู่ตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน

3) พัฒนาตัวสถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปรกติ p ตัวแปร และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน $\left(\boldsymbol{\Sigma}_1 \neq \boldsymbol{\Sigma}_2\right)$ สำหรับข้อมูลมีมิติสูงที่จะนำเสนอ

4) จำลองข้อมูลด้วยโปรแกรมอาร์ (R) เพื่อคำนวณหาระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับของสถิติทดสอบที่นำเสนอภายใต้สถานการณ์ต่าง ๆ

5) เปรียบเทียบระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับจากการจำลองข้อมูลของสถิติทดสอบที่นำเสนอกับสถิติทดสอบของ Bai and Saranadasa (1996), Chen and Qin (2010) และ Muni S. Srivastava et al. (2013) ภายใต้สถานการณ์ต่าง ๆ

6) ประยุกต์ใช้ตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอและตัวสถิติทดสอบของ Bai and Saranadasa (1996), Chen and Qin (2010), และ Muni S. Srivastava et al. (2013) กับข้อมูลจริง

3.2 การพัฒนาตัวสถิติทดสอบ

ถ้า $\mathbf{x}_{11},\mathbf{x}_{12},\ldots,\mathbf{x}_{1n_1}$ เป็นเวกเตอร์สุ่มที่เป็นอิสระกันขนาด n_1 จากประชากรที่มีการแจกแจงปรกติ p ตัวแปร ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu}_1$ ขนาด $p\times 1$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\boldsymbol{\Sigma}_1$ ขนาด $p\times p$ หรือ $\boldsymbol{N}_p(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\Sigma}_1)$ และ $\mathbf{x}_{21},\mathbf{x}_{22},\ldots,\mathbf{x}_{2n_2}$ เป็นเวกเตอร์สุ่มที่เป็นอิสระกันขนาด n_2 จากประชากรที่มีการแจกแจงปรกติ p ตัวแปร ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu}_2$ ขนาด $p\times 1$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\boldsymbol{\Sigma}_2$ ขนาด $p\times p$ หรือ $\boldsymbol{N}_p(\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\Sigma}_2)$ โดยที่ตัวอย่างสุ่มจากทั้ง 2 ประชากรเป็นอิสระกัน

สำหรับการทดสอบสมมุติฐานเชิงสถิติความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร สมมุติฐานที่ต้องการทดสอบคือ

$$H_0:\boldsymbol{\mu}_1=\boldsymbol{\mu}_2 \quad \text{เทียบกับ} \quad H_1:\boldsymbol{\mu}_1\neq\boldsymbol{\mu}_2 \tag{3.1}$$

เมทริกซ์ $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ ขนาด $p\times p$ นิยามดังนี้

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}_1}{n_1}+\frac{\boldsymbol{\Sigma}_2}{n_2} \tag{3.2}$$

โดยเมทริกซ์ $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ สามารถแบ่งเป็นบล็อก (Block) หรือเมทริกซ์ย่อย (Submatrix) ได้ดังนี้

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{11} & \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{12} & \cdots & \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{1m} \\ \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{21} & \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{22} & \cdots & \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{m1} & \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{m2} & \cdots & \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{mm} \end{bmatrix}_{p\times p}$$

เมื่อ $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{kk}$ คือ บล็อกหรือเมทริกซ์ย่อยจากแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ ขนาด $q_k\times q_k$ โดยที่ $\sum_{k=1}^{m} q_k = p,\ i=1,2,\ k=1,2,\ldots,m$

เมทริกซ์สหสัมพันธ์ของประชากร (Population Correlation Matrix) นิยามดังนี้ (Muni S. Srivastava et al., 2013)

$$\boldsymbol{\Re} = \mathbf{D}^{-1/2}\left(\frac{\boldsymbol{\Sigma}_1}{n_1}+\frac{\boldsymbol{\Sigma}_2}{n_2}\right)\mathbf{D}^{-1/2} \tag{3.3}$$

เมื่อ $$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{D}_1}{n_1}+\frac{\mathbf{D}_2}{n_2} \tag{3.4}$$

และ $$\mathbf{D}_i = \operatorname{diag}\left(\sigma_{i11},\sigma_{i22},\ldots,\sigma_{ipp}\right) \tag{3.5}$$

โดย σ_{ijj} คือค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มตัวที่ j ของประชากรที่ i ที่เป็นสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Sigma}_i,\ i=1,2,\ j=1,2,\ldots,m$

โดยเมทริกซ์ $\mathfrak{R}$ สามารถแบ่งเป็นบล็อกหรือเมทริกซ์ย่อยได้ดังนี้

$$\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} \mathfrak{R}_{11} & \mathfrak{R}_{12} & \cdots & \mathfrak{R}_{1m} \\ \mathfrak{R}_{21} & \mathfrak{R}_{22} & \cdots & \mathfrak{R}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{R}_{m1} & \mathfrak{R}_{m2} & \cdots & \mathfrak{R}_{mm} \end{bmatrix}_{p\times p}$$

เมื่อ $\mathfrak{R}_{kk}$ คือ บล็อกหรือเมทริกซ์ย่อยจากแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\mathfrak{R}$

ขนาด $q_k \times q_k$ โดยที่ $\sum_{k=1}^{m} q_k = p,\ k = 1,2,\ldots,m$

เพื่อต้องการหาการแจกแจงเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic Distribution) ของตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอภายใต้สมมุติฐานว่าง จะกำหนดข้อกำหนดเบื้องต้น (Assumption) ดังนี้

$$p \to \infty, n_i < \infty,\ i = 1,2 \quad \text{และ} \quad \mathfrak{R}_{kl} \to \mathbf{0},\ \ k \neq l, k, l = 1,2,\ldots,m \tag{3.6}$$

กำหนดให้เมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}_{block}$ เป็นเมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อก นิยามดังนี้

$$\tilde{\mathbf{S}}_{block} = \operatorname{diag}\left(\tilde{\mathbf{S}}_{11}, \tilde{\mathbf{S}}_{22}, \ldots, \tilde{\mathbf{S}}_{mm}\right) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{S}}_{22} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \tilde{\mathbf{S}}_{mm} \end{bmatrix}_{p\times p} \tag{3.7}$$

เมื่อ $\tilde{\mathbf{S}}_{kk}$ คือ บล็อกหรือเมทริกซ์ย่อยจากแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ขนาด $q_k \times q_k$

โดยที่ $\sum_{k=1}^{m} q_k = p,\ k = 1,2,\ldots,m$

ในกรณีที่บล็อกหรือเมทริกซ์ย่อยจำนวน $m-1$ บล็อกแรกบนแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}_{block}$ หรือ $\tilde{\mathbf{S}}_{11}, \tilde{\mathbf{S}}_{22}, \ldots, \tilde{\mathbf{S}}_{(m-1)(m-1)}$ มีขนาดเท่ากัน นั่นคือ $q_1 = q_2 = \cdots = q_{m-1} = q$ จะได้ว่า $p = (m-1)q + q_m$ โดยเรียก q ว่า ขนาดของบล็อกร่วม (Common Block Size) ของเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}_{block}$ (Jiamwattanapong & Chongcharoen, 2017) โดยถ้าขนาดของแต่ละบล็อก หรือ q_k มีลักษณะ $q_k \leq n_1 + n_2 - 2$ จะทำให้เมทริกซ์ย่อย $\tilde{\mathbf{S}}_{kk}$ แต่ละเมทริกซ์ย่อยสามารถหาเมทริกซ์ผกผัน $\tilde{\mathbf{S}}_{kk}^{-1}$ ได้ , $k = 1,2,\ldots,m$ ดังนั้นแล้วผลที่ตามมาก็คือเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}_{block}$ ก็จะสามารถหาเมทริกซ์ผกผัน $\tilde{\mathbf{S}}_{block}^{-1}$ ได้ด้วยเช่นกัน โดยเมทริกซ์ผกผัน $\tilde{\mathbf{S}}_{block}^{-1}$ คือ

$$\tilde{\mathbf{S}}_{block}^{-1} = \operatorname{diag}\left(\tilde{\mathbf{S}}_{11}^{-1},\tilde{\mathbf{S}}_{22}^{-1},\ldots,\tilde{\mathbf{S}}_{mm}^{-1}\right) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{11}^{-1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{S}}_{22}^{-1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \tilde{\mathbf{S}}_{mm}^{-1} \end{bmatrix}_{p\times p} \quad (3.8)$$

กำหนดตัวสถิติ T_n นิยามดังนี้

$$T_n = \left(\bar{\mathbf{x}}_1-\bar{\mathbf{x}}_2\right)' \tilde{\mathbf{S}}_{block}^{-1}\left(\bar{\mathbf{x}}_1-\bar{\mathbf{x}}_2\right) \quad (3.9)$$

ทฤษฎีบทที่ 3.1 กำหนดให้ $\mathbf{x}_{i1},\mathbf{x}_{i2},\ldots,\mathbf{x}_{in_i}$ เป็นเวกเตอร์สุ่มที่เป็นอิสระกันขนาด n_i จากประชากรที่มีการแจกแจงปรกติ p ตัวแปร ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu}_i$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\boldsymbol{\Sigma}_i$, $i=1,2$ ถ้าให้กำหนดตัวสถิติทดสอบ T_n แล้วภายใต้ข้อกำหนดเบื้องต้น ค่าเฉลี่ย (Expectation) และความแปรปรวน (Variance) ของตัวสถิติทดสอบ T_n คือ

$$E\left(T_n\right) = \sum_{k=1}^{m}\frac{v_k q_k}{v_k-q_k-1}, \quad q_k < v_k-1 \quad (3.10)$$

$$Var\left(T_n\right) = \sum_{k=1}^{m}\frac{2q_k\left(v_k-1\right)v_k^2}{\left(v_k-q_k-1\right)^2\left(v_k-q_k-3\right)}, \quad q_k < v_k-3 \quad (3.11)$$

พิสูจน์

จากเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยตัวอย่างของตัวอย่างสุ่มที่ i , $i=1,2$ สามารถแบ่งส่วน (Partition) เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยและเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ให้สอดคล้องกับขนาดของบล็อกในเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}_{block}$ ได้ดังนี้

$$\bar{\mathbf{x}}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{i1} \\ \bar{\mathbf{x}}_{i2} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{x}}_{im} \end{bmatrix}_{p\times 1} \quad \text{และ} \quad \mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{i11} & \mathbf{S}_{i12} & \cdots & \mathbf{S}_{i1m} \\ \mathbf{S}_{i21} & \mathbf{S}_{i22} & \cdots & \mathbf{S}_{i2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{S}_{im1} & \mathbf{S}_{im2} & \cdots & \mathbf{S}_{imm} \end{bmatrix}_{p\times p}$$

เมื่อ $\bar{\mathbf{x}}_{ik}$ คือ เวกเตอร์ย่อยจากเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย ขนาด $q_k\times 1$

$\mathbf{S}_{ikk}$ คือ เมทริกซ์ย่อยจากแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\mathbf{S}_i$ ขนาด $q_k\times q_k$

สามารถกระจายตัวสถิติทดสอบ T_n ได้เป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
T_n &= \left(\bar{\mathbf{x}}_1-\bar{\mathbf{x}}_2\right)' \tilde{\mathbf{S}}_{block}^{-1}\left(\bar{\mathbf{x}}_1-\bar{\mathbf{x}}_2\right) \\
&= \underset{1\times p}{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{11}-\bar{\mathbf{x}}_{21} \\ \bar{\mathbf{x}}_{12}-\bar{\mathbf{x}}_{22} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{x}}_{1m}-\bar{\mathbf{x}}_{2m} \end{bmatrix}'} \underset{p\times p}{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{11}^{-1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{S}}_{22}^{-1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \tilde{\mathbf{S}}_{mm}^{-1} \end{bmatrix}} \underset{p\times 1}{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{11}-\bar{\mathbf{x}}_{21} \\ \bar{\mathbf{x}}_{12}-\bar{\mathbf{x}}_{22} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{x}}_{1m}-\bar{\mathbf{x}}_{2m} \end{bmatrix}} \\
&= \left(\bar{\mathbf{x}}_{11}-\bar{\mathbf{x}}_{21}\right)' \tilde{\mathbf{S}}_{11}^{-1}\left(\bar{\mathbf{x}}_{11}-\bar{\mathbf{x}}_{21}\right)+\cdots+\left(\bar{\mathbf{x}}_{1m}-\bar{\mathbf{x}}_{2m}\right)' \tilde{\mathbf{S}}_{mm}^{-1}\left(\bar{\mathbf{x}}_{1m}-\bar{\mathbf{x}}_{2m}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m}\left(\bar{\mathbf{x}}_{1k}-\bar{\mathbf{x}}_{2k}\right)' \tilde{\mathbf{S}}_{kk}^{-1}\left(\bar{\mathbf{x}}_{1k}-\bar{\mathbf{x}}_{2k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} y_k \qquad \text{เมื่อ } y_k=\left(\bar{\mathbf{x}}_{1k}-\bar{\mathbf{x}}_{2k}\right)' \tilde{\mathbf{S}}_{kk}^{-1}\left(\bar{\mathbf{x}}_{1k}-\bar{\mathbf{x}}_{2k}\right) \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

ซึ่ง $y_k,\ k=1,2,\ldots,m$ จะสมนัย (Correspond) กับตัวสถิติทดสอบ T^2 ดังนั้น y_k จะมีการแจกแจงเอฟโดยประมาณ (Krishnamoorthy & Jianqi 2004) ดังนี้

$$
y_k \overset{a}{\sim} \frac{\nu_k q_k}{\nu_k-q_k+1} F_{q_k,\nu_k-q_k+1} \qquad (3.13)
$$

เมื่อ q_k คือ ขนาดของเวกเตอร์ย่อย $\bar{\mathbf{x}}_{ik}$ หรือขนาดของเมทริกซ์ย่อย $\tilde{\mathbf{S}}_{kk}$, $i=1,2,\ k=1,2,\ldots,m$

ν_k คือ องศาเสรีของ Krishnamoorthy and Yu (2004) โดยคำนวณจากสมการที่ (2.6) ภายใต้ข้อมูลที่สอดคล้องกับของเวกเตอร์ย่อย $\bar{\mathbf{x}}_{ik}$ หรือเมทริกซ์ย่อย $\tilde{\mathbf{S}}_{kk},\ i=1,2,\ k=1,2,\ldots,m$

นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
\nu_k &= \frac{q_k+q_k^2}{\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{n_i-1}\left\{\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\mathbf{S}_{ikk}}{n_i}\left(\frac{\mathbf{S}_{1kk}}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_{2kk}}{n_2}\right)^{-1}\right)^2\right]+\left(\mathrm{tr}\left[\frac{\mathbf{S}_{ikk}}{n_i}\left(\frac{\mathbf{S}_{1kk}}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_{2kk}}{n_2}\right)^{-1}\right]\right)^2\right\}} \qquad (3.14) \\
&= \frac{q_k+q_k^2}{\frac{\mathrm{tr}\left[\left(\mathbf{S}_{1kk}\tilde{\mathbf{S}}_{kk}^{-1}\right)^2\right]+\left[\mathrm{tr}\left(\mathbf{S}_{1kk}\tilde{\mathbf{S}}_{kk}^{-1}\right)\right]^2}{n_1^2\left(n_1-1\right)}+\frac{\mathrm{tr}\left[\left(\mathbf{S}_{2kk}\tilde{\mathbf{S}}_{kk}^{-1}\right)^2\right]+\left[\mathrm{tr}\left(\mathbf{S}_{2kk}\tilde{\mathbf{S}}_{kk}^{-1}\right)\right]^2}{n_2^2\left(n_2-1\right)}} \\
&= \frac{q_k+q_k^2}{\sum_{i=1}^{2}\frac{\mathrm{tr}\left[\left(\mathbf{S}_{ikk}\tilde{\mathbf{S}}_{kk}^{-1}\right)^2\right]+\left[\mathrm{tr}\left(\mathbf{S}_{ikk}\tilde{\mathbf{S}}_{kk}^{-1}\right)\right]^2}{n_i^2\left(n_i-1\right)}}
\end{aligned}
$$

จากทฤษฎีที่ 1 การแจกแจงเอฟ (F – Distribution) ในภาคผนวก ก จะได้ว่าค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม y_k คือ

$$\begin{aligned}
E(y_k) &= E\left[\frac{v_k q_k}{v_k - q_k + 1} F_{q_k, v_k - q_k + 1} \middle| v_k\right] \\
&= \frac{v_k q_k}{v_k - q_k + 1} E\left(F_{q_k, v_k - q_k + 1}\right) \\
&= \frac{v_k q_k}{v_k - q_k + 1}\left(\frac{v_k - q_k + 1}{v_k - q_k - 1}\right) \\
&= \frac{v_k q_k}{v_k - q_k - 1}, \qquad v_k - q_k + 1 > 2 \\
Var(y_k) &= Var\left[\frac{v_k q_k}{v_k - q_k + 1} F_{q_k, v_k - q_k + 1} \middle| v_k\right] \\
&= \left(\frac{v_k q_k}{v_k - q_k + 1}\right)^2 Var\left(F_{q_k, v_k - q_k + 1}\right) \\
&= \left(\frac{v_k q_k}{v_k - q_k + 1}\right)^2 \left[\frac{2(v_k - q_k + 1)^2 (v_k - 1)}{q_k (v_k - q_k - 1)^2 (v_k - q_k - 3)}\right] \\
&= \frac{2 q_k v_k^2 (v_k - 1)}{(v_k - q_k - 1)^2 (v_k - q_k - 3)}, \qquad v_k - q_k + 1 > 4
\end{aligned}$$

ดังนั้นค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวสถิติ T_n สามารถหาได้โดย

$$\begin{aligned}
E(T_n) &= E\left(\sum_{k=1}^{m} y_k\right) = \sum_{k=1}^{m} E(y_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{v_k q_k}{v_k - q_k - 1}, \qquad q_k < v_k - 1 \\
Var(T_n) &= Var\left(\sum_{k=1}^{m} y_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} Var(y_k) + \sum_{k \neq l}^{m} Cov(y_k, y_l)
\end{aligned}$$

ภายใต้ข้อกำหนดเบื้องต้นจะทำให้ได้ว่า y_k และ y_l เป็นอิสระกัน, $k \neq l,\ k, l = 1, 2, \ldots, m$ นั่นคือ $Cov(y_k, y_l) = 0$ ทุกค่าของ k และ l โดยที่ $k \neq l,\ k, l = 1, 2, \ldots, m$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
Var(T_n) &= \sum_{k=1}^{m} Var(y_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{2 q_k v_k^2 (v_k - 1)}{(v_k - q_k - 1)^2 (v_k - q_k - 3)}, \qquad q_k < v_k - 3
\end{aligned}$$

■

สำหรับเงื่อนไขในการเลือกบล็อกหรือเมทริกซ์ย่อย (Submatrix) จากเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ขนาด $p\times p$ เป็นเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}_{kk}$ ขนาด $q_k\times q_k$ จำนวน m บล็อกนั้น ถ้า $q_k \le n_1+n_2-2$ ทุกค่าของ k , $k=1,2,\ldots,m$ จะพบว่าเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}_{kk}$ จะสามารถหาเมทริกซ์ผกผัน $\tilde{\mathbf{S}}_{kk}^{-1}$ ได้ ซึ่งทำให้เมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}_{block}$ สามารถหาเมทริกซ์ผกผัน $\tilde{\mathbf{S}}_{block}^{-1}$ ได้ และจากทฤษฎีบทที่ 3.1 เพื่อต้องการให้ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวสถิติ T_n สามารถหาค่าได้นั่น ก็ต่อเมื่อ $q_k < v_k-1$ และ $q_k < v_k-3$ ทุกค่าของ k , $k=1,2,\ldots,m$ และเนื่องจากองศาเสรี v_k ของ Krishnamoorthy and Yu (2004) อยู่ระหว่าง $\min(n_1-1,n_2-1)$ และ n_1+n_2-2 ดังนั้นขนาดของบล็อกหรือเมทริกซ์ย่อย $\tilde{\mathbf{S}}_{kk}$ ต้องมีขนาด $q_k\times q_k$ เมื่อ $q_k < \min(n_1-1,n_2-1)-3$ จึงจะทำให้ตัวสถิติ T_n สามารถคำนวณค่าสถิติ ค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนได้

นอกจากนั้นเพื่อต้องการให้ตัวสถิติ T_n สามารถลู่เข้าเชิงการแจกแจง (Convergence in Distribution) สู่การแจกแจงปรกติมาตรฐานได้ ภายใต้เงื่อนไขในทฤษฎีที่ 2 ทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลางของเลียปูนอฟ (Lyapunov's Central Limit Theorem) ในภาคผนวก ก ต้องการให้โมเมนต์ศูนย์กลาง (Central Moment) ที่ 3 ของ y_k มีค่าจำกัด (Finite) ซึ่งเงื่อนไขสำหรับโมเมนต์ศูนย์กลางที่ 3 ของ y_k สามารถหาค่าได้หรือมีค่าจำกัด (Finite) จากทฤษฎีที่ 1 การแจกแจงเอฟ (F – Distribution) ในภาคผนวก ก คือ $v_k-q_k+1>6$ ซึ่งก็คือ $q_k \le v_k-6$ และจากขอบเขตขององศาเสรี v_k ของ Krishnamoorthy and Yu (2004) ดังนั้นบล็อกหรือเมทริกซ์ย่อย $\tilde{\mathbf{S}}_{kk}$ ต้องมีขนาด $q_k\times q_k$ เมื่อ $q_k \le \min(n_1-1,n_2-1)-6$ ทุกค่าของ k , $k=1,2,\ldots,m$ นั่นคือขนาดตัวอย่างทั้งสองตัวอย่างต้องมากกว่า 8 หรือ $n_1,n_2 \ge 8$ จึงจะทำให้ตัวสถิติ T_n สามารถคำนวณค่าสถิติ ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน และลู่เข้าเชิงการแจกแจงสู่การแจกแจงปรกติมาตรฐานได้

ตัวสถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน สำหรับข้อมูลมิติสูง ที่นำเสนอคือ

$$T_p = \frac{T_n-\sum_{k=1}^{m}\frac{v_k q_k}{v_k-q_k-1}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\frac{2q_k v_k^2(v_k-1)}{(v_k-q_k-1)^2(v_k-q_k-3)}}}. \qquad (3.15)$$

ทฤษฎีบทที่ 3.2 ตัวสถิติทดสอบ T_p ภายใต้สมมุติฐานว่าง และถ้าข้อกำหนดเบื้องต้นเป็นจริงจะได้ว่า

$$T_p \xrightarrow{d} N(0,1)$$

พิสูจน์

ภายใต้ข้อกำหนดเบื้องต้นเมื่อขนาดตัวอย่าง n_i คงที่ (Fixed) , $i=1,2$ เงื่อนไข $p \to \infty$ จะสมมูล (Equivalent) กับ $m \to \infty$ โดยตัวสถิติทดสอบ T_p เป็นฟังก์ชันของสถิติ T_n และจากทฤษฎีบทที่ 3.1 จะได้ว่าเมื่อ $q_k \le v_k - 6$ ทำให้ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวสถิติทดสอบ T_n สามารถหาค่าได้ นอกจากนั้นเมื่อ $q_k \le v_k - 6$ จะทำให้โมเมนต์ศูนย์กลาง (Central Moment) ที่ 3 ของ y_k สามารถหาค่าได้หรือมีค่าจำกัด (Finite) ด้วยเหตุผลที่กล่าวมาจะทำให้เงื่อนไขของเลียปูนอฟ (Lyapunov's Condition) ในทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลางของเลียปูนอฟ (Lyapunov's Central Limit Theorem) (ทฤษฎีที่ 2 ในภาคผนวก ก) เป็นจริง ดังนั้นจะได้ว่า

$$T_p = \frac{T_n - E(T_n)}{\sqrt{Var(T_n)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

■

สำหรับการทดสอบสมมุติฐานเชิงสถิติโดยใช้ตัวสถิติทดสอบ T_p ที่นำเสนอในครั้งนี้นั้น เงื่อนไขในการปฏิเสธสมมุติฐานว่างคือ จะปฏิเสธสมมุติว่างที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า

$$T_p \ge Z_{1-\alpha}$$

ทฤษฎีบทที่ 3.3 ตัวสถิติทดสอบ T_p มีคุณสมบัติไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การแปลงสเกลาร์ (Invariant Under Scalar Transformation) นั่นคือ $\mathbf{X} \to \mathbf{DX}$ เมื่อเมทริกซ์ $\mathbf{X} = \left[\mathbf{x}_{i1} \quad \mathbf{x}_{i2} \quad \cdots \quad \mathbf{x}_{in_i} \right]$, $i=1,2$ และ $\mathbf{D} = \text{diag}\left(c_1, c_2, \ldots, c_p\right)$ โดย $c_j \ne 0$ ทุกค่าของ j , $j = 1,2,\ldots,p$

พิสูจน์

กำหนดให้ $\mathbf{X}^* = \mathbf{DX}$

เมื่อ $\mathbf{D} = \text{diag}\left(c_1, c_2, \ldots, c_p\right) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_p \end{bmatrix}$,

จะได้ว่า $\bar{\mathbf{x}}_i^* = \mathbf{D}\bar{\mathbf{x}}_i \quad , i=1,2$

และ $\mathbf{S}_i^* = \mathbf{D}\mathbf{S}_i\mathbf{D} \quad , i=1,2$

ดังนั้น $\tilde{\mathbf{S}}^{*} = \frac{\mathbf{S}_1^{*}}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_2^{*}}{n_2}$

$= \frac{\mathbf{D}\mathbf{S}_1\mathbf{D}}{n_1}+\frac{\mathbf{D}\mathbf{S}_2\mathbf{D}}{n_2}$

$= \left(\mathbf{D}\frac{\mathbf{S}_1}{n_1}\mathbf{D}\right)+\left(\mathbf{D}\frac{\mathbf{S}_2}{n_2}\mathbf{D}\right)$

$= \mathbf{D}\left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_2}{n_2}\right)\mathbf{D}$

$= \mathbf{D}\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{D}$

จะทำให้ได้ว่าเมทริกซ์ผกผันของ $\tilde{\mathbf{S}}^{*}$ คือ

$$\tilde{\mathbf{S}}^{*-1} = \mathbf{D}^{-1}\tilde{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{D}^{-1}$$

แล้วเมทริกซ์ผกผันของ $\tilde{\mathbf{S}}^{*}_{block}$ คือ

$$\tilde{\mathbf{S}}^{*-1}_{block} = \mathbf{D}^{-1}\tilde{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{D}^{-1}$$

ดังนั้น $T_n^{*} = \left(\bar{\mathbf{x}}_1^{*}-\bar{\mathbf{x}}_2^{*}\right)'\tilde{\mathbf{S}}^{*-1}_{block}\left(\bar{\mathbf{x}}_1^{*}-\bar{\mathbf{x}}_2^{*}\right)$

$= \left(\mathbf{D}\bar{\mathbf{x}}_1-\mathbf{D}\bar{\mathbf{x}}_2\right)'\left(\mathbf{D}^{-1}\tilde{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\right)\left(\mathbf{D}\bar{\mathbf{x}}_1-\mathbf{D}\bar{\mathbf{x}}_2\right)$

$= \left(\bar{\mathbf{x}}_1-\bar{\mathbf{x}}_2\right)'\mathbf{D}\left(\mathbf{D}^{-1}\tilde{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\right)\mathbf{D}\left(\bar{\mathbf{x}}_1-\bar{\mathbf{x}}_2\right)$

$= \left(\bar{\mathbf{x}}_1-\bar{\mathbf{x}}_2\right)'\mathbf{I}\tilde{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{I}\left(\bar{\mathbf{x}}_1-\bar{\mathbf{x}}_2\right)$

$= \left(\bar{\mathbf{x}}_1-\bar{\mathbf{x}}_2\right)'\tilde{\mathbf{S}}^{-1}\left(\bar{\mathbf{x}}_1-\bar{\mathbf{x}}_2\right)$

$= T_n$

พิจารณาองศาเสรี ν ของ Krishnamoorthy and Yu (2004) จากสมการที่ (2.6) จะได้ว่า

$$\nu^{*} = \frac{p+p^2}{\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{n_i-1}\left\{\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\mathbf{S}_i^{*}}{n_i}\left(\frac{\mathbf{S}_1^{*}}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_2^{*}}{n_2}\right)^{-1}\right)^2\right]+\left(\mathrm{tr}\left[\frac{\mathbf{S}_i^{*}}{n_i}\left(\frac{\mathbf{S}_1^{*}}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_2^{*}}{n_2}\right)^{-1}\right]\right)^2\right\}}$$

$$= \frac{p+p^2}{\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{n_i-1}\left\{\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\mathbf{D}\mathbf{S}_i\mathbf{D}}{n_i}\left(\frac{\mathbf{D}\mathbf{S}_1\mathbf{D}}{n_1}+\frac{\mathbf{D}\mathbf{S}_2\mathbf{D}}{n_2}\right)^{-1}\right)^2\right]+\left(\mathrm{tr}\left[\frac{\mathbf{D}\mathbf{S}_i\mathbf{D}}{n_i}\left(\frac{\mathbf{D}\mathbf{S}_1\mathbf{D}}{n_1}+\frac{\mathbf{D}\mathbf{S}_2\mathbf{D}}{n_2}\right)^{-1}\right]\right)^2\right\}}$$

$$= \frac{p+p^2}{\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{n_i-1}\left\{\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\mathbf{D}\mathbf{S}_i\mathbf{D}}{n_i}\left(\mathbf{D}\left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_2}{n_2}\right)\mathbf{D}\right)^{-1}\right)^2\right]+\left(\mathrm{tr}\left[\frac{\mathbf{D}\mathbf{S}_i\mathbf{D}}{n_i}\left(\mathbf{D}\left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_2}{n_2}\right)\mathbf{D}\right)^{-1}\right]\right)^2\right\}}$$

$$= \frac{p+p^2}{\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{n_i-1}\left\{\mathrm{tr}\left[\left(\frac{1}{n_i}\left(\mathbf{D}^{-1}\left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_2}{n_2}\right)^{-1}\mathbf{D}^{-1}\right)\right)^2\right]+\left(\mathrm{tr}\left[\frac{\mathbf{D}\mathbf{S}_i\mathbf{D}}{n_i}\left(\mathbf{D}^{-1}\left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_2}{n_2}\right)^{-1}\mathbf{D}^{-1}\right)\right]\right)^2\right\}}$$

$$= \frac{p+p^2}{\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{n_i-1}\left\{\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\mathbf{D}\mathbf{S}_i\mathbf{I}}{n_i}\left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_2}{n_2}\right)^{-1}\mathbf{D}^{-1}\right)^2\right]+\left(\mathrm{tr}\left[\frac{\mathbf{D}\mathbf{S}_i\mathbf{I}}{n_i}\left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_2}{n_2}\right)^{-1}\mathbf{D}^{-1}\right]\right)^2\right\}}$$

$$= \frac{p+p^2}{\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{n_i-1}\left\{\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\mathbf{D}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}_i\mathbf{I}}{n_i}\left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_2}{n_2}\right)^{-1}\right)^2\right]+\left(\mathrm{tr}\left[\frac{\mathbf{D}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}_i\mathbf{I}}{n_i}\left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_2}{n_2}\right)^{-1}\right]\right)^2\right\}}$$

$$= \frac{p+p^2}{\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{n_i-1}\left\{\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\mathbf{I}\mathbf{S}_i\mathbf{I}}{n_i}\left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_2}{n_2}\right)^{-1}\right)^2\right]+\left(\mathrm{tr}\left[\frac{\mathbf{I}\mathbf{S}_i\mathbf{I}}{n_i}\left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_2}{n_2}\right)^{-1}\right]\right)^2\right\}}$$

$$= \frac{p+p^2}{\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{n_i-1}\left\{\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\mathbf{S}_i}{n_i}\left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_2}{n_2}\right)^{-1}\right)^2\right]+\left(\mathrm{tr}\left[\frac{\mathbf{S}_i}{n_i}\left(\frac{\mathbf{S}_1}{n_1}+\frac{\mathbf{S}_2}{n_2}\right)^{-1}\right]\right)^2\right\}}$$

$$= \nu$$

นั่นคือตัวสถิติ T_n และองศาเสรี ν ของ Krishnamoorthy and Yu (2004) มีคุณสมบัติไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การแปลงสเกลาร์ (Invariant Under Scalar Transformation) ดังนั้นตัวสถิติทดสอบ T_p เป็นตัวสถิติทดสอบที่มีคุณสมบัติไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การแปลงสเกลาร์ด้วย

■

3.3 เงื่อนไขสำหรับการเลือกบล็อกหรือเมทริกซ์ย่อย $\tilde{\mathbf{S}}_{kk}$ จากเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$

สถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน สำหรับข้อมูลมิติสูง ที่นำเสนอในงานวิจัยนี้มีพื้นฐานการพัฒนาตัวสถิติทดสอบมาจากตัวสถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน เมื่อ $n_i \geq p,\ i=1,2$ โดยในงานวิจัยนี้ได้ใช้การแจกแจงโดยประมาณที่นำเสนอโดย Krishnamoorthy and Yu (2004) ซึ่งผู้นำเสนอได้ระบุรูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างขนาดตัวอย่างและจำนวนตัวแปรสุ่มที่ทำให้การแจกแจงโดยประมาณดังกล่าวมีความเหมาะสม ดังที่ได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อที่ 2.1 ดังนั้นเพื่อให้ตัวสถิติทดสอบสำหรับข้อมูลมิติสูงที่นำเสนอในงานวิจัยนี้มีความเหมาะสมและสอดคล้องกับการแจกแจงโดยประมาณของ Krishnamoorthy and Yu (2004) จึงกำหนดเงื่อนไขสำหรับการเลือกบล็อกหรือเมทริกซ์ย่อย (Submatrix) $\tilde{\mathbf{S}}_{kk}$ จากแนวเส้นทแยงมุมเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ไว้ดังนี้

จากเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ขนาด $p\times p$ สามารถแบ่งออกเป็นบล็อกหรือเมทริกซ์ย่อย $\tilde{\mathbf{S}}_{kk}$ ขนาด $q_k \times q_k$ จำนวน m บล็อก เมื่อ $\sum_{k=1}^{m} q_k = p$ โดยที่เงื่อนไขของ q_k คือ

$$q_k \leq \frac{\min\left(n_1, n_2\right)}{4} \quad \text{เมื่อ} \quad n_1 = n_2 \tag{3.16}$$

และ $$q_k \leq \frac{\min\left(n_1 - 1, n_2 - 1\right)}{5} \quad \text{เมื่อ} \quad n_1 \neq n_2 \tag{3.17}$$

เพื่อต้องการให้ตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอทิ้งข้อมูลหรือสารสนเทศของเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ให้น้อยที่สุดและมีความเหมาะสมตามคำแนะนำของ Krishnamoorthy and Yu (2004) จึงแนะนำให้เลือกขนาดของบล็อกร่วม (Common Block Size) ของเมทริซ์ย่อย $\tilde{\mathbf{S}}_{kk}$ จากเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ดังนี้

$$q = \left\lfloor \frac{\min\left(n_1, n_2\right)}{4} \right\rfloor \quad \text{เมื่อ} \quad n_1 = n_2 \tag{3.18}$$

และ $$q = \left\lfloor \frac{\min\left(n_1 - 1, n_2 - 1\right)}{5} \right\rfloor \quad \text{เมื่อ} \quad n_1 \neq n_2 \tag{3.19}$$

3.4 การจำลองข้อมูล

ในการจำลองข้อมูลเพื่อคำนวณระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ ของตัวสถิติทดสอบ T_p ที่นำเสนอ และตัวสถิติทดสอบ T_{BS} ของ Bai and Saranadasa (1996), T_{CQ} ของ Chen and Qin (2010), และ T_{SKK} ของ Muni S. Srivastava et al. (2013) มีรายละเอียดดังนี้

1) กำหนดจำนวนตัวแปรและขนาดตัวอย่างทั้งหมด 10 สถานการณ์ ทั้งในกรณีขนาดตัวอย่างเท่ากันและขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน

2) สำหรับกรณีขนาดตัวอย่างเท่ากัน กำหนดสถานการณ์ดังนี้ $(p;n_1,n_2)\in\{(60;20,20),(100;20,20),(100;40,40),(200;20,20),(200;40,40),(200;60,60),(400;20,20),(400;40,40),(400;60,60),(400;80,80)\}$

3) สำหรับกรณีขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน กำหนดสถานการณ์ดังนี้ $(p;n_1,n_2)\in\{(60;26,31),(100;26,31),(100;36,46),(200;26,31),(200;46,51),(200;66,76),(400;26,31),(400;46,51),(400;66,76),(400;86,106)\}$

4) การคำนวณระดับนัยสำคัญที่ได้รับ (Attained Significance Level: ASL) กำหนดเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยประชากรของแต่ละประชากรเป็น $\boldsymbol{\mu}_1=\boldsymbol{\mu}_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}'_{1\times p}$

5) การคำนวณกำลังการทดสอบที่ได้รับ (Attained Power) กำหนดเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยประชากรของแต่ละประชากรเป็น $\boldsymbol{\mu}_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}'_{1\times p}$ และ $\boldsymbol{\mu}_2=\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & \cdots & u_p\end{bmatrix}'_{1\times p}$ เมื่อ $u_{2k-1}=0, u_{2k}\overset{iid}{\sim}U(-0.5,0.5),\ k=1,2,\ldots,p/2$

6) กำหนดเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร ทั้งหมด 10 รูปแบบ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \boldsymbol{\Sigma}_1=\mathbf{D} && (2)\ \boldsymbol{\Sigma}_2=\boldsymbol{\Psi}\\
&(3)\ \boldsymbol{\Sigma}_3=\mathbf{D}^{1/2}\mathfrak{R}_1\mathbf{D}^{1/2} && (4)\ \boldsymbol{\Sigma}_4=\boldsymbol{\Psi}^{1/2}\mathfrak{R}_2\boldsymbol{\Psi}^{1/2}\\
&(5)\ \boldsymbol{\Sigma}_5=\mathbf{D}^{1/2}\mathfrak{R}_3\mathbf{D}^{1/2} && (6)\ \boldsymbol{\Sigma}_6=\boldsymbol{\Psi}^{1/2}\mathfrak{R}_4\boldsymbol{\Psi}^{1/2}\\
&(7)\ \boldsymbol{\Sigma}_7=\mathbf{D}^{1/2}\mathfrak{R}_5\mathbf{D}^{1/2} && (8)\ \boldsymbol{\Sigma}_8=\boldsymbol{\Psi}^{1/2}\mathfrak{R}_6\boldsymbol{\Psi}^{1/2}\\
&(9)\ \boldsymbol{\Sigma}_9=\mathbf{D}^{1/2}\mathfrak{I}_1\mathbf{D}^{1/2} && (10)\ \boldsymbol{\Sigma}_{10}=\boldsymbol{\Psi}^{1/2}\mathfrak{I}_2\boldsymbol{\Psi}^{1/2}
\end{aligned}
$$

โดยที่บล็อกจำนวน $m-1$ บล็อกแรกในแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Sigma}_3$, $\boldsymbol{\Sigma}_4$, $\boldsymbol{\Sigma}_5$, $\boldsymbol{\Sigma}_6$, $\boldsymbol{\Sigma}_7$, และ $\boldsymbol{\Sigma}_8$ มีขนาด $q\times q$ และบล็อกสุดท้ายมีขนาด $q_m\times q_m$ เมื่อ $p=(m-1)q+q_m$

เมื่อ $\mathbf{D} = \text{diag}\left(d_1, d_2, \ldots, d_p\right),\ d_i = 2 + \frac{(p-i+1)}{p},\ i = 1, 2, \ldots, p$

$\mathbf{\Psi} = \text{diag}\left(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p\right),\ \psi_i = 4 + \frac{(p-i+1)}{p},\ i = 1, 2, \ldots, p$

$\mathfrak{R}_1 = \text{diag}\left(\mathfrak{R}_{11}, \mathfrak{R}_{12}, \ldots, \mathfrak{R}_{1m}\right)$

$\mathfrak{R}_2 = \text{diag}\left(\mathfrak{R}_{21}, \mathfrak{R}_{22}, \ldots, \mathfrak{R}_{2m}\right)$

$\mathfrak{R}_3 = \text{diag}\left(\mathfrak{R}_{31}, \mathfrak{R}_{32}, \ldots, \mathfrak{R}_{3m}\right)$

$\mathfrak{R}_4 = \text{diag}\left(\mathfrak{R}_{41}, \mathfrak{R}_{42}, \ldots, \mathfrak{R}_{4m}\right)$

$\mathfrak{R}_5 = \text{diag}\left(\mathfrak{R}_{51}, \mathfrak{R}_{52}, \ldots, \mathfrak{R}_{5m}\right)$

$\mathfrak{R}_6 = \text{diag}\left(\mathfrak{R}_{61}, \mathfrak{R}_{62}, \ldots, \mathfrak{R}_{6m}\right)$

$\mathfrak{R}_{1k} = \left(r_{ij}\right),\ r_{ii} = 1,\ r_{ij} = (-1)^{i+j}(0.2)^{|i-j|^{0.1}},\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, q_k$

$\mathfrak{R}_{2k} = \left(r_{ij}\right),\ r_{ii} = 1,\ r_{ij} = (-1)^{i+j}(0.4)^{|i-j|^{0.1}},\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, q_k$

$\mathfrak{R}_{3k} = \left(r_{ij}\right),\ r_{ii} = 1,\ r_{ij} = (-1)^{i+j}(0.6)^{|i-j|^{0.1}},\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, q_k$

$\mathfrak{R}_{4k} = \left(r_{ij}\right),\ r_{ii} = 1,\ r_{ij} = (-1)^{i+j}(0.8)^{|i-j|^{0.1}},\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, q_k$

$\mathfrak{R}_{5k} = \left(r_{ij}\right),\ r_{ii} = 1,\ r_{ij} = (-1)^{i+j}(0.9)^{|i-j|^{0.1}},\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, q_k$

$\mathfrak{R}_{6k} = \left(r_{ij}\right),\ r_{ii} = 1,\ r_{ij} = (-1)^{i+j}(0.95)^{|i-j|^{0.1}},\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, q_k$

$\mathfrak{I}_1$ คือ เมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อกที่ประกอบด้วยเมทริกซ์ย่อย $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_3$, และ $\mathfrak{R}_5$ ซึ่งในแต่ละเมทริกซ์ย่อยจะมีขนาดที่แตกต่างกัน 3 รูปแบบ และเมทริกซ์ย่อยทั้งหมดจะมีตำแหน่งบนแนวเส้นทแยงมุมอย่างสุ่ม

และ $\mathfrak{I}_2$ คือ เมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อกที่ประกอบด้วยเมทริกซ์ย่อย $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_4$, และ $\mathfrak{R}_6$ ซึ่งในแต่ละเมทริกซ์ย่อยจะมีขนาดที่แตกต่างกัน 3 รูปแบบ และเมทริกซ์ย่อยทั้งหมดจะมีตำแหน่งบนแนวเส้นทแยงมุมอย่างสุ่ม

7) ขนาด จำนวนและตำแหน่งอย่างสุ่มของเมทริกซ์ย่อยบนแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\mathfrak{I}_1$ และ $\mathfrak{I}_2$ สำหรับขนาดตัวอย่างเท่ากันและไม่เท่ากัน แสดงอยู่ในภาคผนวก ข และ ค สำหรับเมทริกซ์ $\mathfrak{I}_1$ ให้พิจารณาเมทริกซ์ย่อย $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_3$, และ $\mathfrak{R}_5$ ส่วนเมทริกซ์ $\mathfrak{I}_2$ ให้พิจารณาเมทริกซ์ย่อย $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_4$, และ $\mathfrak{R}_6$

8) การสร้างเวกเตอร์สุ่มที่มีการแจกแจงปรกติ p ตัวแปร ใช้ชุดคำสั่ง (Package) MASS (Venables & Ripley, 2002)

9) การคำนวณค่าสถิติทดสอบและค่าพี (p–value) ของตัวสถิติทดสอบ T_{CQ} และ T_{SKK} ใช้ชุดคำสั่ง `MethylCapSig` (Deepak et al., 2015)

10) คำสั่งสำหรับการคำนวณค่าสถิติทดสอบและค่าพีของตัวสถิติทดสอบ T_{BS} , T_p และการจำลองข้อมูลบางส่วนที่ใช้งานวิจัย แสดงอยู่ในภาคผนวก ง

11) กำหนดตัวเลขเริ่มต้น (Seed Number) สำหรับการจำลองข้อมูล เท่ากับ $2^{31}-1$

12) การจำลองข้อมูลกำหนดจำนวนการทำซ้ำ (Number of Replication) เท่ากับ 10,000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์

13) สำหรับการคำนวณระดับนัยสำคัญที่ได้รับของตัวสถิติทดสอบ T_{BS} , T_{CQ} , T_{SKK} , และ T_p ทั้ง 10 สถานการณ์ในแต่ละรูปแบบของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร จะแสดงค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (The Average Absolute Discrepancy: AAD) ไว้ด้านล่างของตาราง คำนวณได้โดย $AAD = \frac{\sum|\hat{\alpha} - 0.05|}{10}$

บทที่ 4

ผลการดำเนินงานวิจัย

สำหรับบทที่ 4 ผลการดำเนินงานวิจัย ได้นำเสนอประสิทธิภาพของตัวสถิติทดสอบ T_p ที่นำเสนอประกอบด้วยระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ เปรียบเทียบกับตัวสถิติทดสอบ T_{BS} ของ Bai and Saranadasa (1996), T_{CQ} ของ Chen and Qin (2010), และ T_{SKK} ของ Muni S. Srivastava et al. (2013) โดยการศึกษาด้วยการจำลองข้อมูล (Simulation) ภายใต้รูปแบบเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรที่แตกต่างกัน 5 รูปแบบ

ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับที่คำนวณจากการจำลองข้อมูลภายใต้แต่ละรูปแบบเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน แสดงอยู่ในหัวข้อที่ 4.1 (ตารางที่ 4.1 – 4.5) และเมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน แสดงอยู่ในแสดงอยู่ในหัวข้อที่ 4.2 (ตารางที่ 4.6 – 4.10)

และผลของการประยุกต์ใช้ตัวสถิติทดสอบ T_p ที่นำเสนอกับตัวสถิติทดสอบ T_{BS} , T_{CQ} , และ T_{SKK} สำหรับข้อมูลจริงแสดงอยู่ในหัวข้อที่ 4.3 (ตารางที่ 4.11)

4.1 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน

ตามที่ปรากฏในตารางที่ 4.1 ประสิทธิภาพของตัวสถิติทดสอบ $T_{BS}, T_{CQ}, T_{SKK},$ และ T_p ภายใต้รูปแบบเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_1$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_2$ ซึ่งมีลักษณะเป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากันจะพิจารณาเป็น 2 กรณี คือในกรณีที่ขนาดของบล็อกร่วมของเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Sigma}_1$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_2$ มีขนาดเป็น $q=1$ และ $q=\lfloor \min(n_1,n_2)/4 \rfloor$

ผลการจำลองข้อมูลพบว่าระดับนัยสำคัญที่ได้รับของตัวสถิติทดสอบ T_p เข้าใกล้ระดับนัยสำคัญที่กำหนด 0.05 มากกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในทุกสถานการณ์และขนาดของบล็อกร่วมทั้ง 2 กรณี หากพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ของตัวสถิติทดสอบทั้งหมดพบว่าตัวสถิติทดสอบ T_p มีค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ในทั้ง 2 กรณีต่ำที่สุด และตัวสถิติทดสอบทั้งหมดมีกำลังการทดสอบที่ได้รับอยู่ในระดับที่ไม่แตกต่างกัน โดยเมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดเล็กตัวสถิติทดสอบ T_p จะมีกำลังการทดสอบที่ได้รับน้อยกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในระดับเล็กน้อย และกำลังการทดสอบที่ได้รับจะมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น ทั้งในกรณีขนาดของบล็อกร่วม $q=1$ และ $q=\lfloor \min(n_1,n_2)/4 \rfloor$

ตารางที่ 4.1 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_1$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_2$ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$

p	n_1, n_2	ระดับนัยสำคัญที่ได้รับ				กำลังการทดสอบที่ได้รับ			
		T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p	T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p
$q=1$									
60	20,20	0.058	0.058	0.088	0.054	0.183	0.183	0.230	0.170
100	20,20	0.059	0.059	0.096	0.056	0.237	0.237	0.321	0.227
	40,40	0.060	0.060	0.072	0.059	0.517	0.517	0.549	0.511
200	20,20	0.054	0.054	0.109	0.050	0.324	0.324	0.453	0.302
	40,40	0.055	0.055	0.075	0.054	0.717	0.717	0.755	0.706
	60,60	0.055	0.055	0.067	0.054	0.935	0.935	0.943	0.933
400	20,20	0.053	0.053	0.138	0.050	0.468	0.469	0.652	0.439
	40,40	0.051	0.051	0.078	0.049	0.906	0.906	0.933	0.900
	60,60	0.052	0.052	0.068	0.052	0.995	0.995	0.996	0.994
	80,80	0.058	0.058	0.069	0.059	1.000	1.000	1.000	1.000
AAD		0.005	0.006	0.036	0.004	–	–	–	–
$q=\lfloor \min(n_1, n_2)/4 \rfloor$									
60	20,20	0.058	0.058	0.088	0.057	0.183	0.183	0.230	0.157
100	20,20	0.059	0.059	0.096	0.054	0.237	0.237	0.321	0.210
	40,40	0.060	0.060	0.072	0.062	0.517	0.517	0.549	0.473
200	20,20	0.054	0.054	0.109	0.049	0.324	0.324	0.453	0.265
	40,40	0.055	0.055	0.075	0.056	0.717	0.717	0.755	0.659
	60,60	0.055	0.055	0.067	0.057	0.935	0.935	0.943	0.903
400	20,20	0.053	0.053	0.138	0.047	0.468	0.469	0.652	0.387
	40,40	0.051	0.051	0.078	0.051	0.906	0.906	0.933	0.863
	60,60	0.052	0.052	0.068	0.054	0.995	0.995	0.996	0.988
	80,80	0.058	0.058	0.069	0.059	1.000	1.000	1.000	1.000
AAD		0.005	0.006	0.036	0.005	–	–	–	–

ตามที่ปรากฏในตารางที่ 4.2 ประสิทธิภาพของตัวสถิติทดสอบ T_{BS}, T_{CQ}, T_{SKK}, และ T_p ภายใต้รูปแบบเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_3$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_4$ ซึ่งมีลักษณะเป็นเมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อก เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน พิจารณาในกรณีที่ขนาดของบล็อกร่วมของเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Sigma}_3$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_4$ มีขนาดเป็น $q = \lfloor \min(n_1, n_2)/4 \rfloor$

ผลการจำลองข้อมูลพบว่าระดับนัยสำคัญที่ได้รับของตัวสถิติทดสอบ T_p เข้าใกล้ระดับนัยสำคัญที่กำหนด 0.05 มากกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในทุกสถานการณ์ หากพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ของตัวสถิติทดสอบทั้งหมดพบว่าตัวสถิติทดสอบ T_p มีค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ต่ำที่สุด และตัวสถิติทดสอบ T_p มีกำลังการทดสอบที่ได้รับสูงกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในทุกสถานการณ์ ยกเว้นในสถานการณ์ที่ 4 และ 7 โดยในสถานการณ์ดังกล่าวตัวสถิติทดสอบ T_p มีกำลังการทดสอบที่ได้รับต่ำกว่าตัวสถิติทดสอบ T_{SKK} เล็กน้อย

ตารางที่ 4.2 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_3$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_4$ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$

p	n_1, n_2	ระดับนัยสำคัญที่ได้รับ				กำลังการทดสอบที่ได้รับ			
		T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p	T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p
$q = \lfloor \min(n_1, n_2)/4 \rfloor$									
60	20,20	0.065	0.065	0.084	0.059	0.157	0.157	0.186	0.205
100	20,20	0.062	0.062	0.088	0.053	0.190	0.189	0.250	0.273
	40,40	0.064	0.064	0.065	0.056	0.363	0.363	0.365	0.638
200	20,20	0.059	0.059	0.097	0.049	0.270	0.270	0.360	0.355
	40,40	0.064	0.064	0.066	0.054	0.523	0.523	0.544	0.822
	60,60	0.065	0.065	0.064	0.055	0.749	0.748	0.740	0.978
400	20,20	0.056	0.057	0.116	0.048	0.378	0.377	0.524	0.507
	40,40	0.058	0.058	0.070	0.055	0.745	0.744	0.777	0.963
	60,60	0.061	0.061	0.064	0.053	0.933	0.933	0.936	1.000
	80,80	0.059	0.059	0.059	0.057	0.990	0.990	0.989	1.000
AAD		0.011	0.011	0.027	0.004	–	–	–	–

ตามที่ปรากฏในตารางที่ 4.3 ประสิทธิภาพของตัวสถิติทดสอบ T_{BS}, T_{CQ}, T_{SKK}, และ T_p ภายใต้รูปแบบเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_5$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_6$ ซึ่งมีลักษณะเป็นเมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อก เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน พิจารณาในกรณีที่ขนาดของบล็อกร่วมของเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Sigma}_5$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_6$ มีขนาดเป็น $q = \lfloor \min(n_1, n_2)/4 \rfloor$

ผลการจำลองข้อมูลพบว่าระดับนัยสำคัญที่ได้รับของตัวสถิติทดสอบ T_p เข้าใกล้ระดับนัยสำคัญที่กำหนด 0.05 มากกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในทุกสถานการณ์ หากพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ของตัวสถิติทดสอบทั้งหมดพบว่าตัวสถิติทดสอบ T_p มีค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ต่ำที่สุด และตัวสถิติทดสอบ T_p มีกำลังการทดสอบที่ได้รับสูงกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในทุกสถานการณ์

ตารางที่ 4.3 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_5$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_6$ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$

p	n_1, n_2	ระดับนัยสำคัญที่ได้รับ				กำลังการทดสอบที่ได้รับ			
		T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p	T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p
$q = \lfloor \min(n_1, n_2)/4 \rfloor$									
60	20,20	0.071	0.071	0.069	0.055	0.121	0.121	0.113	0.512
100	20,20	0.065	0.065	0.069	0.050	0.137	0.137	0.138	0.712
	40,40	0.069	0.069	0.044	0.060	0.192	0.193	0.136	0.991
200	20,20	0.064	0.063	0.074	0.049	0.175	0.174	0.194	0.849
	40,40	0.067	0.067	0.052	0.051	0.253	0.253	0.204	1.000
	60,60	0.070	0.069	0.042	0.055	0.328	0.329	0.236	1.000
400	20,20	0.059	0.058	0.078	0.047	0.232	0.232	0.277	0.974
	40,40	0.062	0.062	0.050	0.052	0.366	0.365	0.322	1.000
	60,60	0.063	0.063	0.045	0.056	0.497	0.497	0.406	1.000
	80,80	0.062	0.062	0.037	0.052	0.613	0.613	0.480	1.000
AAD		0.015	0.015	0.012	0.003	–	–	–	–

ตามที่ปรากฏในตารางที่ 4.4 ประสิทธิภาพของตัวสถิติทดสอบ T_{BS}, T_{CQ}, T_{SKK}, และ T_p ภายใต้รูปแบบเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_7$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_8$ ซึ่งมีลักษณะเป็นเมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อก เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน พิจารณาในกรณีที่ขนาดของบล็อกร่วมของเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Sigma}_7$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_8$ มีขนาดเป็น $q = \lfloor \min(n_1, n_2)/4 \rfloor$

ผลการจำลองข้อมูลพบว่าระดับนัยสำคัญที่ได้รับของตัวสถิติทดสอบ T_p เข้าใกล้ระดับนัยสำคัญที่กำหนด 0.05 มากกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในทุกสถานการณ์ หากพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ของตัวสถิติทดสอบทั้งหมดพบว่าตัวสถิติทดสอบ T_p มีค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ต่ำที่สุด และตัวสถิติทดสอบ T_p มีกำลังการทดสอบที่ได้รับสูงกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในทุกสถานการณ์

ตารางที่ 4.4 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_7$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_8$ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$

p	n_1, n_2	ระดับนัยสำคัญที่ได้รับ				กำลังการทดสอบที่ได้รับ			
		T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p	T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p
$q = \lfloor \min(n_1, n_2)/4 \rfloor$									
60	20,20	0.072	0.071	0.057	0.056	0.108	0.108	0.086	1.000
100	20,20	0.065	0.064	0.059	0.054	0.120	0.120	0.105	1.000
	40,40	0.068	0.068	0.033	0.053	0.156	0.156	0.081	1.000
200	20,20	0.063	0.063	0.060	0.050	0.149	0.149	0.142	1.000
	40,40	0.067	0.066	0.039	0.052	0.196	0.196	0.130	1.000
	60,60	0.070	0.070	0.031	0.055	0.242	0.243	0.127	1.000
400	20,20	0.059	0.059	0.067	0.046	0.188	0.188	0.196	1.000
	40,40	0.062	0.062	0.042	0.047	0.271	0.271	0.200	1.000
	60,60	0.063	0.063	0.033	0.054	0.353	0.352	0.229	1.000
	80,80	0.060	0.060	0.025	0.055	0.425	0.425	0.243	1.000
AAD		0.015	0.015	0.014	0.004	–	–	–	–

ตามที่ปรากฏในตารางที่ 4.5 ประสิทธิภาพของตัวสถิติทดสอบ T_{BS}, T_{CQ}, T_{SKK}, และ T_p ภายใต้รูปแบบเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_9$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_{10}$ ซึ่งมีลักษณะเป็นเมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อก เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน พิจารณาในกรณีที่เมทริกซ์ย่อยบนแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Sigma}_9$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_{10}$ มีขนาดและลักษณะที่แตกต่างกัน 9 รูปแบบ และเมทริกซ์ย่อยทั้งหมดมีตำแหน่งบนแนวเส้นทแยงมุมอย่างสุ่ม

ผลการจำลองข้อมูลพบว่าระดับนัยสำคัญที่ได้รับของตัวสถิติทดสอบ T_p เข้าใกล้ระดับนัยสำคัญที่กำหนด 0.05 มากกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในทุกสถานการณ์ หากพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ของตัวสถิติทดสอบทั้งหมดพบว่าตัวสถิติทดสอบ T_p มีค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ต่ำที่สุด และตัวสถิติทดสอบ T_p มีกำลังการทดสอบที่ได้รับสูงกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในทุกสถานการณ์

ตารางที่ 4.5 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_9$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_{10}$ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$

p	n_1, n_2	ระดับนัยสำคัญที่ได้รับ				กำลังการทดสอบที่ได้รับ			
		T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p	T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p
60	20,20	0.070	0.069	0.065	0.047	0.125	0.125	0.118	0.848
100	20,20	0.065	0.065	0.071	0.051	0.143	0.143	0.150	0.997
	40,40	0.074	0.074	0.055	0.051	0.204	0.203	0.154	1.000
200	20,20	0.062	0.061	0.074	0.046	0.180	0.180	0.199	0.994
	40,40	0.068	0.068	0.052	0.049	0.270	0.270	0.220	1.000
	60,60	0.071	0.071	0.045	0.048	0.357	0.357	0.264	1.000
400	20,20	0.060	0.061	0.079	0.047	0.238	0.237	0.285	1.000
	40,40	0.062	0.062	0.053	0.047	0.381	0.381	0.335	1.000
	60,60	0.064	0.064	0.046	0.051	0.500	0.500	0.422	1.000
	80,80	0.064	0.063	0.040	0.050	0.645	0.645	0.520	1.000
AAD		0.016	0.016	0.012	0.002	–	–	–	–

4.2 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน

ตามที่ปรากฏในตารางที่ 4.6 ประสิทธิภาพของตัวสถิติทดสอบ T_{BS}, T_{CQ}, T_{SKK}, และ T_p ภายใต้รูปแบบเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_1$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_2$ ซึ่งมีลักษณะเป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากันจะพิจารณาเป็น 2 กรณี คือในกรณีที่ขนาดของบล็อกร่วมของเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Sigma}_1$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_2$ มีขนาดเป็น $q=1$ และ $q=\lfloor \min(n_1-1, n_2-1)/5 \rfloor$

ผลการจำลองข้อมูลพบว่าระดับนัยสำคัญที่ได้รับของตัวสถิติทดสอบ T_p เข้าใกล้ระดับนัยสำคัญที่กำหนด 0.05 มากกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในทุกสถานการณ์และขนาดของบล็อกร่วมทั้ง 2 กรณี หากพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ของตัวสถิติทดสอบทั้งหมดพบว่าในกรณีขนาดของบล็อกร่วม $q=1$ ตัวสถิติทดสอบ T_{BS} มีค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ต่ำที่สุด แต่ในกรณีขนาดของบล็อกร่วม $q=\lfloor \min(n_1-1, n_2-1)/5 \rfloor$ ตัวสถิติทดสอบ T_{BS} และ T_p มีค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ต่ำที่สุดทั้งคู่ และตัวสถิติทดสอบทั้งหมดมีกำลังการทดสอบที่ได้รับอยู่ในระดับที่ไม่แตกต่างกัน โดยเมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดเล็กตัวสถิติทดสอบ T_p จะมีกำลังการทดสอบที่ได้รับน้อยกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในระดับเล็กน้อย และกำลังการทดสอบที่ได้รับจะมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น ทั้งในกรณีขนาดของบล็อกร่วม $q=1$ และ $q=\lfloor \min(n_1-1, n_2-1)/5 \rfloor$

ตารางที่ 4.6 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_1$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_2$ เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$

p	n_1, n_2	ระดับนัยสำคัญที่ได้รับ				กำลังการทดสอบที่ได้รับ			
		T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p	T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p
$q=1$									
60	26,31	0.056	0.056	0.069	0.054	0.263	0.262	0.286	0.251
100	26,31	0.056	0.056	0.078	0.056	0.362	0.362	0.411	0.352
	36,46	0.056	0.056	0.065	0.055	0.553	0.554	0.577	0.545
200	26,31	0.058	0.058	0.088	0.055	0.508	0.507	0.578	0.490
	46,51	0.055	0.055	0.068	0.054	0.838	0.839	0.856	0.833
	66,76	0.055	0.055	0.062	0.056	0.978	0.978	0.980	0.978
400	26,31	0.055	0.056	0.103	0.055	0.716	0.715	0.802	0.700
	46,51	0.053	0.053	0.074	0.052	0.969	0.969	0.978	0.968
	66,76	0.057	0.057	0.071	0.057	0.999	0.999	1.000	0.999
	86,106	0.056	0.056	0.063	0.058	1.000	1.000	1.000	1.000
AAD		0.006	0.006	0.024	0.005	–	–	–	–
$q=\lfloor \min(n_1-1, n_2-1)/5 \rfloor$									
60	26,31	0.056	0.056	0.069	0.056	0.263	0.262	0.286	0.234
100	26,31	0.056	0.056	0.078	0.057	0.362	0.362	0.411	0.330
	36,46	0.056	0.056	0.065	0.053	0.553	0.554	0.577	0.516
200	26,31	0.058	0.058	0.088	0.054	0.508	0.507	0.578	0.460
	46,51	0.055	0.055	0.068	0.053	0.838	0.839	0.856	0.803
	66,76	0.055	0.055	0.062	0.055	0.978	0.978	0.980	0.965
400	26,31	0.055	0.056	0.103	0.054	0.716	0.715	0.802	0.661
	46,51	0.053	0.053	0.074	0.052	0.969	0.969	0.978	0.955
	66,76	0.057	0.057	0.071	0.056	0.999	0.999	1.000	0.999
	86,106	0.056	0.056	0.063	0.055	1.000	1.000	1.000	1.000
AAD		0.006	0.006	0.024	0.004	–	–	–	–

ตามที่ปรากฏในตารางที่ 4.7 ประสิทธิภาพของตัวสถิติทดสอบ T_{BS}, T_{CQ}, T_{SKK}, และ T_p ภายใต้รูปแบบเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_3$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_4$ ซึ่งมีลักษณะเป็นเมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อก เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน พิจารณาในกรณีที่ขนาดของบล็อกร่วมของเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Sigma}_3$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_4$ มีขนาดเป็น $q = \lfloor \min(n_1 - 1, n_2 - 1)/5 \rfloor$

ผลการจำลองข้อมูลพบว่าระดับนัยสำคัญที่ได้รับของตัวสถิติทดสอบ T_p เข้าใกล้ระดับนัยสำคัญที่กำหนด 0.05 มากกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในทุกสถานการณ์ หากพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ของตัวสถิติทดสอบทั้งหมดพบว่าตัวสถิติทดสอบ T_p มีค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ต่ำที่สุด และตัวสถิติทดสอบ T_p มีกำลังการทดสอบที่ได้รับสูงกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในทุกสถานการณ์

ตารางที่ 4.7 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_3$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_4$ เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$

p	n_1, n_2	ระดับนัยสำคัญที่ได้รับ				กำลังการทดสอบที่ได้รับ			
		T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p	T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p
$q = \lfloor \min(n_1 - 1, n_2 - 1)/5 \rfloor$									
60	26,31	0.063	0.063	0.067	0.056	0.216	0.216	0.220	0.316
100	26,31	0.064	0.064	0.074	0.054	0.292	0.292	0.320	0.445
	36,46	0.058	0.058	0.061	0.054	0.424	0.425	0.431	0.647
200	26,31	0.059	0.059	0.077	0.055	0.412	0.412	0.466	0.577
	46,51	0.062	0.062	0.066	0.056	0.682	0.683	0.688	0.929
	66,76	0.061	0.061	0.058	0.056	0.889	0.889	0.882	0.996
400	26,31	0.059	0.059	0.091	0.052	0.612	0.611	0.691	0.803
	46,51	0.062	0.062	0.071	0.056	0.889	0.888	0.901	0.993
	66,76	0.060	0.060	0.062	0.054	0.988	0.988	0.988	1.000
	86,106	0.061	0.061	0.059	0.057	1.000	1.000	1.000	1.000
AAD		0.011	0.011	0.018	0.005	–	–	–	–

ตามที่ปรากฏในตารางที่ 4.8 ประสิทธิภาพของตัวสถิติทดสอบ T_{BS}, T_{CQ}, T_{SKK}, และ T_p ภายใต้รูปแบบเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_5$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_6$ ซึ่งมีลักษณะเป็นเมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อก เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน พิจารณาในกรณีที่ขนาดของบล็อกร่วมของเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Sigma}_5$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_6$ มีขนาดเป็น $q = \lfloor \min(n_1 - 1, n_2 - 1)/5 \rfloor$

ผลการจำลองข้อมูลพบว่าระดับนัยสำคัญที่ได้รับของตัวสถิติทดสอบ T_p เข้าใกล้ระดับนัยสำคัญที่กำหนด 0.05 มากกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในทุกสถานการณ์ หากพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ของตัวสถิติทดสอบทั้งหมดพบว่าตัวสถิติทดสอบ T_p มีค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ต่ำที่สุด และตัวสถิติทดสอบ T_p มีกำลังการทดสอบที่ได้รับสูงกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในทุกสถานการณ์

ตารางที่ 4.8 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_5$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_6$ เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$

p	n_1, n_2	ระดับนัยสำคัญที่ได้รับ				กำลังการทดสอบที่ได้รับ			
		T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p	T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p
$q = \lfloor \min(n_1 - 1, n_2 - 1)/5 \rfloor$									
60	26,31	0.067	0.067	0.056	0.054	0.144	0.144	0.120	0.745
100	26,31	0.065	0.065	0.062	0.057	0.182	0.182	0.166	0.920
	36,46	0.067	0.067	0.051	0.058	0.234	0.233	0.188	0.990
200	26,31	0.063	0.062	0.061	0.055	0.250	0.250	0.247	0.980
	46,51	0.067	0.067	0.052	0.056	0.346	0.347	0.293	1.000
	66,76	0.064	0.064	0.043	0.055	0.463	0.463	0.357	1.000
400	26,31	0.061	0.061	0.069	0.051	0.366	0.365	0.385	1.000
	46,51	0.062	0.062	0.051	0.053	0.525	0.524	0.479	1.000
	66,76	0.063	0.063	0.046	0.055	0.689	0.689	0.611	1.000
	86,106	0.065	0.065	0.040	0.056	0.848	0.848	0.762	1.000
AAD		0.014	0.014	0.007	0.005	–	–	–	–

ตามที่ปรากฏในตารางที่ 4.9 ประสิทธิภาพของตัวสถิติทดสอบ T_{BS}, T_{CQ}, T_{SKK}, และ T_p ภายใต้รูปแบบเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_7$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_8$ ซึ่งมีลักษณะเป็นเมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อก เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน พิจารณาในกรณีที่ขนาดของบล็อกร่วมของเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Sigma}_7$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_8$ มีขนาดเป็น $q = \lfloor \min(n_1 - 1, n_2 - 1)/5 \rfloor$

ผลการจำลองข้อมูลพบว่าระดับนัยสำคัญที่ได้รับของตัวสถิติทดสอบ T_p เข้าใกล้ระดับนัยสำคัญที่กำหนด 0.05 มากกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในทุกสถานการณ์ หากพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ของตัวสถิติทดสอบทั้งหมดพบว่าตัวสถิติทดสอบ T_p มีค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ต่ำที่สุด และตัวสถิติทดสอบ T_p มีกำลังการทดสอบที่ได้รับสูงกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในทุกสถานการณ์

ตารางที่ 4.9 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_7$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_8$ เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$

p	n_1, n_2	ระดับนัยสำคัญที่ได้รับ				กำลังการทดสอบที่ได้รับ			
		T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p	T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p
$q = \lfloor \min(n_1 - 1, n_2 - 1)/5 \rfloor$									
60	26,31	0.067	0.067	0.048	0.054	0.124	0.124	0.088	1.000
100	26,31	0.067	0.067	0.051	0.056	0.149	0.149	0.118	1.000
	36,46	0.067	0.067	0.040	0.058	0.185	0.185	0.126	1.000
200	26,31	0.060	0.060	0.054	0.055	0.203	0.203	0.175	1.000
	46,51	0.068	0.067	0.041	0.056	0.260	0.260	0.179	1.000
	66,76	0.064	0.064	0.031	0.057	0.328	0.328	0.194	1.000
400	26,31	0.061	0.061	0.058	0.053	0.289	0.289	0.272	1.000
	46,51	0.062	0.062	0.042	0.058	0.388	0.388	0.301	1.000
	66,76	0.065	0.065	0.035	0.051	0.501	0.501	0.367	1.000
	86,106	0.064	0.064	0.028	0.056	0.631	0.630	0.447	1.000
AAD		0.014	0.014	0.010	0.005	–	–	–	–

ตามที่ปรากฏในตารางที่ 4.10 ประสิทธิภาพของตัวสถิติทดสอบ T_{BS}, T_{CQ}, T_{SKK}, และ T_p ภายใต้รูปแบบเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\mathbf{\Sigma}_9$ และ $\mathbf{\Sigma}_{10}$ ซึ่งมีลักษณะเป็นเมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อก เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน พิจารณาในกรณีที่เมทริกซ์ย่อยบนแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\mathbf{\Sigma}_9$ และ $\mathbf{\Sigma}_{10}$ มีขนาดและลักษณะที่แตกต่างกัน 9 รูปแบบ และเมทริกซ์ย่อยทั้งหมดมีตำแหน่งบนแนวเส้นทแยงมุมอย่างสุ่ม

ผลการจำลองข้อมูลพบว่าระดับนัยสำคัญที่ได้รับของตัวสถิติทดสอบ T_p เข้าใกล้ระดับนัยสำคัญที่กำหนด 0.05 มากกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในทุกสถานการณ์ หากพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ของตัวสถิติทดสอบทั้งหมดพบว่าตัวสถิติทดสอบ T_p มีค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ต่ำที่สุด และตัวสถิติทดสอบ T_p มีกำลังการทดสอบที่ได้รับสูงกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ ในทุกสถานการณ์

ตารางที่ 4.10 ระดับนัยสำคัญที่ได้รับและกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\mathbf{\Sigma}_9$ และ $\mathbf{\Sigma}_{10}$ เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน ที่ $\alpha = 0.05$

p	n_1, n_2	ระดับนัยสำคัญที่ได้รับ				กำลังการทดสอบที่ได้รับ			
		T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p	T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p
60	26,31	0.067	0.067	0.058	0.051	0.155	0.154	0.133	0.940
100	26,31	0.065	0.065	0.062	0.053	0.197	0.196	0.186	0.996
	36,46	0.067	0.066	0.055	0.054	0.239	0.239	0.203	1.000
200	26,31	0.060	0.060	0.063	0.050	0.261	0.262	0.268	1.000
	46,51	0.066	0.066	0.052	0.051	0.380	0.381	0.334	1.000
	66,76	0.065	0.065	0.045	0.055	0.483	0.483	0.383	1.000
400	26,31	0.061	0.060	0.067	0.049	0.389	0.389	0.404	1.000
	46,51	0.064	0.064	0.054	0.053	0.529	0.529	0.487	1.000
	66,76	0.065	0.065	0.045	0.050	0.700	0.701	0.609	1.000
	86,106	0.064	0.064	0.043	0.055	0.871	0.871	0.794	1.000
AAD		0.014	0.014	0.008	0.002	–	–	–	–

4.3 การประยุกต์ใช้ตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอกับข้อมูลจริง

สำหรับข้อมูลจริงที่นำมาทดสอบสมมุติฐานด้วยตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอและตัวสถิติทดสอบของ Bai and Saranadasa (1996), Chen and Qin (2010), และ Muni S. Srivastava et al. (2013) คือข้อมูลไมโครอาร์เรย์ของดีเอ็นเอเกี่ยวกับโรคมะเร็งต่อมลูกหมาก (Prostate Cancer Data) ในข้อมูลประกอบด้วยตัวอย่างต่อมลูกหมากปกติ (Normal Samples) จำนวน 50 หน่วยตัวอย่าง และต่อมลูกหมากที่พบเซลล์มะเร็ง (Prostate Tumor) จำนวน 52 หน่วยตัวอย่าง ในแต่ละหน่วยตัวอย่างเก็บข้อมูลการแสดงออกของยีน (Gene Expression) จำนวน 6,033 ยีน (Dettling & Bühlmann, 2002; Singh et al., 2002) โดยสามารถเข้าถึงข้อมูลโรคมะเร็งต่อมลูกหมากได้จากชุดคำสั่ง `spls` ในโปรแกรมอาร์ (Dongjun, Hyonho, & Sunduz, 2018) โดยจะเลือกการแสดงออกของยีนมาทดสอบสมมุติฐานจำนวน 1,000 ยีน

ก่อนทำการทดสอบสมมุติฐานความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของการแสดงออกของยีนระหว่างต่อมลูกหมากปกติและต่อมลูกหมากที่พบเซลล์มะเร็ง จะทำการทดสอบความเท่ากันของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรของการแสดงออกของยีนทั้ง 1,000 ยีน ก่อน โดยใช้การทดสอบของ Chaipitak and Chongcharoen (2013) ผลการทดสอบสมมุติฐานได้ค่าสถิติทดสอบ $T^* = 4.338$ และค่าพี (p–value) คือ < 0.001 นั่นคือเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรระหว่างการแสดงออกของยีนของต่อมลูกหมากปกติและต่อมลูกหมากที่พบเซลล์มะเร็งไม่เท่ากัน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 จึงสามารถใช้ตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอได้

นำข้อมูลการแสดงออกของยีนทั้ง 1,000 ยีน ระหว่างตัวอย่างต่อมลูกหมากปกติและต่อมลูกหมากที่พบเซลล์มะเร็ง มาคำนวณเมทริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวอย่าง ตามสมการที่ (2.28) หลังจากนั้นจึงพยายามจัดเมทริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวอย่างให้มีลักษณะใกล้คียงกับเมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อก โดยทำการเลือกตัวแปรสุ่มที่มีความสัมพันธ์กันให้อยู่ในกลุ่มเดียวกัน อาจพิจารณาจากค่าสหสัมพันธ์ภายในเมทริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวอย่างที่มีระดับความสัมพันธ์ใกล้เคียงกัน หรืออาจใช้การวิเคราะห์กลุ่ม (Cluster Analysis) เข้ามาช่วยในการจัดกลุ่มของตัวแปร

การวิเคราะห์กลุ่มด้วยโปรแกรมอาร์ จะใช้คำสั่ง `hclust()` โดยเป็นคำสั่งสำหรับการวิเคราะห์กลุ่มแบบเป็นขั้นตอน (Hierarchical Cluster Analysis) มีค่าเริ่มต้น (Defaults) ของคำสั่งสำหรับการรวมกลุ่ม (Agglomeration) และการวัดความต่าง (Dissimilarity Measure) หรือระยะห่าง (Distance Measure) คือ วิธีการรวมกลุ่มแบบสมบูรณ์ (Complete Linkage) และระยะห่างยูคลิเดียน (Euclidean Distance) ซึ่งผู้วิเคราะห์สามารถเลือกใช้วิธีการรวมกลุ่มและการวัดความต่างด้วยวิธีอื่น ๆ ได้

การใช้คำสั่ง `hclust()` ดังกล่าวจะนำมาใช้สำหรับการจัดกลุ่มระหว่างตัวแปรสุ่มภายในเมทริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวอย่าง ซึ่งคำสั่งจะสามารถสร้างกราฟต้นไม้ (Dendrogram) เพื่อแนะนำการจัดกลุ่มของตัวแปรได้ สำหรับการจัดกลุ่มของตัวแปรในที่นี้จะพิจารณาจากระยะห่างของค่าสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร (การแสดงออกของยีน) โดยไม่พิจารณาเครื่องหมาย (Sign) ของค่าสหสัมพันธ์ ภายในเมทริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวอย่างของการแสดงออกของยีนระหว่างต่อมลูกหมากปกติและต่อมลูกหมากที่พบเซลล์มะเร็ง

ภายหลังการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง `hclust()` จะจัดกลุ่มตัวแปรด้วยการสลับตำแหน่งตัวแปร (การแสดงออกของยีน) ตามกราฟต้นไม้ทั้งในส่วนของตัวอย่างต่อมลูกหมากปกติและต่อมลูกหมากที่พบเซลล์มะเร็ง แล้วนำข้อมูลที่สลับตำแหน่งใหม่ไปคำนวณเมทริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวอย่างตามสมการที่ (2.28) อีกครั้ง ซึ่งพบว่าการวิเคราะห์กลุ่มโดยใช้วิธีการรวมกลุ่มแบบสมบูรณ์และการวัดความต่างด้วยระยะห่างยูคลิเดียน ทำให้เมทริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวอย่างที่จัดตัวแปรใหม่มีลักษณะใกล้เคียงกับเมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อก จึงสามารถใช้ตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอได้

สำหรับการคำนวณค่าสถิติทดสอบของตัวสถิติทดสอบ T_p เนื่องจากข้อมูลโรคมะเร็งต่อมลูกหมากมีขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน คือ $n_1 = 50$ และ $n_2 = 52$ จึงกำหนดขนาดของบล็อกร่วมเป็น $q = \lfloor \min(50-1, 52-1)/5 \rfloor = 9$. ค่าสถิติทดสอบและค่าพีของตัวสถิติทดสอบ $T_{BS}, T_{CQ}, T_{SKK},$ และ T_p แสดงอยู่ในตารางที่ 4.11 ซึ่งตามที่ปรากฏในตารางที่ 4.11 พบว่าตัวสถิติทดสอบทั้งหมดมีค่าพีน้อยกว่า 0.05 จึงปฏิเสธสมมุติฐานหลัก นั่นคือค่าเฉลี่ยของการแสดงออกของยีนระหว่างต่อมลูกหมากปกติและต่อมลูกหมากที่พบเซลล์มะเร็งมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

ตารางที่ 4.11 ค่าสถิติทดสอบและค่าพีของการทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของการแสดงออกของยีนระหว่างต่อมลูกหมากปกติและต่อมลูกหมากที่พบเซลล์มะเร็ง

ตัวสถิติทดสอบ	T_{BS}	T_{CQ}	T_{SKK}	T_p
ค่าสถิติทดสอบ	6.661	6.624	2.607	60.161
ค่าพี	< 0.001	< 0.001	0.0046	< 0.001
เวลาในการคำนวณ	1.05 วินาที	31.12 นาที	2.68 วินาที	0.17 วินาที

บทที่ 5

สรุปและอภิปรายผลการดำเนินงานวิจัย

สำหรับบทที่ 4 สรุปและอภิปรายผลการดำเนินงานวิจัย ได้นำเสนอข้อสรุปของตัวสถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน สำหรับข้อมูลมิติสูงที่นำเสนอในการวิจัยครั้งนี้ ในหัวข้อ 5.1 และข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยในอนาคต ในหัวข้อ 5.2

5.1 ข้อสรุปของการดำเนินงานวิจัย

การทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร ถ้าในกรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรเท่ากัน ตัวสถิติทดสอบที่ใช้ในการทดสอบสมมุติฐานจะมีการแจกแจงแม่นตรง (Exact Distribution) ด้วยการแจกแจงการแจกแจกโฮเทลลิ่งทีกำลังสอง และถ้าในกรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน ผู้วิจัยสามารถเลือกใช้การแจกแจงโดยประมาณของตัวสถิติทดสอบได้จากการนำเสนอของบรรดาเหล่านักสถิติทั้งหลายดังที่ได้อธิบายในหัวข้อที่ 2.1 แต่การทดสอบสมมุติฐานดังกล่าวจะเกิดปัญหาขึ้นเมื่อข้อมูลมีมิติสูง กล่าวคือเมื่อข้อมูลมีมิติสูงจะมีผลทำให้เมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผัน $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$ ได้

งานวิจัยนี้ได้นำเสนอสถิติทดสอบความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน สำหรับข้อมูลมิติสูง เพื่อทดสอบสมมุติฐานเชิงสถิติ $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$ เทียบกับ $H_1 : \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$ เมื่อข้อมูลสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงปรกติ p ตัวแปร และข้อมูลทั้งสองตัวอย่างเป็นอิสระกัน โดยข้อมูลมิติสูงหมายถึงข้อมูลที่มีจำนวนตัวแปรสุ่มมากกว่าผลรวมของขนาดตัวอย่างลบด้วยสอง หรือ $p > n_1 + n_2 - 2$ การพัฒนาตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอมีพื้นฐานมาจากแนวความคิดการเก็บรักษาข้อมูลหรือสารสนเทศจากเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่างให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ของ Jiamwattanapong and Chongcharoen (2017)

เป้าหมายที่สำคัญสำหรับการดำเนินงานวิจัยในครั้งนี้คือต้องการแก้ไขปัญหาเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผัน $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$ ได้ เมื่อข้อมูลมีมิติสูง โดยการใช้เมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}_{block}$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อกจากเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ มาแทนที่เมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ในตัวสถิติทดสอบ การใช้เมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}_{block}$ แทนเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ นั้นแม้ว่าจะทำให้ค่าความแปรปรวนร่วมที่อยู่นอกแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ บางส่วนไม่ถูกนำมาใช้ในตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอ แต่การแก้ไขปัญหาดังกล่าวนับว่าเป็นความพยายามที่ต้องการเก็บรักษาข้อมูลหรือสารสนเทศจากเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้อย่างเหมาะสม เพื่อให้สอดคล้องกับแนวความคิดของ Jiamwattanapong and Chongcharoen (2017) นอกจากนั้นการแก้ไขปัญหาดังกล่าวทำให้เมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}_{block}$ สามารถหาเมทริกซ์ผกผัน $\tilde{\mathbf{S}}_{block}^{-1}$ ได้ และทำให้สามารถประยุกต์ใช้การแจกแจงโดยประมาณของตัวสถิติทดสอบในกรณี $n_i \geq p$ หรือกรณีข้อมูลไม่มีมิติสูง มาเป็นพื้นฐานสำหรับการหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอ เพื่อที่สามารถแสดงให้เห็นว่าตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอสามารถลู่เข้าเชิงการแจกแจงสู่การแจกแจงปรกติมาตรฐานได้

ตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอมีการแจกแจงปรกติมาตรฐานโดยประมาณภายใต้สมมุติฐานหลักเมื่อจำนวนตัวแปรสุ่มมีจำนวนมากเมื่อเทียบกับขนาดตัวอย่าง โดยตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอมีคุณสมบัติไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การแปลงสเกลาร์และจากการศึกษาด้วยการจำลองข้อมูลพบว่าตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอมีระดับนัยสำคัญที่ได้รับเข้าใกล้ระดับนัยสำคัญที่กำหนดอย่างน่าพอใจในทุกสถานการณ์และทุกรูปแบบของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรที่ศึกษา ทั้งในกรณีขนาดตัวอย่างเท่ากันและไม่เท่ากัน ซึ่งผลการศึกษาดังกล่าวสามารถช่วยยืนยันได้ว่าตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอมีการแจกแจงปรกติมาตรฐานโดยประมาณจริง

ในส่วนกำลังการทดสอบที่ได้รับพบว่าตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอมีกำลังการทดสอบที่ได้รับใกล้เคียงกับตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ เมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรมีลักษณะเป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ และตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอมีกำลังการทดสอบที่ได้รับสูงกว่าตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ เมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรมีลักษณะเป็นเมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อก โดยตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอจะมีกำลังการทดสอบที่ได้รับเพิ่มขึ้นเมื่อขนาดตัวอย่างทั้งสองตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นเมื่อจำนวนตัวแปรสุ่มคงที่ หรือจำนวนตัวแปรสุ่มเพิ่มขึ้นเมื่อขนาดตัวอย่างทั้งสองตัวอย่างคงที่ หรือความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสุ่มมีระดับความสัมพันธ์เพิ่มขึ้นทั้งสองตัวอย่าง

สำหรับขั้นตอนการทดสอบสมมุติฐานทางสถิติด้วยตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอ มีรายละเอียดดังนี้

1) ขนาดตัวอย่างสุ่มต้องมีขนาดไม่น้อยกว่า 8 ทั้งสองตัวอย่าง หรือ $n_1, n_2 \geq 8$

2) ตรวจสอบว่าข้อมูลในแต่ละตัวอย่างเป็นอิสระกันหรือไม่

3) ตรวจสอบข้อกำหนดเบื้องต้นว่าข้อมูลในแต่ละตัวอย่างมีการแจกแจงปรกติหลายตัวแปร (Multivariate Normality) หรือไม่

4) ตรวจสอบว่าข้อมูลในแต่ละตัวอย่างเป็นเวกเตอร์สุ่มจากประชากรที่มีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรไม่เท่ากันหรือไม่

5) คำนวณเมทริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวอย่าง จากสมการที่ (2.28)

6) จัดตัวแปรสุ่มออกเป็นกลุ่ม ๆ โดยตัวแปรสุ่มที่มีความสัมพันธ์กันให้อยู่ในกลุ่มเดียวกัน โดยควรจัดตัวแปรสุ่มจนกระทั่งเมทริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวอย่างมีลักษณะใกล้เคียงกับเมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อก หรือใช้การวิเคราะห์กลุ่ม (Cluster Analysis) ด้วยคำสั่ง `hclust()` ในโปรแกรมอาร์ ซึ่งคำสั่งดังกล่าวจะช่วยจัดกลุ่มตัวแปรโดยพิจาณาจากระยะห่างของค่าสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร การจัดกลุ่มตัวแปรจะพิจารณาจากเมทริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวอย่างโดยไม่พิจารณาเครื่องหมาย (Sign) ของค่าสหสัมพันธ์

7) สลับตำแหน่งของตัวแปรสุ่มทั้ง 2 ตัวอย่าง ตามการจัดกลุ่มในกราฟเดมโดแกรม และพิจารณาว่าเมทริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวอย่างที่คำนวณใหม่อีกครั้ง มีลักษณะใกล้เคียงกับเมทริกซ์แนวเส้นทแยงมุมเป็นบล็อกหรือไม่ หากยังไม่ใกล้เคียงควรจัดกลุ่มตัวแปรอีกครั้งโดยเลือกวิธีการรวมกลุ่มหรือวิธีการวัดความต่าง ที่แตกต่างจากเดิม

8) กำหนดขนาดของบล็อกหรือเมทริกซ์ย่อย (q_k) จำนวน m ค่า โดยที่ $\sum_{k=1}^{m} q_k = p$ และมีความสอดคล้องกับข้อมูล โดยที่ $q_k \leq \min(n_1, n_2)/4$ และ $q_k \leq \min(n_1 - 1, n_2 - 1)/5$ สำหรับขนาดตัวอย่างเท่ากันและไม่เท่ากัน ตามลำดับ หรือเพื่อความสะดวกอาจกำหนดขนาดของบล็อกร่วมเป็น $q = \lfloor \min(n_1, n_2)/4 \rfloor$ หรือ $q = \lfloor \min(n_1 - 1, n_2 - 1)/5 \rfloor$ สำหรับขนาดตัวอย่างเท่ากันและไม่เท่ากัน ตามลำดับ

9) คำนวณค่าสถิติทดสอบ T_p

10) ถ้า $T_p \geq Z_{1-\alpha}$ จะปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญ α

5.2 ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยในอนาคต

การพัฒนาตัวสถิติทดสอบ T_p มีพื้นฐานมาจากการแจกแจงโดยประมาณของตัวสถิติทดสอบ T^2 ในสมการที่ (2.2) โดยในงานวิจัยนี้ได้ใช้การแจกแจงโดยประมาณของ Krishnamoorthy and Yu (2004) ซึ่งจากการทบทวนวรรณกรรมพบว่าในปัจจุบันการแจกแจงโดยประมาณดังกล่าวมีความเหมาะสมมากที่สุดสำหรับการทดสอบสมมุติฐานความเท่ากันของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 ประชากร เมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมระหว่าง 2 ประชากรไม่เท่ากัน ดังนั้นหากในอนาคตมีการนำเสนอการแจกแจงโดยประมาณที่มีประสิทธิภาพเพิ่มมากขึ้นหรือมีการปรับปรุงการแจกแจงแม่นตรงของ D. d. Nel et al. (1990) ให้อยู่ในรูปที่ไม่ซับซ้อนและอยู่ในวิสัยที่จะคำนวณได้โดยสะดวก ก็เหมาะสมที่จะนำการแจกแจงโดยประมาณหรือการแจกแจงแม่นตรงเหล่านั้นมาปรับใช้กับตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอในครั้งนี้

สืบเนื่องจากการใช้การแจกแจงโดยประมาณของ Krishnamoorthy and Yu (2004) ซึ่งได้มีข้อแนะนำเกี่ยวกับความเหมาะสมของการแจกแจงโดยประมาณสำหรับบางรูปแบบของความสัมพันธ์ระหว่างขนาดตัวอย่างและจำนวนตัวแปรสุ่ม โดยการวิจัยครั้งนี้ได้แนะนำการเลือกขนาดของบล็อกร่วมของเมทริซ์ย่อย $\tilde{\mathbf{S}}_{kk}$ จากเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ คือ $q=\lfloor \min(n_1,n_2)/4 \rfloor$ สำหรับขนาดตัวอย่างเท่ากัน และ $q=\lfloor \min(n_1-1,n_2-1)/5 \rfloor$ สำหรับขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน เพื่อให้สอดคล้องกับคำแนะนำของ Krishnamoorthy and Yu (2004) แต่ในทางหลักการแล้วตัวสถิติทดสอบที่นำเสนอสามารถเลือกขนาดของบล็อกหรือเมทริกซ์ย่อยจากเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ ได้สูงสุดถึงขนาด q_k โดยที่ $1 \le q_k \le \nu_k - 6$ เมื่อ ν_k คือ องศาเสรีของ Krishnamoorthy and Yu (2004) ภายใต้ตัวแปรสุ่มที่จัดอยู่ในบล็อกหรือเมทริกซ์ย่อยที่ k , ทุกค่าของ k , $k=1,2,\ldots,m$ ซึ่งคำนวณได้จากสมการที่ (3.14) ดังนั้นแล้วอาจศึกษาประสิทธิภาพของตัวสถิติทดสอบ T_p เมื่อขนาดของบล็อกหรือเมทริกซ์ย่อยที่เลือกจากเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{S}}$ มีขนาดสูงสุดเท่าที่เป็นไปได้ในแต่ละสถานการณ์

บรรณานุกรม

Bai, Z., and Saranadasa, H. (1996). Effect Of High Dimension: By An Example Of A Two Sample Problem. *Statistica Sinica,* 6(2), 311–329.

Bühlmann, P., and Geer, S. v. d. (2011). *Statistics for High–Dimensional Data: Methods, Theory and Applications*: Springer.

Chaipitak, S., and Chongcharoen, S. (2013). A Test for Testing the Equality of Two Covariance Matrices for High–dimensional Data. *Journal of Applied Sciences,* 13(2), 270–277. doi:10.3923/jas.2013.270.277

Chen, S. X., and Qin, Y.–L. (2010). A two–sample test for high–dimensional data with applications to gene–set testing. *Ann. Statist.,* 38(2), 808–835. doi:10.1214/09–AOS716

Deepak, N. A., David, E. F., Javkhlan–Ochir, G., Guido, M., Ralf, B., Pearlly, Y., and Shili, L. (2015). MethylCapSig: Detection of Differentially Methylated Regions using MethylCap–Seq Data (Version 1.0.1).
Retrieved from https://CRAN.R–project.org/package=MethylCapSig

Dempster, A. P. (1958). A High Dimensional Two Sample Significance Test. *Ann. Math. Statist., 29*(4), 995–1010. doi:10.1214/aoms/1177706437

Dettling, M., and Bühlmann, P. (2002). Supervised clustering of genes. *Genome Biology,* 3(12), research0069.0061–research0069.0015.

Dongjun, C., Hyonho, C., and Sunduz, K. (2018). Sparse Partial Least Squares (SPLS) Regression and Classification (Version 2.2–2). Retrieved from https://CRAN.R–project.org/package=spls

Eaton, M. L., and Perlman, M. D. (1973). The Non–Singularity of Generalized Sample Covariance Matrices. *Ann. Statist.,* 1(4), 710–717. doi:10.1214/aos/1176342465

Gregory, K. B., Carroll, R. J., Baladandayuthapani, V., and Lahiri, S. N. (2015). A Two–Sample Test for Equality of Means in High Dimension. *Journal of the American Statistical Association,* 110(510), 837–849.
doi:10.1080/01621459.2014.934826

James, G. S. (1954). Tests of Linear Hypotheses in Univariate and Multivariate Analysis

when the Ratios of the Population Variances are Unknown. *Biometrika,* 41(1/2), 19–43. doi:10.2307/2333003

Jiamwattanapong, K., and Chongcharoen, S. (2017). A Two–Sample Test for Mean Vectors in High–Dimensional Data. *Applied Science and Innovative Research,* 1(2), 118–130. doi:http://dx.doi.org/10.22158/asir.v1n2p118

Johansen, S. (1980). The Welch–James Approximation to the Distribution of the Residual Sum of Squares in a Weighted Linear Regression. *Biometrika,* 67(1), 85–92. doi:10.2307/2335320

Kawasaki, T., and Seo, T. (2015). A Two Sample Test for Mean Vectors with Unequal Covariance Matrices. *Communications in Statistics – Simulation and Computation,* 44(7), 1850–1866. doi:10.1080/03610918.2013.824587

Kim, S.–J. (1992). A Practical Solution to the Multivariate Behrens–Fisher Problem. *Biometrika,* 79(1), 171–176. doi:10.2307/2337157

Krishnamoorthy, K., and Xia, Y. (2006). On Selecting Tests for Equality of Two Normal Mean Vectors. *Multivariate Behavioral Research,* 41(4), 533–548. doi:10.1207/s15327906mbr4104_5

Krishnamoorthy, K., and Yu, J. (2004). Modified Nel and Van der Merwe test for the multivariate Behrens–Fisher problem. *Statistics & Probability Letters,* 66(2), 161–169. doi:https://doi.org/10.1016/j.spl.2003.10.012

Nel, D. d., van der Merwe, C. A., and Moser, B. K. (1990). The exact distributions of the univariate and multivariate behrens–fisher statistics with a comparison of several solutions in the univariate case. *Communications in Statistics – Theory and Methods,* 19(1), 279–298. doi:10.1080/03610929008830200

Nel, D. G., and Van Der Merwe, C. A. (1986). A solution to the multivariate behrens–fisher problem. *Communications in Statistics – Theory and Methods,* 15(12), 3719–3735. doi:10.1080/03610928608829342

Park, J., and Sinha, B. (2009). Some Aspects of Multivariate Behrens–Fisher Problem. *Calcutta Statistical Association Bulletin,* 61(1–4), 125–142. doi:10.1177/0008068320090107

Richard, A. J., and Dean, W. W. (2014). *Applied Multivariate Statistical Analysis* (6 ed.). London: Prentice–Hall.

Singh, D., Febbo, P. G., Ross, K., Jackson, D. G., Manola, J., Ladd, C., . . . Sellers, W. R. (2002). Gene expression correlates of clinical prostate cancer behavior. *Cancer Cell,* 1(2), 203–209. doi:10.1016/S1535–6108(02)00030–2

Srivastava, M. S. (2002). *Methods of multivariate statistics* New York: Wiley–Interscience.

Srivastava, M. S. (2009). A test for the mean vector with fewer observations than the dimension under non–normality. *Journal of Multivariate Analysis,* 100(3), 518–532. doi:https://doi.org/10.1016/j.jmva.2008.06.006

Srivastava, M. S., and Du, M. (2008). A test for the mean vector with fewer observations than the dimension. *Journal of Multivariate Analysis,* 99(3), 386–402. doi:https://doi.org/10.1016/j.jmva.2006.11.002

Srivastava, M. S., Katayama, S., and Kano, Y. (2013). A two sample test in high dimensional data. *Journal of Multivariate Analysis,* 114, 349–358. doi:https://doi.org/10.1016/j.jmva.2012.08.014

Venables, W. N., and Ripley, B. D. (2002). *Modern Applied Statistics with S* (4 ed.). New York: Springer.

Yanagihara, H., and Yuan, K.–H. (2005). Three Approximate Solutions to the Multivariate Behrens–Fisher Problem. *Communications in Statistics – Simulation and Computation,* 34(4), 975–988. doi:10.1080/03610910500308396

Yao, J., Zheng, S., and Bai, Z. (2015). *Large Sample Covariance Matrices and High–Dimensional Data Analysis*. New York: Cambridge University Press.

Yao, Y. (1965). An Approximate Degrees of Freedom Solution to the Multivariate Behrens Fisher Problem. *Biometrika,* 52(1/2), 139–147. doi:10.2307/2333819

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

บทนิยามและทฤษฎีที่ใช้ในงานวิจัย

ภาคผนวก ก

บทนิยามและทฤษฎีที่ใช้ในงานวิจัย

บทนิยามที่ 1 การทดสอบไม่แปรเปลี่ยน (Invariant Test)

ให้ $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ เป็นตัวอย่างจาก $P\in\mathrm{P}$ และ Υ ซึ่งเป็นกลุ่มของการแปลงแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one–to–one Transformations) ของ x แล้วสถิติทดสอบ $T(x)$ จะเป็นการทดสอบไม่แปรเปลี่ยนภายใต้ Υ ก็ต่อเมื่อ $T(g(x))=T(x)$ สำหรับทุกค่าของ x และ g

ทฤษฎีที่ 1 การแจกแจงเอฟ (F – Distribution)

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเอฟ (F – Distribution) ด้วยองศาเสรี a และ b แล้วค่าเฉลี่ย (Expected) ความแปรปรวน (Variance) และโมเมนต์ศูนย์กลาง (Central Moment) ที่ 3 ของตัวแปรสุ่ม X คือ (Jiamwattanapong & Chongcharoen, 2017)

$$E(X) = \frac{b}{b-2}, \quad b>2$$

$$Var(X) = \frac{2b^2(a+b-2)}{a(b-2)^2(b-4)}, \quad b>4$$

และ $$E(X-E(X))^3 = \frac{8b^3(a+b-2)(2a+b-2)}{a^2(b-2)^3(b-4)(b-6)}, \quad b>6$$

ทฤษฎีที่ 2 ทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลางของเลียปูนอฟ (Lyapunov's Central Limit Theorem) สมมุติว่า $x_{n1},x_{n2},\ldots,x_{nr_n}$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นค่าจริงและเป็นอิสระกันสำหรับแต่ละ n กำหนด $S_n=x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nr_n}$ แล้ว $E(x_{nk})=0$ และ $Var(x_{nk})=\sigma_{nk}^2=E(x_{nk}^2)<\infty$ กำหนดให้ $s_n^2=\sum_{k=1}^{r_n}\sigma_{nk}^2$ (Jiamwattanapong & Chongcharoen, 2017)

ถ้าเงื่อนไขของเลียปูนอฟ (Lyapunov's Condition) คือ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{r_n}\frac{1}{S_n^{2+\delta}}E\left(|x_{nk}|^{2+\delta}\right)=0$ เป็นจริงสำหรับบางค่า เมื่อ $\delta>0$ แล้ว $\frac{S_n}{s_n}\xrightarrow{d}N(0,1)$

ภาคผนวก ข

ขนาด จำนวนและตำแหน่งอย่างสุ่มของบล็อกหรือเมทริกซ์ย่อย บนแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\mathfrak{Z}_1$ และ $\mathfrak{Z}_2$ สำหรับขนาดตัวอย่างเท่ากัน

ตารางภาคผนวก ข ที่ 1 ขนาด จำนวนและตำแหน่งอย่างสุ่มของเมทริกซ์ย่อยบนแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\mathfrak{I}_1$ และ $\mathfrak{I}_2$ สำหรับขนาดตัวอย่างเท่ากัน

$(p;n_1,n_2)$	ลักษณะ	เมทริกซ์ย่อย								
		$\mathfrak{R}_1$ หรือ $\mathfrak{R}_2$			$\mathfrak{R}_3$ หรือ $\mathfrak{R}_4$			$\mathfrak{R}_5$ หรือ $\mathfrak{R}_6$		
$(60;20,20)$	ขนาด	5	4	3	5	4	3	5	4	2
	จำนวน	2	1	1	3	1	1	3	1	1
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	12,6	4	8	14,9,13	5	11	2,1,10	7	3
$(100;20,20)$	ขนาด	5	4	3	5	4	2	5	4	3
	จำนวน	3	3	2	3	3	1	4	3	2
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	3,13,21	19,12,15	8,10	22,16,7	11,18,14	1	24,23,9,6	4,17,5	2,20
$(100;40,40)$	ขนาด	10	8	6	10	8	6	10	8	4
	จำนวน	2	1	1	2	1	1	2	1	1
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	12,3	4	8	6,2	7	5	1,10	9	11
$(200;20,20)$	ขนาด	5	4	3	5	4	2	5	4	3
	จำนวน	9	5	1	9	3	1	10	5	1
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	29,2,27,3,44,30,34,1,24	8,13,37,28,36	41	19,33,9,4,20,16,14,7,5	42,22,15	43	40,31,23,10,35,17,26,21,11,32	18,6,38,39,25	12

ตารางภาคผนวก ข ที่ 1 ขนาด จำนวนและตำแหน่งอย่างสุ่มของเมทริกซ์ย่อยบนแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\mathfrak{I}_1$ และ $\mathfrak{I}_2$ สำหรับขนาดตัวอย่างเท่ากัน (ต่อ)

$(p;n_1,n_2)$	ลักษณะ	เมทริกซ์ย่อย								
		$\mathfrak{R}_1$ หรือ $\mathfrak{R}_2$			$\mathfrak{R}_3$ หรือ $\mathfrak{R}_4$			$\mathfrak{R}_5$ หรือ $\mathfrak{R}_6$		
$(200;40,40)$	ขนาด	10	8	6	10	7	6	10	9	8
	จำนวน	3	2	2	5	2	2	4	2	1
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	10,3,23	14,17	5,16	6,4,1,20,8	12,13	2,11	22,19,7,18	15,9	21
$(200;60,60)$	ขนาด	15	14	12	15	12	7	15	14	10
	จำนวน	2	2	1	2	2	1	3	1	1
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	14,6	5,3	15	4,2	9,7	12	10,13,1	11	8
$(400;20,20)$	ขนาด	5	4	3	5	4	2	5	4	3
	จำนวน	24	3	1	23	3	1	25	2	1
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	11,1,45,81, 49,68,47, 19,15,78, 20,77,51, 42,8,61,82, 44,75,73, 48,71,29,25	33,26,76	16	22,62,52, 41,65,3,27, 80,38,63, 13,46,70, 56,24,7,28, 32,35,9,2, 30,79	39,55,37	6	59,66,5,50, 60,43,21,54, 12,58,4,67, 74,53,83,14, 31,72,18,23, 40,36,69, 17,57	10,64	34

ตารางภาคผนวก ข ที่ 1 ขนาด จำนวนและตำแหน่งอย่างสุ่มของเมทริกซ์ย่อยบนแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\mathfrak{I}_1$ และ $\mathfrak{I}_2$ สำหรับขนาดตัวอย่างเท่ากัน (ต่อ)

$(p;n_1,n_2)$	ลักษณะ	เมทริกซ์ย่อย								
		$\mathfrak{R}_1$ หรือ $\mathfrak{R}_2$			$\mathfrak{R}_3$ หรือ $\mathfrak{R}_4$			$\mathfrak{R}_5$ หรือ $\mathfrak{R}_6$		
$(400;40,40)$	ขนาด	10	9	7	10	8	6	10	9	8
	จำนวน	9	3	2	8	4	1	9	5	2
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	21,32,5, 14,19,8, 43,10,39	22,29,31	18,17	9,1,7,26, 37,27,2, 42	36,24,33, 13	11	34,15,20, 35,6,25, 38,41,4	28,3,40, 16,23	12,30
$(400;60,60)$	ขนาด	15	14	13	15	12	10	15	14	12
	จำนวน	6	2	1	6	2	1	7	2	1
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	5,26,7,27, 18,19	14,23	25	1,6,13,12, 8,10	16,28	22	24,21,4, 15,20,9,3	11,17	2
$(400;80,80)$	ขนาด	20	18	15	20	15	12	20	19	16
	จำนวน	4	3	1	3	2	1	3	3	2
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	2,21,4,10	17,5,11	20	22,14,12	1,9	19	8,15,7	18,6,13	3,16

ภาคผนวก ค

ขนาด จำนวนและตำแหน่งอย่างสุ่มของบล็อกหรือเมทริกซ์ย่อย บนแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\mathfrak{I}_1$ และ $\mathfrak{I}_2$ สำหรับขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน

ตารางภาคผนวก ค ที่ 1 ขนาด จำนวนและตำแหน่งอย่างสุ่มของเมทริกซ์ย่อยบนแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\mathfrak{I}_1$ และ $\mathfrak{I}_2$ สำหรับขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน

$(p;n_1,n_2)$	ลักษณะ	เมทริกซ์ย่อย								
		$\mathfrak{R}_1$ หรือ $\mathfrak{R}_2$			$\mathfrak{R}_3$ หรือ $\mathfrak{R}_4$			$\mathfrak{R}_5$ หรือ $\mathfrak{R}_6$		
$(60;26,31)$	ขนาด	5	4	2	5	4	3	5	4	3
	จำนวน	3	1	1	2	1	1	3	1	1
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	6,14,8	3	11	2,5	1	12	4,9,13	10	7
$(100;26,31)$	ขนาด	5	4	3	5	4	2	5	4	3
	จำนวน	3	3	2	3	3	1	4	3	2
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	13,18,2	17,8,1	15,3	12,24,19	7,22,10	14	11,4,6,9	20,21,23	16,5
$(100;36,46)$	ขนาด	7	6	4	7	5	3	7	6	5
	จำนวน	3	1	1	3	2	2	3	1	1
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	9,10,17	7	13	5,16,12	3,4	8,15	1,6,2	14	11
$(200;26,31)$	ขนาด	5	4	3	5	4	3	5	4	2
	จำนวน	10	5	1	9	5	1	9	3	1
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	11,26,17, 4,40,34,2, 28,41,38	19,15,3,3 2,42	10	7,33,12, 20,36,8, 30,31,5	9,21,35,2 5,6	43	27,39,23, 18,16,29, 13,44,22,	37,14,1	24

ตารางภาคผนวก ค ที่ 1 ขนาด จำนวนและตำแหน่งอย่างสุ่มของเมทริกซ์ย่อยบนแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\mathfrak{I}_1$ และ $\mathfrak{I}_2$ สำหรับขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน (ต่อ)

$(p;n_1,n_2)$	ลักษณะ	เมทริกซ์ย่อย								
		$\mathfrak{R}_1$ หรือ $\mathfrak{R}_2$			$\mathfrak{R}_3$ หรือ $\mathfrak{R}_4$			$\mathfrak{R}_5$ หรือ $\mathfrak{R}_6$		
$(200;46,51)$	ขนาด	9	7	5	9	8	7	9	6	4
	จำนวน	5	3	1	4	3	1	4	3	2
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	7,18,24, 26,17	8,3,13	14	16,25,4,5	2,6,12	19	9,1,10,23	20,21,22	15,11
$(200;66,76)$	ขนาด	13	12	9	13	10	8	13	12	8
	จำนวน	3	2	1	3	1	1	3	2	1
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	13,9,5	7,14	6	17,1,4	16	2	12,10,3	8,11	15
$(400;26,31)$	ขนาด	5	4	3	5	4	3	5	4	2
	จำนวน	25	3	1	23	2	1	24	3	1
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	13,19,10,6,42, 31,71,48,28, 17,65,4,61, 27,29,23,78, 2,20,35,30, 81,11,25,50	62,68,52	26	8,64,21,66, 70,82,47,63, 57,18,1,5, 75,67,14,37, 43,33,45,12, 39,79,38	55,49	16	22,54,74,24, 58,32,51,73, 3,76,34,60, 83,59,56,41, 40,36,7,53, 44,46,9,77	80,69,72	15

ตารางภาคผนวก ค ที่ 1 ขนาด จำนวนและตำแหน่งอย่างสุ่มของเมทริกซ์ย่อยบนแนวเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ $\mathfrak{I}_1$ และ $\mathfrak{I}_2$ สำหรับขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน (ต่อ)

$(p;n_1,n_2)$	ลักษณะ	เมทริกซ์ย่อย								
		$\mathfrak{R}_1$ หรือ $\mathfrak{R}_2$			$\mathfrak{R}_3$ หรือ $\mathfrak{R}_4$			$\mathfrak{R}_5$ หรือ $\mathfrak{R}_6$		
$(400;46,51)$	ขนาด	9	8	7	9	7	5	9	8	6
	จำนวน	10	4	1	11	3	1	12	4	1
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	33,43,34, 47,6,37,18, 25,40,17	41,3,31, 46	2	13,9,45, 26,28,5, 22,44,36, 15,30	32,8,29	10	1,16,42, 12,21,27, 19,4,23, 35,7,20	24,39,38, 14	11
$(400;66,76)$	ขนาด	13	10	8	13	12	10	13	12	9
	จำนวน	7	3	1	7	1	1	8	3	2
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	25,10,8, 26,1,33,4	15,20,14	13	6,18,2,32, 24,5,3	9	21	17,30,27, 19,29,11, 23,7	28,31,16	22,12
$(400;86,106)$	ขนาด	17	15	10	17	15	8	17	16	12
	จำนวน	5	3	1	5	2	2	5	2	1
	ตำแหน่งอย่างสุ่ม	5,14,21, 16,1	25,2,26	7	4,17,8,3, 19	15,6	18,11	13,10,12, 22,23	9,20	24

ภาคผนวก ง

คำสั่งโปรแกรมอาร์ที่ใช้ในการวิจัย

ภาคผนวก ง

คำสั่งโปรแกรมอาร์ที่ใช้ในการวิจัย

คำสั่งที่ 1 คำสั่งสำหรับคำนวณค่าสถิติทดสอบและค่าพีของตัวสถิติทดสอบ T_{BS} และ T_p

```
#Bai & Saranadasa(1996) Test#
BS2test = function(data1,data2){
      data1 = as.matrix(data1)
      data2 = as.matrix(data2)
      p = ncol(data1)
      n1 = nrow(data1)
      n2 = nrow(data2)
      m1 = colMeans(data1)
      m2 = colMeans(data2)
      S1 = cov(data1)
      S2 = cov(data2)
      trS1 = sum(diag(S1))
      trS2 = sum(diag(S2))
      Qn = ((t(m1-m2)%*%(m1-m2))-(trS1/n1)-(trS2/n2))/sqrt(p)
      a21 = (((n1-1)^2)/(p*(n1-2)*(n1)))*((sum(diag(S1%*%S1)))-
((trS1^2)/(n1-1)))
      a22 = (((n2-1)^2)/(p*(n2-2)*(n2)))*((sum(diag(S2%*%S2)))-
((trS2^2)/(n2-1)))
      sigmaQ =
((2*a21)/(n1^2))+((2*a22)/(n2^2))+((4*sum(diag(S1%*%S2)))/(p*n1*n2))
      TBS2 = Qn/sqrt(sigmaQ)
      pvalue = pnorm(TBS2,lower.tail = FALSE)
      result = list(test = TBS2,pvalue = pvalue)
      result
}

#Propose Test#
Ptest = function(data1,data2){
      data1 = as.matrix(data1)
      data2 = as.matrix(data2)
      p = ncol(data1)
      n1 = nrow(data1)
      n2 = nrow(data2)
      mean1 = colMeans(data1)
      mean2 = colMeans(data2)
      s1 = cov(data1)
      s2 = cov(data2)
      shat = (s1/n1)+(s2/n2)
      Yk = rep(0,m)
      EYk = rep(0,m)
      VarYk = rep(0,m)
      dfv = rep(0,m)
      for(i in 1:m)
      {
            m1 = mean1[first[i]:last[i]]
            m2 = mean2[first[i]:last[i]]
            shatt = shat[first[i]:last[i],first[i]:last[i]]
```

```
            A1 = s1[first[i]:last[i],first[i]:last[i]]
            A2 = s2[first[i]:last[i],first[i]:last[i]]
            Yk[i] = (t(m1-m2))%*%solve(shatt)%*%(m1-m2)
            b1 = solve(shatt)%*%(A1/n1)
            b2 = solve(shatt)%*%(A2/n2)
            low = (sum(diag(b1%*%b1))+sum(diag(b1))^2)/(n1-
1)+(sum(diag(b2%*%b2))+sum(diag(b2))^2)/(n2-1)
            dfv[i] = (size[i]+(size[i]^2))/low
            EYk[i] = (dfv[i]*size[i])/(dfv[i]-size[i]-1)
            VarYk[i] = (2*size[i]*(dfv[i]^2)*(dfv[i]-1))/(((dfv[i]-
size[i]-1)^2)*(dfv[i]-size[i]-3))
      }
      TP = (sum(Yk)-sum(EYk))/sqrt(sum(VarYk))
      pvalue = pnorm(TP,lower.tail = FALSE)
      result = list(test = TP,pvalue = pvalue)
      result
}
```

คำสั่งที่ 2 คำสั่งสำหรับคำนวณค่าระดับนัยสำคัญที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_1$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_2$ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน กรณี $q=1$ (บางส่วนของตารางที่ 4.1)

```
library(MASS)
library(magic)
library(MethylCapSig)
M = 10000
old <- Sys.time()
variable = c(60,rep(100,2),rep(200,3),rep(400,4))
sample = c(20,20,40,20,40,60,20,40,60,80)
COUNT1 = array(rep(0,10*4),dim=c(10,4))
for(h in 1:10)
{
      p = variable[h]
      n1 = sample[h]
      n2 = sample[h]
      qk = 1
      D = diag(p)
      W = diag(p)
      for(i in 1:p)
      {
            diag(D)[i] = 2+((p-i+1)/p)
            diag(W)[i] = 4+((p-i+1)/p)
      }
      sigma1 = D
      sigma2 = W
      mu1 = rep(0,p)
      mu2 = rep(0,p)
      a = floor(p/qk)
      if(p%%qk == 0) size = c(rep(qk,a))
      if(p%%qk != 0) size = c(rep(qk,a),p-(qk*a))
      m = length(size)
      first = rep(0,m)
      last = rep(0,m)
```

```
      for(i in 1:m)
      {
            if(i==1) (first[i] = 1) && (last[i] = size[i])
            if(i!=1) (first[i] = first[i-1]+size[i-1]) && (last[i] =
last[i-1]+size[i])
      }
      set.seed(2^31-1)
      for(k in 1:M)
      {
            data1 = mvrnorm(n1,mu1,sigma1)
            data2 = mvrnorm(n2,mu2,sigma2)
            BS = BStest(data1,data2)
            if(BS$pvalue <= 0.05) COUNT1[h,1] = COUNT1[h,1]+1

            ChenQin = cqtest(data1,data2)
            if(ChenQin[2] <= 0.05) COUNT1[h,2] = COUNT1[h,2]+1

            skk = skktest(data1,data2)
            if(skk[2] <= 0.05) COUNT1[h,3] = COUNT1[h,3]+1

            P = Ptest(data1,data2)
            if(P$pvalue <= 0.05) COUNT1[h,4] = COUNT1[h,4]+1
      }
}
COUNT1 = COUNT1/M
COUNT1
new <- Sys.time() - old
print(new)
```

คำสั่งที่ 3 คำสั่งสำหรับคำนวณค่าระดับนัยสำคัญที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_3$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_4$ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน (บางส่วนของตารางที่ 4.2)

```
library(MASS)
library(magic)
library(MethylCapSig)
M = 10000
old <- Sys.time()
variable = c(60,rep(100,2),rep(200,3),rep(400,4))
sample = c(20,20,40,20,40,60,20,40,60,80)
COUNT1 = array(rep(0,10*4),dim=c(10,4))
for(h in 1:10)
{
      p = variable[h]
      n1 = sample[h]
      n2 = sample[h]
      qk = floor(sample[h]/4)
      p1 = qk
      if(p%%p1 == 0) p2 = 0
      if(p%%p1 != 0) p2 = p%%p1
      numberofblock1 = floor(p/qk)
      R11 = diag(p1)
      R12 = diag(p1)
      R21 = diag(p2)
      R22 = diag(p2)
```

```
      for(i in 1:p1)
      {
            for(j in 1:p1)
            {
                  R11[i,j] = ((-1)^(i+j))*((0.2)^abs(i-j)^0.1)
                  R12[i,j] = ((-1)^(i+j))*((0.4)^abs(i-j)^0.1)
            }
      }
      if(p2 != 0) for(i in 1:p2)
            {
                  for(j in 1:p2)
                  {
                        R21[i,j] = ((-1)^(i+j))*((0.2)^abs(i-j)^0.1)
                        R22[i,j] = ((-1)^(i+j))*((0.4)^abs(i-j)^0.1)
                  }
            }
      D = diag(p)
      W = diag(p)
      for(i in 1:p)
      {
            diag(D)[i] = 2+((p-i+1)/p)
            diag(W)[i] = 4+((p-i+1)/p)
      }
      D = D^(1/2)
      W = W^(1/2)
      if(p2 == 0) sigma1 = D%*%adiag(diag(numberofblock1)%x%R11)%*%D
      if(p2 == 0) sigma2 = W%*%adiag(diag(numberofblock1)%x%R12)%*%W
      if(p2 != 0) sigma1 =
D%*%adiag(diag(numberofblock1)%x%R11,R21)%*%D
      if(p2 != 0) sigma2 =
W%*%adiag(diag(numberofblock1)%x%R12,R22)%*%W
      mu1 = rep(0,p)
      mu2 = rep(0,p)
      a = floor(p/qk)
      if(p%%qk == 0) size = c(rep(qk,a))
      if(p%%qk != 0) size = c(rep(qk,a),p-(qk*a))
      m = length(size)
      first = rep(0,m)
      last = rep(0,m)
      for(i in 1:m)
      {
            if(i==1) (first[i] = 1) && (last[i] = size[i])
            if(i!=1) (first[i] = first[i-1]+size[i-1]) && (last[i] =
last[i-1]+size[i])
      }
      set.seed(2^31-1)
      for(k in 1:M)
      {
            data1 = mvrnorm(n1,mu1,sigma1)
            data2 = mvrnorm(n2,mu2,sigma2)
            BS = BStest(data1,data2)
            if(BS$pvalue <= 0.05) COUNT1[h,1] = COUNT1[h,1]+1

            ChenQin = cqtest(data1,data2)
            if(ChenQin[2] <= 0.05) COUNT1[h,2] = COUNT1[h,2]+1

            skk = skktest(data1,data2)
            if(skk[2] <= 0.05) COUNT1[h,3] = COUNT1[h,3]+1
```

```
            P = Ptest(data1,data2)
            if(P$pvalue <= 0.05) COUNT1[h,4] = COUNT1[h,4]+1
      }
}
COUNT1 = COUNT1/M
COUNT1
new <- Sys.time() - old
print(new)
```

คำสั่งที่ 4 คำสั่งสำหรับคำนวณกำลังการทดสอบที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_7$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_8$ เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน (บางส่วนของตารางที่ 4.9)

```
library(MASS)
library(magic)
library(MethylCapSig)
M = 10000
old <- Sys.time()
variable = c(60,rep(100,2),rep(200,3),rep(400,4))
sample1 = c(26,26,36,26,46,66,26,46,66,86)
sample2 = c(31,31,46,31,51,76,31,51,76,106)
COUNT1 = array(rep(0,10*4),dim=c(10,4))
for(h in 1:10)
{
      p = variable[h]
      n1 = sample1[h]
      n2 = sample2[h]
      qk = floor((sample1[h]-1)/5)
      p1 = qk
      if(p%%p1 == 0) p2 = 0
      if(p%%p1 != 0) p2 = p%%p1
      numberofblock1 = floor(p/qk)
      R11 = diag(p1)
      R12 = diag(p1)
      R21 = diag(p2)
      R22 = diag(p2)
      for(i in 1:p1)
      {
            for(j in 1:p1)
            {
                  R11[i,j] = ((-1)^(i+j))*((0.9)^abs(i-j)^0.1)
                  R12[i,j] = ((-1)^(i+j))*((0.95)^abs(i-j)^0.1)
            }
      }
      if(p2 != 0) for(i in 1:p2)
            {
                  for(j in 1:p2)
                  {
                        R21[i,j] = ((-1)^(i+j))*((0.9)^abs(i-j)^0.1)
                        R22[i,j] = ((-1)^(i+j))*((0.95)^abs(i-j)^0.1)
                  }
            }
      D = diag(p)
      W = diag(p)
```

```
      for(i in 1:p)
      {
            diag(D)[i] = 2+((p-i+1)/p)
            diag(W)[i] = 4+((p-i+1)/p)
      }
      D = D^(1/2)
      W = W^(1/2)
      if(p2 == 0) sigma1 = D%*%adiag(diag(numberofblock1)%x%R11)%*%D
      if(p2 == 0) sigma2 = W%*%adiag(diag(numberofblock1)%x%R12)%*%W
      if(p2 != 0) sigma1 =
D%*%adiag(diag(numberofblock1)%x%R11,R21)%*%D
      if(p2 != 0) sigma2 =
W%*%adiag(diag(numberofblock1)%x%R12,R22)%*%W
      mu1 = rep(0,p)
      mu2 = rep(0,p)
      set.seed(2^31-1)
      pp = p/2
      nu = runif(pp,-0.5,0.5)
      for(r in 1:pp)
      {
            mu2[2*r] = nu[r]
      }
      a = floor(p/qk)
      if(p%%qk == 0) size = c(rep(qk,a))
      if(p%%qk != 0) size = c(rep(qk,a),p-(qk*a))
      m = length(size)
      first = rep(0,m)
      last = rep(0,m)
      for(i in 1:m)
      {
            if(i==1) (first[i] = 1) && (last[i] = size[i])
            if(i!=1) (first[i] = first[i-1]+size[i-1]) && (last[i] =
last[i-1]+size[i])
      }
      set.seed(2^31-1)
      for(k in 1:M)
      {
            data1 = mvrnorm(n1,mu1,sigma1)
            data2 = mvrnorm(n2,mu2,sigma2)
            BS = BStest(data1,data2)
            if(BS$pvalue <= 0.05) COUNT1[h,1] = COUNT1[h,1]+1

            ChenQin = cqtest(data1,data2)
            if(ChenQin[2] <= 0.05) COUNT1[h,2] = COUNT1[h,2]+1

            skk = skktest(data1,data2)
            if(skk[2] <= 0.05) COUNT1[h,3] = COUNT1[h,3]+1

            P = Ptest(data1,data2)
            if(P$pvalue <= 0.05) COUNT1[h,4] = COUNT1[h,4]+1
      }

}
COUNT1 = COUNT1/M
COUNT1
new <- Sys.time() - old
print(new)
```

คำสั่งที่ 5 คำสั่งสำหรับคำนวณค่าระดับนัยสำคัญที่ได้รับ กรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร $\boldsymbol{\Sigma}_9$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_{10}$ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน (บางส่วนของตารางที่ 4.5)

```
library(MASS)
library(magic)
library(MethylCapSig)
M = 10000
scale1 = c(5,4,3,5,4,3,5,4,2)
number1 = c(2,1,1,3,1,1,3,1,1)
location1 = c(12,6,4,8,14,9,13,5,11,2,1,10,7,3)
scale2 = c(5,4,3,5,4,2,5,4,3)
number2 = c(3,3,2,3,3,1,4,3,2)
location2=c(3,13,21,19,12,15,8,10,22,16,7,11,18,14,1,24,23,9,6,4,17,5
,2,20)
scale3 = c(10,8,6,10,8,6,10,8,4)
number3 = c(2,1,1,2,1,1,2,1,1)
location3 = c(12,3,4,8,6,2,7,5,1,10,9,11)
scale4 = c(5,4,3,5,4,2,5,4,3)
number4 = c(9,5,1,9,3,1,10,5,1)
location4=c(29,2,27,3,44,30,34,1,24,8,13,37,28,36,41,19,33,9,4,20,16,
14,7,5,42,22,15,43,40,31,23,10,35,17,26,21,11,32,18,6,38,39,25,12)
scale5 = c(10,8,6,10,7,6,10,9,8)
number5 = c(3,2,2,5,2,2,4,2,1)
location5=c(10,3,23,14,17,5,16,6,4,1,20,8,12,13,2,11,22,19,7,18,15,9,
21)
scale6 = c(15,14,12,15,12,7,15,14,10)
number6 = c(2,2,1,2,2,1,3,1,1)
location6 = c(14,6,5,3,15,4,2,9,7,12,10,13,1,11,8)
scale7 = c(5,4,3,5,4,2,5,4,3)
number7 = c(24,3,1,23,3,1,25,2,1)
location7=c(11,1,45,81,49,68,47,19,15,78,20,77,51,42,8,61,82,44,75,73
,48,71,29,25,33,26,76,16,22,62,52,41,65,3,27,80,38,63,13,46,70,56,24,
7,28,32,35,9,2,30,79,39,55,37,6,59,66,5,50,60,43,21,54,12,58,4,67,74,
53,83,14,31,72,18,23,40,36,69,17,57,10,64,34)
scale8 = c(10,9,7,10,8,6,10,9,8)
number8 = c(9,3,2,8,4,1,9,5,2)
location8=c(21,32,5,14,19,8,43,10,39,22,29,31,18,17,9,1,7,26,37,27,2,
42,36,24,33,13,11,34,15,20,35,6,25,38,41,4,28,3,40,16,23,12,30)
scale9 = c(15,14,13,15,12,10,15,14,12)
number9 = c(6,2,1,6,2,1,7,2,1)
location9=c(5,26,7,27,18,19,14,23,25,1,6,13,12,8,10,16,28,22,24,21,4,
15,20,9,3,11,17,2)
scale10 = c(20,18,15,20,15,12,20,19,16)
number10 = c(4,3,1,3,2,1,3,3,2)
location10=c(2,21,4,10,17,5,11,20,22,14,12,1,9,19,8,15,7,18,6,13,3,16
)
old <- Sys.time()
variable = c(60,rep(100,2),rep(200,3),rep(400,4))
sample = c(20,20,40,20,40,60,20,40,60,80)
COUNT1 = array(rep(0,10*4),dim=c(10,4))
for(h in 1:10)
{
      p = variable[h]
      n1 = sample[h]
      n2 = sample[h]
```

```
      if(h==1) (scale=scale1) && (number=number1) &&
(location=location1)
      if(h==2) (scale=scale2) && (number=number2) &&
(location=location2)
      if(h==3) (scale=scale3) && (number=number3) &&
(location=location3)
      if(h==4) (scale=scale4) && (number=number4) &&
(location=location4)
      if(h==5) (scale=scale5) && (number=number5) &&
(location=location5)
      if(h==6) (scale=scale6) && (number=number6) &&
(location=location6)
      if(h==7) (scale=scale7) && (number=number7) &&
(location=location7)
      if(h==8) (scale=scale8) && (number=number8) &&
(location=location8)
      if(h==9) (scale=scale9) && (number=number9) &&
(location=location9)
      if(h==10) (scale=scale10) && (number=number10) &&
(location=location10)
      format = rep(c(rep(1,3),rep(3,3),rep(5,3)),number)
      size = rep(scale,number)
      ta = data.frame(location,format,size)
      table = ta[order(ta$location),]
      m = length(size)
      first = rep(0,m)
      last = rep(0,m)
      for(i in 1:m)
      {
            if(i==1) (first[i] = 1) && (last[i] = table$size[i])
            if(i!=1) (first[i] = first[i-1]+table$size[i-1]) &&
(last[i] = last[i-1]+table$size[i])
      }
      sig1 = diag(p)
      sig2 = diag(p)
      for(l in 1:m)
      {
            siz = table$size[l]
            R1 = diag(siz)
            R2 = diag(siz)
            if(table$format[l]==1)  for(i in 1:siz)
                                    {
                                          for(j in 1:siz)
                                          {
                                                R1[i,j] = ((-
1)^(i+j))*((0.2)^abs(i-j)^0.1)
                                                R2[i,j] = ((-
1)^(i+j))*((0.4)^abs(i-j)^0.1)
                                          }
                                    }
            if(table$format[l]==3)  for(i in 1:siz)
                                    {
                                          for(j in 1:siz)
                                          {
```

```
                                        R1[i,j] = ((-
1)^(i+j))*((0.6)^abs(i-j)^0.1)

                                        R2[i,j] = ((-
1)^(i+j))*((0.8)^abs(i-j)^0.1)
                                    }
                                }
            if(table$format[l]==5)  for(i in 1:siz)
                                {
                                    for(j in 1:siz)
                                    {
                                        R1[i,j] = ((-
1)^(i+j))*((0.9)^abs(i-j)^0.1)
                                        R2[i,j] = ((-
1)^(i+j))*((0.95)^abs(i-j)^0.1)
                                    }
                                }
            sig1[first[l]:last[l],first[l]:last[l]] = R1
            sig2[first[l]:last[l],first[l]:last[l]] = R2
      }
      D = diag(p)
      W = diag(p)
      for(i in 1:p)
      {
            diag(D)[i] = 2+((p-i+1)/p)
            diag(W)[i] = 4+((p-i+1)/p)
      }
      D = D^(1/2)
      W = W^(1/2)
      sigma1 = D%*%sig1%*%D
      sigma2 = W%*%sig2%*%W
      mu1 = rep(0,p)
      mu2 = rep(0,p)
      set.seed(2^31-1)
      for(k in 1:M)
      {
            data1 = mvrnorm(n1,mu1,sigma1)
            data2 = mvrnorm(n2,mu2,sigma2)
            BS = BStest(data1,data2)
            if(BS$pvalue <= 0.05) COUNT1[h,1] = COUNT1[h,1]+1

            ChenQin = cqtest(data1,data2)
            if(ChenQin[2] <= 0.05) COUNT1[h,2] = COUNT1[h,2]+1

            skk = skktest(data1,data2)
            if(skk[2] <= 0.05) COUNT1[h,3] = COUNT1[h,3]+1

            P = Ptest(data1,data2)
            if(P$pvalue <= 0.05) COUNT1[h,4] = COUNT1[h,4]+1
      }
}
COUNT1 = COUNT1/M
COUNT1
new <- Sys.time() - old
print(new)
```

คำสั่งที่ 6 คำสั่งสำหรับการคำนวณค่าสถิติทดสอบของ Chaipitak and Chongcharoen (2013) การเลือกตัวแปรสุ่ม การจัดกลุ่มตัวแปรสุ่มภายในเมทริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวอย่าง และการคำนวณค่าสถิติทดสอบของตัวสถิติทดสอบ T_{BS} , T_{CQ} , T_{SKK} , และ T_p

```
library(spls)
library(MethylCapSig)

#Import Data#
data(prostate)
data = data.frame(prostate$x,prostate$y)
normal = data[data$prostate.y == 0,-6034]
tumor = data[data$prostate.y == 1,-6034]
Gene = 1000
set.seed(2^31-1)
random = sort(sample(1:6033,Gene,replace = F))
data1 = normal[,random]
data2 = tumor[,random]
p = Gene
n1 = dim(data1)[1]
n2 = dim(data2)[1]

#saowapha chaipitak & Samruam Chongcharoen(2013) Test#
s1 = cov(data1)
s2 = cov(data2)
s = (((n1-1)*s1)+((n2-1)*s2))/(n1+n2-2)
h21 =(((n1-1)^2)/(p*(n1-2)*(n1+1)))*((sum(diag(s1%*%s1)))-((1/(n1-
1))*((sum(diag(s1)))^2)))
h22 =(((n2-1)^2)/(p*(n2-2)*(n2+1)))*((sum(diag(s2%*%s2)))-((1/(n2-
1))*((sum(diag(s2)))^2)))
bhat = h21/h22
n = n1+n2-1
nn = n1+n2-2
b = -(4/(n-1))
c = -(((2*((n-1)^2))+(3*(n-3)))/((n-1)*((n^2)-n+2)))
d = (2*((5*n)+1)/((n-1)*((n^2)-n+2)))
e = -((5*n)+1)/(((n-1)^2)*((n^2)-n+2))
thu = (((n-1)^5)*((n^2)-n+2))/(n*(n+1)*(n+3)*(n+5)*(n-2)*(n-3)*(n-4))
h2 = ((nn^2)/(p*(nn-1)*(nn+2)))*((sum(diag(s%*%s)))-
((1/nn)*(sum(diag(s))^2)))
h4 =
(thu/p)*((sum(diag(s%*%s%*%s%*%s)))+(b*sum(diag(s%*%s%*%s))*sum(diag(
s)))+(c*(sum(diag(s%*%s))^2))+(d*sum(diag(s%*%s))*(sum(diag(s))^2))+(
e*(sum(diag(s))^4)))
deta = 4*((((2*h4)/(p*(h2^2)))*((1/(n1-1))+(1/(n2-1))))+(((1/(n1-
1))^2)+((1/(n2-1))^2)))
T = (bhat-1)/sqrt(deta)
pvalue = 2*pnorm(abs(T),lower.tail = FALSE)
```

```
#Cluster Analysis#
S1 = cov(data1)
S2 = cov(data2)
diagS1 = diag(diag(S1))
diagS2 = diag(diag(S2))
D = (diagS1/n1)+(diagS2/n2)
shat = (S1/n1)+(S2/n2)
Dsq = diag(1/sqrt(diag(D)))
RE =  Dsq%*%shat%*%Dsq
Hierarchical = hclust(dist(abs(RE),method = "euclidean"),method =
"complete", members = NULL)
new = c(Hierarchical$order)
data1NEW = data1[,new]
data2NEW = data2[,new]

#Test Statistic#
BStest(data1NEW,data2NEW)
cqtest(data1NEW,data2NEW)
skktest(data1NEW,data2NEW)
qk = 9
a = floor(p/qk)
if(p%%qk == 0) size = c(rep(qk,a))
if(p%%qk != 0) size = c(rep(qk,a),p-(qk*a))
m = length(size)
first = rep(0,m)
last = rep(0,m)
for(i in 1:m)
{
      if(i==1) (first[i] = 1) && (last[i] = size[i])
      if(i!=1) (first[i] = first[i-1]+size[i-1]) && (last[i] =
last[i-1]+size[i])
}
Ptest(data1NEW,data2NEW)
```

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล นายปารณัท สุขเจริญ

ประวัติการศึกษา วิทยาศาสตร์บัณฑิต (สถิติประยุกต์) เกียรตินิยมอันดับ 2 สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง พ.ศ. 2559

ประสบการณ์การทำงาน