การกำหนดเวลาบริการที่ดีที่สุดสำหรับระบบเวียนรับบริการ

Determination of the optimum quantum in the Round-Robin System

วิทยานิพนธ์

เสนอต่อ

คณะสถิติประยุกต์ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์

เพื่อเป็นส่วนประกอบการศึกษา

สำหรับ

ปริญญาพัฒนบริหารศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติประยุกต์)

โดย

พัชรศิริ สัจจพันธุ์

อนุมัติ

.... ประธานกรรมการ
(ผศ.ดร.วิชิต หล่อจีระชุณห์กุล)

.... กรรมการ
(ศจ.ดร.ศรีศักดิ์ จามรมาน)

.... กรรมการ
(อาจารย์สุจินต์ พงษ์ศักดิ์)

.... กรรมการ
(ดร.นิกร วัฒนพนม)

....
คณบดี

ตุลาคม 2519

คำนำ

ในระหว่างการศึกษาวิชาวิจัยดำเนินงานซึ่งเป็นวิชาเอกนั้น ผู้เรียบเรียงมีความเห็นว่า ควรที่จะได้นำวิชาวิจัยดำเนินงานไปใช้ในภาคปฏิบัติระหว่างการศึกษา จะทำให้เกิดความเข้าใจ และนำไปใช้ในการปฏิบัติงานได้ดีขึ้น ประกอบกับได้รับการสนับสนุนจาก ผศ.ดร.วิชิต หล่อจีระชุณห์กุล และอาจารย์สุจินต์ พงษ์ศักดิ์ ซึ่งเป็นอาจารย์สอนวิชาวิจัยดำเนินงาน จึงเป็นเหตุให้ผู้เรียบเรียง ได้เรียบเรียงวิทยานิพนธ์เล่มนี้ขึ้น

การเขียนวิทยานิพนธ์เล่มนี้ได้รับความกรุณาจาก ผศ.ดร.วิชิต หล่อจีระชุณห์กุล ซึ่งให้ความช่วยเหลือตั้งแต่เริ่มต้นจนเป็นผลสำเร็จ ผู้เขียนขอแสดงความขอบพระคุณอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้ พร้อมกันนี้ขอขอบคุณ ผศ.ดร.อนุมงคล ศิริเวทิน ผู้อำนวยการโครงการศูนย์คอมพิวเตอร์ ที่ได้กรุณาให้ใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ Burroughs System 1714 ในการวิจัยและจำลองโดยตลอด และขอขอบคุณอาจารย์สุจินต์ พงษ์ศักดิ์ ที่กรุณาให้คำแนะนำและตรวจแก้คำศัพท์ รูปแบบให้รัดกุมสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ผู้เขียนขอขอบคุณบุคคลอื่น ๆ ที่มิได้กล่าวนามแต่มีส่วนช่วยในการเขียนวิทยานิพนธ์สำเร็จลุล่วงไว้ ณ โอกาสนี้ด้วย

พัชรศิริ สัจจพันธุ์

สารวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับระบบเวียนรับบริการ โดยศึกษาถึงการกำหนดเวลาบริการที่ดีที่สุดคือ เวลาบริการที่ทำให้ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยมีค่าน้อยที่สุดและทำการวิจัยทั้งกรณีที่เวลาสับเปลี่ยนเท่ากับศูนย์ และเวลาสับเปลี่ยนไม่เท่ากับศูนย์ ซึ่งเวลาสับเปลี่ยนคือเวลาที่สูญเสียไปในการนำเอาหน่วยที่รอรับบริการเข้าสู่แหล่งให้บริการและนำเอาหน่วยที่อยู่ในแหล่งให้บริการกลับต่อท้ายแถวเพื่อรอรับบริการในรอบต่อไป สำหรับกรณีเวลาสับเปลี่ยนเท่ากับศูนย์สามารถสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยได้ แต่กรณีที่เวลาสับเปลี่ยนไม่เท่ากับศูนย์คือเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม จะแบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณีคือ (1) ไม่ให้มีหน่วยรับบริการใหม่เกิดขึ้นในระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยน และ (2) ให้มีหน่วยรับบริการใหม่เกิดขึ้นในระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยน สำหรับกรณีที่หนึ่งสามารถสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยได้ แต่ในกรณีที่สองการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นไปด้วยความยากลำบากจึงใช้การจำลองด้วยเครื่องจักรคำนวณในการหาค่าเฉลี่ยของเวลารอคอย

ในการหาเวลาบริการที่ดีที่สุดนั้น ในขั้นต้นใช้วิธีสร้างตัวแบบจำลองด้วยเครื่องจักรคำนวณเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่หาได้ แล้วจึงหาคำตอบที่ดีที่สุดจากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ แต่สำหรับกรณีที่หาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ไม่ได้ก็จะหาคำตอบที่ดีที่สุดจากการจำลอง

ตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยนี้ใช้ตัวอย่างเดียวกันในทุกกรณี ทั้งนี้เพื่อความสะดวกในการเปรียบเทียบเวลาบริการที่ดีที่สุดและค่าต่ำสุดของเวลารอคอย.

b11004

สารบาญ

บทที่ 1

บทนำ

กล่าวทั่วไป

ทฤษฎีการรอคอย (Queueing Theory) เป็นทฤษฎีหนึ่งทางวิธีวิจัยดำเนินงาน (Operations research) ที่ได้ทำการวิจัยกันอย่างกว้างขวาง การบริการเป็นการอำนวยความสะดวกอย่างหนึ่ง แต่ความสามารถในการให้บริการของแหล่งให้บริการโดยทั่วไปมีขีดจำกัด จึงเป็นเหตุให้หน่วยที่ต้องการรับบริการต้องเสียเวลารอคอย บางครั้งการเสียเวลารอคอยอาจไม่กระทบกระเทือนต่อหน่วยที่เข้ารับบริการมากนัก แต่บางครั้งก็จะมีส่วนกระทบต่อหน่วยที่เข้ารับบริการมาก เพราะการสูญเสียเวลาอาจเป็นเหตุให้เกิดการสูญเสียอื่น ๆ ตามมาอีก ทำให้ผู้ที่นำหน่วยงานเข้ารับบริการเกิดความเบื่อหน่าย ซึ่งจะเป็นผลกระทบต่อผู้ให้บริการนั่นเอง เพราะผู้ให้บริการจะสูญเสียลูกค้า ดังนั้น จึงได้มีการศึกษาถึงทฤษฎีของการรอคอย โดยศึกษาถึงหน่วยที่เข้ารับบริการ การให้บริการ ลักษณะของการให้บริการ เวลารอคอย ฯลฯ

ปัญหาทางด้านการรอคอยที่ได้ทำการวิจัยมามีหลายลักษณะ ส่วนมากเป็นการศึกษาถึงระบบที่มีหน่วยเข้าสู่ระบบเข้าคิวเพื่อรอรับบริการ การให้บริการอาจแบ่งได้เป็นหลายแบบ เช่น หน่วยที่มาก่อนมีสิทธิ์เข้ารับบริการก่อน (first-come first-served) หน่วยที่มาทีหลังมีสิทธิ์เข้ารับบริการก่อน (last-come first-served) และการมีอภิสิทธิ์ในการรับบริการ (priority service) เป็นต้น เมื่อหน่วยที่เข้าคิวอยู่นั้นถึงโอกาสที่จะเข้ารับบริการก็จะเข้าสู่แหล่งให้บริการ แหล่งให้บริการก็จะให้บริการจนเสร็จสิ้น หน่วยที่รับบริการเสร็จเรียบร้อยก็จะออกจากแหล่งให้บริการและออกจากระบบไปด้วย การศึกษาปัญหารอคอยที่ได้ทำการวิจัยไว้แล้วเป็นการศึกษาถึงปัญหาทางการรอคอยที่การเข้ารับบริการและการให้บริการมีการแจกแจงแบบต่าง ๆ

แต่ในที่นี้จะทำการศึกษาวิจัยปัญหารอคอยโดยจะพิจารณาถึงการให้บริการเป็นเวลาคงที่ หน่วยที่เข้ารับบริการจะเข้ารับบริการได้อย่างมากที่สุดในแต่ละครั้งเท่ากับเวลาคงที่ที่แหล่งให้บริการจัดให้เท่านั้น และจะให้บริการเกินเวลาคงที่ที่กำหนดไม่ได้ หน่วยที่ต้องการรับบริการจะเข้าสู่ระบบโดยรอเข้าคิวอยู่ในลักษณะหน่วยที่มาก่อนมีสิทธิ์เข้ารับบริการก่อน เมื่อหน่วยที่เข้ารับบริการถึงแหล่งให้บริการก็จะเข้าสู่แหล่งให้บริการและรับบริการจนครบเวลาคงที่ที่กำหนด ถ้าการรับบริการเสร็จ

สิ้นตามที่ต้องการแล้ว หน่วยที่เข้ารับบริการนี้ก็จะหลุดออกจากระบบไป แต่ถ้ายังรับบริการไม่เสร็จสิ้น หน่วยที่เข้ารับบริการหน่วยนี้ก็จะกลับเข้าต่อท้ายแถวเพื่อรอรับบริการอีกในรอบต่อไป ลักษณะของคิวแบบนี้เรียกว่าคิวแบบย้อนกลับ (feed back queue) และระบบนี้ก็คือระบบการแบ่งเวลารับบริการนั่นเอง (Time-shared System)

จากระบบการทำงานแบบแบ่งเวลากันนี้ จะเห็นได้ชัดว่าหน่วยที่ต้องการรับบริการเป็นเวลาสั้นจะอยู่ในระบบเป็นเวลาสั้น เพราะหน่วยเหล่านี้ต้องการรับบริการน้อยรอบก็จะย้อนกลับสู่ระบบน้อยครั้ง เวลารอคอยที่สูญเสียไปก็เป็นเวลาน้อย แต่หน่วยที่ต้องการรับบริการเป็นเวลานานจะหลุดออกไปจากระบบช้ากว่าปกติ ระบบแบ่งเวลาให้บริการนี้จะให้ความรู้สึกที่ดีแก่ผู้รับบริการว่าได้มีโอกาสเข้ารับบริการโดยทั่วถึงกัน ดังนั้น จึงทำให้จำนวนหน่วยที่ออกจากระบบมีจำนวนสูงกว่าการเข้ารับบริการแบบให้บริการจนแล้วเสร็จไปทีละหน่วย ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าระบบแบ่งเวลากันในการรับบริการ ณ แหล่งให้บริการนี้มีประสิทธิภาพดีกว่าการให้บริการทีละหน่วย

ระบบการให้บริการแบบแบ่งเวลานี้ โดยมากใช้กับระบบคอมพิวเตอร์ โดยจัดให้โปรแกรมต่าง ๆ แบ่งเวลาเข้ารับบริการ การจัดระบบให้ทำงานทีละโปรแกรม โปรแกรมที่ต้องการเวลาบริการมากก็จะอยู่ในระบบเป็นเวลานาน ผู้ที่นำโปรแกรมเข้ารอรับบริการในช่วงเวลาที่โปรแกรมนี้ทำงานจะต้องเสียเวลารอคอยเป็นเวลานาน แม้ว่าโปรแกรมที่เข้าต่อท้ายคิวเหล่านี้จะต้องการรับบริการเพียงเวลาอันสั้นก็ตาม แต่ถ้าจัดระบบให้เป็นระบบแบ่งเวลากันโปรแกรมที่ใช้เวลาบริการเป็นเวลานานก็จะได้รับบริการครั้งละคงที่ แล้วกลับเข้าสู่ท้ายคิว เพื่อรอรับบริการต่อไปจนกระทั่งเสร็จ โปรแกรมที่ต้องการรับบริการสั้นก็จะได้มีโอกาสเข้ารับบริการบ้าง และโปรแกรมที่ต้องการรับบริการเวลาสั้น ๆ เหล่านี้ก็จะออกจากระบบไปก่อนแม้ว่าจะเข้าสู่ระบบหลังโปรแกรมที่ต้องการรับบริการเป็นเวลานาน ๆ เมื่อมีโปรแกรมที่ได้รับบริการเสร็จสิ้นแล้วหลุดออกไปจากระบบ คิวในระบบก็จะสั้นลงด้วย

การศึกษาถึงเวลารอคอยในระบบแบ่งเวลาให้บริการนี้ได้มีผู้ทำการศึกษามาบ้างแล้ว แต่ผู้ทำการวิจัยไม่ได้คิดถึงเวลาที่สูญเสียไปในการนำเอาหน่วยที่อยู่ในคิวเข้าสู่แหล่งให้บริการ และไม่คิดเวลาที่เสียไปในการนำเอาหน่วยที่อยู่ในแหล่งให้บริการซึ่งรับบริการจนครบเวลาคงที่แล้วออกจากแหล่งให้บริการ แต่หน่วยนี้ยังรับบริการไม่เสร็จสิ้นจึงนำมาต่อท้ายคิวอีก ถ้าพิจารณาถึงระบบคอมพิวเตอร์ การเสียเวลานี้จะเกิดขึ้นจากการอ่านโปรแกรมที่อยู่ใน disk เข้าสู่ CPU เพื่อ

ทำงาน และนำเอางานออกจาก CPU กลับเข้าสู่ disk เมื่อครบเวลาคงที่ที่กำหนดให้บริการและโปรแกรมนั้นยังไม่เสร็จ ซึ่งเวลาที่สูญเสียไปนี้เกิดจากการเลื่อนหัว disk การวิเคราะห์ระบบโดยไม่คิดถึงเวลาที่สูญเสียไปนี้ก็เพื่อความสะดวกทางคณิตศาสตร์ แต่ Kleinrock[1/] ได้กล่าวไว้ว่าการไม่คิดถึงเวลาที่สูญเสียไปนี้ระบบที่พิจารณาจะเป็นเพียงระบบเชิงอุดมคติ (ideal system) เท่านั้น

ระบบแบ่งเวลากันในการรับบริการนี้ สิ่งที่สำคัญที่ควบคุมการให้บริการและระบบก็คือเวลาคงที่ที่แหล่งให้บริการให้บริการในแต่ละรอบ ดังนั้น จึงควรทำการศึกษาถึงเวลาคงที่ที่เหมาะสมที่จะกำหนดให้แหล่งให้บริการให้บริการแก่หน่วยที่ต้องการเข้ารับบริการ เพื่อที่จะทำให้ค่าคาดหมายของเวลารอคอยมีค่าน้อยที่สุด

<u>ขอบเขตของการศึกษา</u>

การศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้ จะวิเคราะห์เฉพาะระบบที่เป็นลักษณะการแบ่งเวลารับบริการ (Time-Shared System) โดยเวลามีลักษณะไม่ต่อเนื่อง (discrete) ลักษณะการเข้าคิวเป็นคิวย้อนกลับ โดยกำหนดให้หน่วยที่ต้องการรับบริการเข้าสู่ระบบมีการแจกแจงแบบ Binomial และเวลาที่หน่วยที่เข้ารับบริการต้องการรับบริการในแหล่งให้บริการ มีการแจกแจงแบบ Exponential เวลารอคอยของหน่วยที่เข้ารับบริการจะแบ่งพิจารณาเป็น 2 แบบ ดังนี้

1. ไม่มีการเสียเวลาในการนำเอาหน่วยที่รอรับบริการอยู่เข้าสู่แหล่งให้บริการ และไม่มีการเสียเวลาในการนำเอาหน่วยที่อยู่ในแหล่งให้บริการซึ่งรับบริการครบเวลาที่กำหนดให้แล้วแต่ยังไม่เสร็จสิ้นการรับบริการ เข้าต่อท้ายคิวอีก เวลานี้เรียกว่าเวลาสับเปลี่ยน (swap time) ดังนั้น กรณีนี้ก็คือเวลาสับเปลี่ยนเท่ากับศูนย์

2. มีการเสียเวลาในการนำเอาหน่วยที่รอรับบริการอยู่เข้าสู่แหล่งให้บริการและมีการเสียเวลาในการนำเอาหน่วยที่อยู่ในแหล่งให้บริการซึ่งรับบริการครบเวลาที่กำหนดให้แล้ว แต่ยังไม่เสร็จสิ้นการรับบริการ เข้าต่อท้ายคิวอีก กรณีนี้ก็คือเวลาสับเปลี่ยนไม่เท่ากับศูนย์ ซึ่งจะแบ่งแยก

[1/] Leonard Kleinrock, "Time-Shared System : A Theoretical Treatment," <u>Journal of the Association for Computing Machinery</u>, Vol.14, No.2, April 1967, p.242.

แยกพิจารณาออกไปอีก 2 กรณีคือ

2.1 ให้หน่วยที่เข้ารับบริการมีโอกาสที่จะเข้ารับบริการได้ในช่วงเวลาที่กำหนดเท่านั้น ในช่วงเวลาสับเปลี่ยนจะไม่ยอมให้หน่วยที่เข้ามารับบริการมีโอกาสเกิดขึ้นในระบบได้ ดังนั้น ระบบจะยังคงมีสภาวะคล้ายคลึงกับในกรณีที่ 1

2.2 ให้มีหน่วยที่เข้ารับบริการมีโอกาสที่จะเข้ารับบริการในช่วงเวลาสับเปลี่ยนด้วย

ระยะเวลารอคอยในแต่ละระบบจะได้ทำการศึกษาอย่างละเอียดเพื่อจัดหาวิธีการจัดการบริการที่เหมาะสมที่จะทำให้ระยะเวลารอคอยในแต่ละกรณีมีค่าน้อยที่สุด นั่นคือคำนวณหาเวลาที่เหมาะสมที่จะกำหนดให้หน่วยที่เข้ารับบริการได้รับบริการในแต่ละรอบ

บทที่ 2
รายงานการวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในอดีต การวิจัยเกี่ยวกับระบบการแบ่งเวลากันในการรับบริการ ณ แหล่งให้บริการ (time-shared service facility system) ได้ทำกันไว้เท่าที่ได้ค้นพบดังนี้

Leonard Klienrock[2] ได้ทำการศึกษาระบบแบ่งเวลากันในการรับบริการ โดยกำหนดให้เวลาเป็นตัวแปรไม่ต่อเนื่อง (discrete) การให้บริการซึ่งคิดเป็นจำนวนรอบมีการแจกแจงแบบ Geometric ในแง่เวลารอคอยของหน่วยที่เข้ารับบริการโดยไม่คิดเวลาที่เสียไปในการนำเอาหน่วยที่เข้ารับบริการเข้าและออกจากแหล่งให้บริการ การเข้ารับบริการเป็นแบบใครมาก่อนมีสิทธิ์เข้ารับบริการก่อน

ต่อมา Leonard Klienrock[3] ได้ทำการศึกษาเพิ่มเติมถึงระบบที่ให้บริการเป็นแบบอภิสิทธิ์ (Priority Service) ในแง่เวลารอคอยในระบบโดยแบ่งการพิจารณาออกเป็น

1. ระบบที่มีการแบ่งเวลาในการรับบริการ (time-shared system) ซึ่งหมายถึงระบบที่สิ่งอำนวยความสะดวกทุกอย่าง (facilities) ในระบบจะให้บริการต่อหน่วยที่รับบริการเพียงหน่วยเดียวในขณะใดขณะหนึ่ง

2. ระบบที่มีการแบ่งระบบในการให้บริการ (processor shared system) ซึ่งหมายถึงระบบที่แบ่งสิ่งอำนวยความสะดวกในระบบให้แก่หน่วยที่รับบริการหลาย ๆ หน่วยในขณะใดขณะหนึ่ง

การศึกษาของ Klienrock นี้ ไม่ได้คิดเวลาที่สูญเสียไปในการนำเอาหน่วยงานเข้าและออกจากแหล่งให้บริการและหน่วยที่เข้ารับบริการมีการแจกแจงแบบ Poisson และจำนวนรอบ

---

[2] Leonard Klienrock, "Analysis of a Time-Shared Processor," Noval Research Logistics Quart. 11, 10 (March 1964), pp.59-73.

[3] Leonard Klienrock, "Time-Shared System : A Theoritical Treatment," Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 14, No.2, April, 1967, pp.242-261.

ที่จะเข้ารับบริการมีการแจกแจงแบบ Geometric

Jack E. Shemer[4] ศึกษาถึงระบบแบ่งเวลาในการรับบริการโดยกำหนดให้เวลาที่ใช้ในการรับบริการในแต่ละรอบเป็นเวลาคงที่ กับให้เวลาที่ใช้ในการรับบริการในแต่ละรอบแปรค่าได้ในช่วงเวลาคงที่ที่กำหนด พร้อมกับหาเวลารอคอยของระบบที่มีอภิสิทธิ์ในการรับบริการด้วย ฯ

Edward G. Coffman และ Leonard Kleinrock[5] ได้ทำการศึกษาถึงระบบการแบ่งเวลาในการรับบริการโดยให้มีคิว N คิว โดยหาเวลาที่เสียไปในการรอรับบริการ โดยพิจารณาทั้งระบบที่แบ่งเวลาในการรับบริการและระบบที่แบ่งระบบในการให้บริการและได้ทำการศึกษาถึงการให้บริการแบบมีอภิสิทธิ์โดยให้หน่วยที่ต้องการรับบริการ เป็นระยะเวลาสั้นมีสิทธิ์เข้ารับบริการก่อน

Edward G. Coffman, JR., R.R.Munty และ H. Trotter[6] ได้ทำการศึกษาถึงระบบที่แบ่งระบบในการให้บริการ โดยให้หน่วยที่เข้ารับบริการมีการแจกแจงแบบ Poisson และการให้บริการมีการแจกแจงแบบ Exponential และทำการหาฟังก์ชันสำหรับ Laplace Transform ของระยะเวลารอคอยโดยเขียนอยู่ในรูปของหน่วยที่เข้ารับบริการ เวลาที่ต้องการรับบริการ และจำนวนหน่วยที่อยู่ในระบบ และทำการเปรียบเทียบเวลารอคอยกับผลที่ได้จากระบบธรรมดาที่ไม่แบ่งเวลาในการรับบริการหรือแบ่งระบบในการให้บริการ คือใครมาก่อนก็ได้รับบริการก่อน และรับบริการไปจนกว่าจะเสร็จ

---

[4] Jack E. Shemer, "Some Mathematical Considerations of Time-Sharing Scheduling Algorithms," Journal of the Association for Computing Machinery, Vol.14, No.2, April 1967, pp.262-272.

[5] Edward G.Coffman & Leonard Kleinrock, "Feed back Queuing Models for Time-Shared System," Journal of the Association for Computing Machinery, Vol.15, No.4, October 1968, pp.549-576.

[6] Edward G. Coffman, JR, R.R.Munty และ H.Trotter, "Waiting Time Distribution for Processor-Shared Systems," Journal of the Association for Computing Machinery. Vol.17, No.1, January, 1970, pp.123-130.

บทที่ 3

การกำหนดตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์
ของระยะเวลารอคอยในระบบแบ่งเวลาในการรับบริการ ณ แหล่งให้บริการ

ระบบที่จะวิเคราะห์เป็นระบบแบ่งเวลาในการรับบริการ โดยให้หน่วยที่จะรับบริการเวียนกันเข้ามารับบริการ ในแต่ละรอบเวลาที่ระบบจะให้บริการแก่หน่วยที่จะรับบริการมีค่าคงตัว ระบบที่มีลักษณะนี้เรียกว่าระบบเวียนรับส่วนแบ่งของเวลาบริการ **(round-robin time-shared service system)**[7] รายละเอียดของระบบนี้มีดังนี้

ให้หน่วยที่จะเข้ารับบริการมีเวลาเข้ารับบริการได้ครั้งละ Q หน่วยเวลา โดย Q เป็นค่าคงที่ ในช่วงเวลา Q นี้ให้หน่วยใหม่ที่จะเข้ารับบริการเข้าสู่ระบบด้วยความน่าจะเป็น λQ ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของอัตราที่หน่วยใหม่จะเข้ารับบริการเท่ากับ λ หน่วยต่อหน่วยเวลา เวลาในการรับบริการของหน่วยใหม่ที่เข้าสู่ระบบนี้ให้คิดเป็น Q เท่า ของจำนวนรอบที่หน่วยนั้นต้องการรับบริการจากแหล่งให้บริการ ให้จำนวนรอบที่จะรับบริการมีการแจกแจงแบบ Geometric ดังนี้

$$S_n = (1-\sigma)\sigma^{n-1}, \quad n = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.1)$$

โดย σ คือความน่าจะเป็นที่หน่วยที่ได้รับบริการแล้ว Q หน่วยเวลา แต่การบริการที่ต้องการยังไม่เสร็จจึงต้องกลับเข้าสู่ระบบอีกเพื่อรอรับบริการในรอบต่อไป

ดังนั้น $1-\sigma$ ก็คือความน่าจะเป็นที่หน่วยที่เข้ารับบริการเสร็จสิ้นการบริการที่ต้องการแล้วออกไปจากระบบ

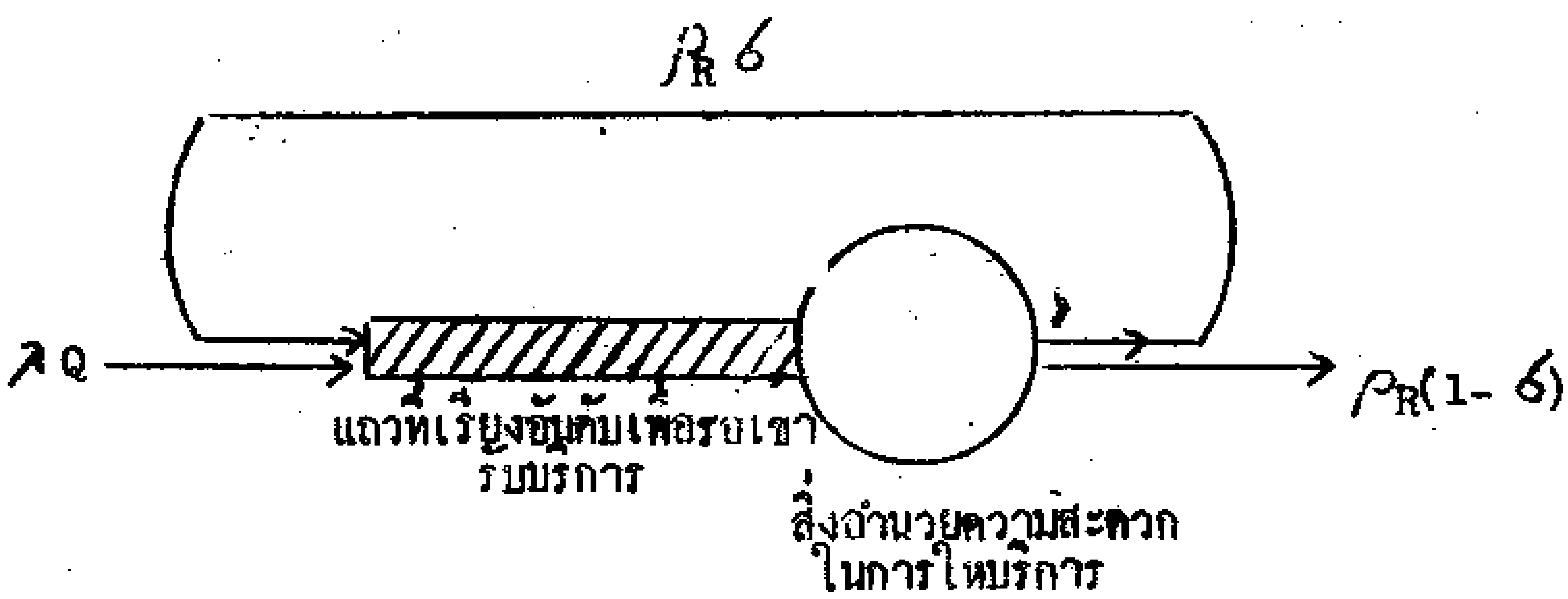
และ S_n คือความน่าจะเป็นที่หน่วยที่เข้ารับบริการต้องการรับบริการ n รอบ นั่นคือ เวลาในการรับบริการทั้งหมดเท่ากับ nQ หน่วยเวลา

ระเบียบวิธีที่จะเข้ารับบริการมีดังนี้ หน่วยที่ต้องการจะเข้ารับบริการซึ่งเป็นหน่วยใหม่จะต้องต่อท้ายคิว และต้องรอเข้าแถวแบบผู้ใดมาก่อนมีสิทธิ์เข้ารับบริการก่อน (first-come

---

[7] Leonard Klienrock, "Analysis of a Time-Shared Processor," Noval Research Logistic Quart 11, 10 (March 1964), p.59.

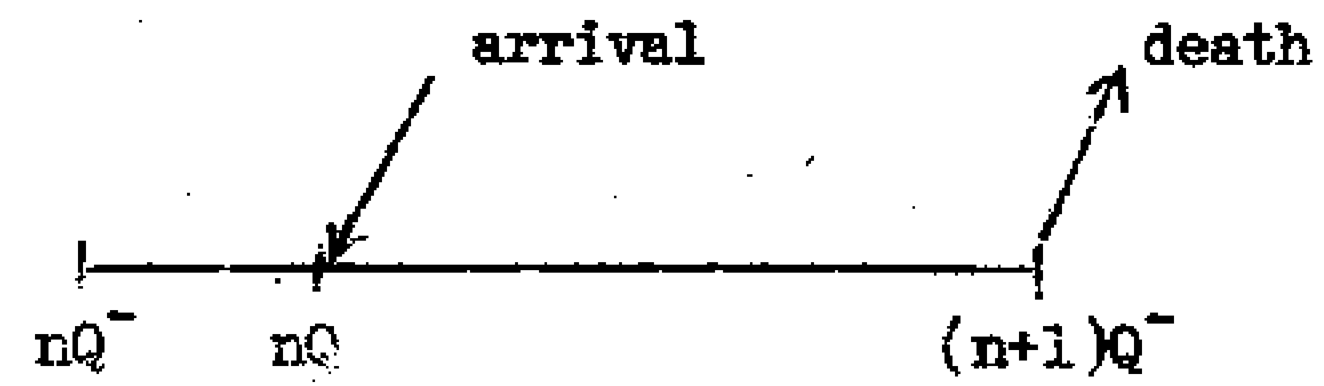
first-served) จนกระทั่งหน่วยที่เข้ารับบริการหน่วยนั้นเข้าสู่แหล่งให้บริการ แหล่งที่ให้บริการก็จะให้บริการตามแถวที่เข้าเรียงกันมานั้น โดยแหล่งให้บริการจะบริการครั้งละ Q หน่วยเวลา เมื่อบริการครบ Q หน่วยเวลาแล้ว หน่วยที่ได้รับบริการแล้วนี้ก็จะออกจากระบบไป ถ้าหน่วยนั้นเสร็จสิ้นการรับบริการแล้วไม่ต้องการรับบริการอีก แต่จะย้อนกลับไปต่อท้ายแถวอีกถ้าหน่วยนั้นยังต้องการรับบริการต่อไป โดยมีลักษณะของระบบดังแสดงในรูปที่ 1 ดังนั้น ถ้าหน่วยที่เข้ารับบริการต้องการรับบริการ nQ หน่วยเวลา ก็จะต้องต่อท้ายแถว n ครั้ง จนกระทั่งการรับบริการนั้นจะเสร็จ หน่วยนั้นจึงจะหลุดออกจากระบบไป



รูปที่ 1 แสดงระบบเวียนรับส่วนแบ่งของเวลาบริการ

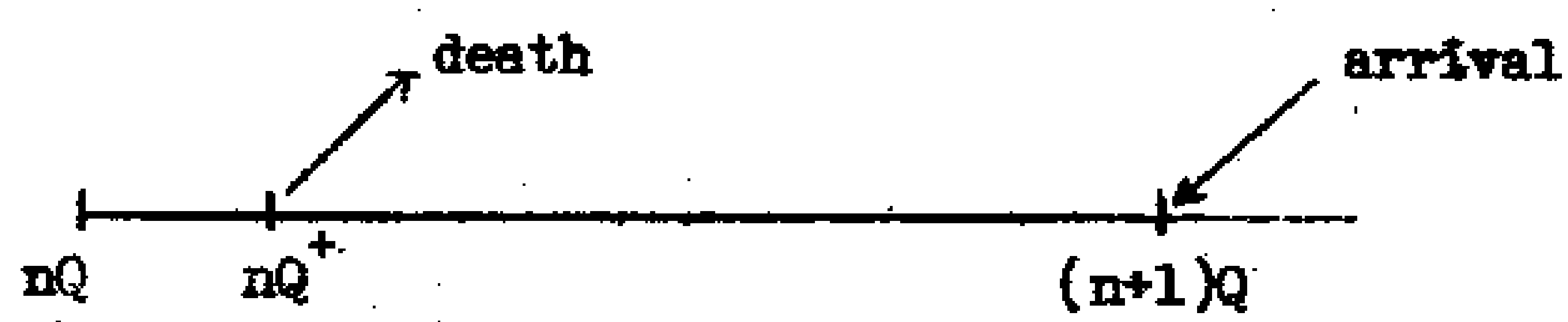
การจัดอันดับระหว่างหน่วยที่รับบริการแล้วกลับมาต่อท้ายแถวกับหน่วยรับบริการที่เข้าสู่ระบบใหม่ จะแบ่งพิจารณาเป็น 2 ระบบดังนี้

1. ระบบการเข้าช้า (Late arrival system) ในระบบนี้จัดให้หน่วยที่ออกมาจากแหล่งให้บริการ แต่ยังคงต้องการรับบริการต่อไปอีกเข้าต่อท้ายแถวก่อน หลังจากนั้นจึงให้หน่วยใหม่ที่จะเข้ารับบริการซึ่งเข้าสู่ระบบด้วยอัตราการมาจะเป็น λQ เข้าต่อท้ายแถวเพื่อรอเข้ารับบริการ ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2 และจะเรียกต่อไปว่าระบบ RRLA คำว่า "รอบ" ในระบบ RRLA จะหมายความถึง เวลาตั้งแต่หน่วยรับบริการอาจเข้าสู่ระบบ คือเวลา nQ จนกระทั่งหน่วยรับบริการที่อยู่ในแหล่งให้บริการจะต้องออกจากแหล่งให้บริการคือเวลา $(n+1)Q^-$



รูปที่ 2 แสดงถึงการเข้า-ออกของหน่วยงานในระบบ RRIA

2. ระบบการเข้าเร็ว (Early arrival system) ระบบนี้จะสลับอันดับของระบบการเข้าช้า กล่าวคือ จัดให้หน่วยใหม่ที่เข้ารับบริการซึ่งเข้าสู่ระบบด้วยความน่าจะเป็น λQ เข้าแถวเพื่อรอรับบริการก่อน แล้วจึงให้หน่วยที่รับบริการที่ออกมาจากแหล่งให้บริการแต่ยังคงต้องการรับบริการอีกเข้าต่อท้าย ดังแสดงไว้ในรูปที่ 3 และจะเรียกต่อไปว่า **RREA** คำว่า "รอบ" ในระบบ RREA จะหมายถึงเวลาตั้งแต่หน่วยที่อยู่ในแหล่งให้บริการออกจากแหล่งให้บริการคือเวลา nQ^+ จนกระทั่งหน่วยรับบริการใหม่อาจเข้าสู่ระบบคือเวลา $(n+1)Q$



รูปที่ 3 แสดงถึงการเข้า-ออกของหน่วยงานในระบบ RREA

<u>ผลที่ได้จากระบบแบ่งเวลากันในการรับบริการ ณ แหล่งให้บริการ</u>

ค่าเฉลี่ยของจำนวนรอบที่หน่วยที่เข้ารับบริการต้องการรับบริการอาจคำนวณได้จากสมการ (3.1) และได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\bar{n} = \sum_{n=1}^{\infty} n S_n = \frac{1}{1-\delta} \qquad (3.2)$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของเวลารับบริการจึงเขียนได้เท่ากับ

$$\bar{n}Q = \frac{Q}{1-\sigma} \qquad (3.3)$$

และแฟคเตอร์การใช้งาน (Utilization factor) ρ ซึ่งนิยามให้เท่ากับผลคูณของค่าเฉลี่ยของอัตราหน่วยเข้ารับบริการต่อหน่วยเวลากับค่าเฉลี่ยของเวลารับบริการจึงเท่ากับ

$$\rho_R = \frac{\lambda Q}{1-\sigma} \qquad (3.4)$$

ถ้า r_k^{ℓ} เป็นความน่าจะเป็นที่มี k หน่วยอยู่ในระบบ RRIA Jackson 8/ ได้เขียนความสัมพันธ์ระหว่าง r_k^{ℓ} กับ ρ_R และ σ ดังนี้ 9/

$$r_k^{\ell} = (1-a)\,a^k \qquad (3.5)$$

โดย

$$a = \frac{\rho_R \sigma}{1-\lambda Q} \qquad (3.6)$$

ค่าเฉลี่ยของจำนวนหน่วยที่อยู่ในระบบสามารถเขียนได้เป็น

$$E^{\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} k\, r_k^{\ell} = \frac{\rho_R \sigma}{1-\rho_R} \qquad (3.7)$$

ในระบบการเข้าช้า ค่าเฉลี่ยของเวลาที่หน่วยรับบริการจะต้องอยู่ในระบบเมื่อต้องการรับบริการคิดเป็นเวลา nQ หน่วยเวลา อาจเขียนได้เท่ากับ

8/ Jackson, J.R., "Some Problems in Queuing with Dynamic Priorities," Naval Research Logistics Quarterly, 7, 435(1960).

9/ ดูวิธีพิสูจน์ที่ภาคผนวก ก-1 ท้ายเล่ม.

$$T_n^{l} = \frac{nQ}{1-\rho_R} - \frac{\lambda Q^2}{1-\rho_R}\left[1 + \frac{(1-\sigma\alpha)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\sigma)^2(1-\rho_R)}\right] \quad (3.8)$$

โดย $$\alpha = \sigma + \lambda Q \quad (3.9)$$

ต่อไปจะพิจารณาระบบ RREA

ให้ r_k^e เป็นความน่าจะเป็นที่จะมี k หน่วยในระบบที่มีการจัดลำดับคิวแบบระบบการเข้าเร็ว ในภาคผนวก ก-2 จะแสดงให้เห็นว่า

$$r_k^e = \begin{cases} 1-\rho_R, & k = 0 \\ \dfrac{1-\rho_R}{\sigma}\, a^k, & k = 1,2,3,\ldots \end{cases} \quad (3.10)$$

โดย ρ_R และ a มีความหมายเหมือนในระบบการเข้าช้าตามสมการ (3.4) และ (3.6) โดยเฉลี่ยแล้วหน่วยที่อยู่ในระบบนี้จะมีจำนวน

$$E^e = \frac{\rho_R}{1-\rho_R}(1-\lambda Q) \quad (3.11)$$

และค่าเฉลี่ยของเวลาที่หน่วยรับบริการจะอยู่ในระบบที่มีการจัดลำดับคิวแบบระบบการเข้า-เร็ว สำหรับหน่วยที่ต้องการรับบริการ nQ หน่วยเวลา เท่ากับ10/

$$T_n^e = \frac{nQ}{1-\rho_R} - \rho_R Q - \frac{\lambda Q^2 \rho_R}{1-\rho_R}\left[1 + \frac{(1-\sigma\alpha)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\sigma)^2(1-\rho_R)}\right] \quad (3.12)$$

โดย α มีค่าตามสมการ (3.9)

10/ ดูวิธีพิสูจน์ที่ภาคผนวก ก-2 ท้ายเล่ม.

ส่วนในระบบที่ไม่มีการแบ่งเวลาให้บริการและหน่วยรับบริการใดมาก่อนจะมีสิทธิ์เข้ารับบริการจนแล้วเสร็จก่อน (strict first-come first-served) ซึ่งจะเรียกต่อไปว่าระบบ FCFS สำหรับหน่วยที่ต้องการรับบริการ nQ หน่วยเวลาเท่ากับ 11/

$$T_n^b = \frac{QE^{\ell}}{1-\rho} + nQ \qquad (3.13)$$

หน่วยที่ต้องการรับบริการ nQ หน่วยเวลา จะต้องกลับเข้าต่อท้ายคิว n ครั้ง ซึ่งจะพูดอย่างหยาบ ๆ ได้ว่าหน่วยที่เข้าต่อท้ายคิวในแต่ละรอบจะต้องพบหน่วยที่อยู่ในระบบอยู่ก่อนแล้ว ซึ่งมีจำนวนโดยเฉลี่ยแล้วเท่ากับ E^{ℓ} หรือ E^{e} หน่วย สุดแล้วแต่ว่าจะเป็นระบบการเข้าแบบใด ดังนั้น เวลาที่จะต้องเสียไปในการรอคอยจนกว่าหน่วยที่เข้ารับบริการนี้จะได้เข้าสู่แหล่งให้บริการอีกจะประมาณรอบละ QE^{ℓ} หรือ QE^{e} หน่วยเวลา และจะต้องเสียเวลาในการที่หน่วยที่เข้ารับบริการอยู่ในแหล่งให้บริการทั้งหมดอีก nQ หน่วยเวลา ดังนั้น เมื่อพิจารณาเวลาที่หน่วยรับบริการจะอยู่ในระบบอาจประมาณได้ดังนี้

$$T_{an}^{\ell} = nQE^{\ell} + nQ \qquad (3.14)$$

$$\text{และ } T_{an}^{e} = nQE^{e} + nQ \qquad (3.15)$$

เมื่อเปรียบเทียบเวลาที่อยู่ในระบบเมื่อหน่วยรับบริการต้องการเวลาบริการ nQ หน่วยเวลา ในระบบ FCFS และ RRLA ตามสมการ (3.13) และ (3.14) จะเห็นว่า หน่วยใดที่ต้องการรับบริการน้อยกว่าค่าเฉลี่ยของจำนวนรอบ = $\bar{n} = 1/(1-\rho)$ รอบ การรอคอยในระบบ RRLA จะเสียเวลาน้อยกว่าการรอคอยในระบบ FCFS แต่ถ้าหน่วยที่ต้องการเข้าสู่ระบบต้องการรับบริการมากกว่า $\bar{n}$ รอบ ระยะเวลาในการรอคอยในระบบ RRLA จะมากกว่าระยะเวลารอคอยในระบบ FCFS นั่นคือ สิ่งที่จะเป็นตัววัดว่าระยะเวลาในการรอคอยแบบไหนจะมากหรือน้อยกว่ากันก็คือค่าเฉลี่ยของจำนวนรอบในการรับบริการ การเปรียบเทียบดังกล่าวข้างต้นเป็นการเปรียบเทียบโดยใช้ค่าประมาณของเวลาเฉลี่ยที่หน่วยรับบริการจะอยู่ในระบบในสมการ (3.14) ดังนั้น ข้อสรุปข้างต้นจะถูกต้องก็ต่อเมื่อ

11/ ดูวิธีพิสูจน์ที่ภาคผนวก ก-3 ท้ายเล่ม.

$$1 + \frac{(1-\delta\alpha)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\delta)^2\,(1-\rho_R)} \simeq n \tag{3.16}$$

เพราะหากสมการ (3.16) เป็นจริง สมการ (3.8) อาจเขียนได้เป็น

$$T_n^{l} = \frac{nQ}{1-\rho_R}\,(1-\lambda Q) \tag{3.17}$$

ซึ่งเมื่อแทน λQ ด้วยความสัมพันธ์ในสมการ (3.4) แล้ว จะเห็นว่าสมการ (3.17) ก็คือสมการ (3.14) นั่นเอง

ด้วยเหตุผลเดียวกัน ข้อสรุปเกี่ยวกับการเปรียบเทียบเวลารอคอยระหว่างระบบ RREA และ FCFS จะเป็นจริงทำนองเดียวกับการเปรียบเทียบระหว่างระบบ RRLA และ FCFS หาก

$$\rho_R + \frac{\lambda Q\,\rho_R}{1-\rho_R}\left[1 + \frac{(1-\delta\alpha)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\delta)^2(1-\rho_R)}\right] \simeq \frac{\lambda Q\,n}{1-\rho_R} \tag{3.18}$$

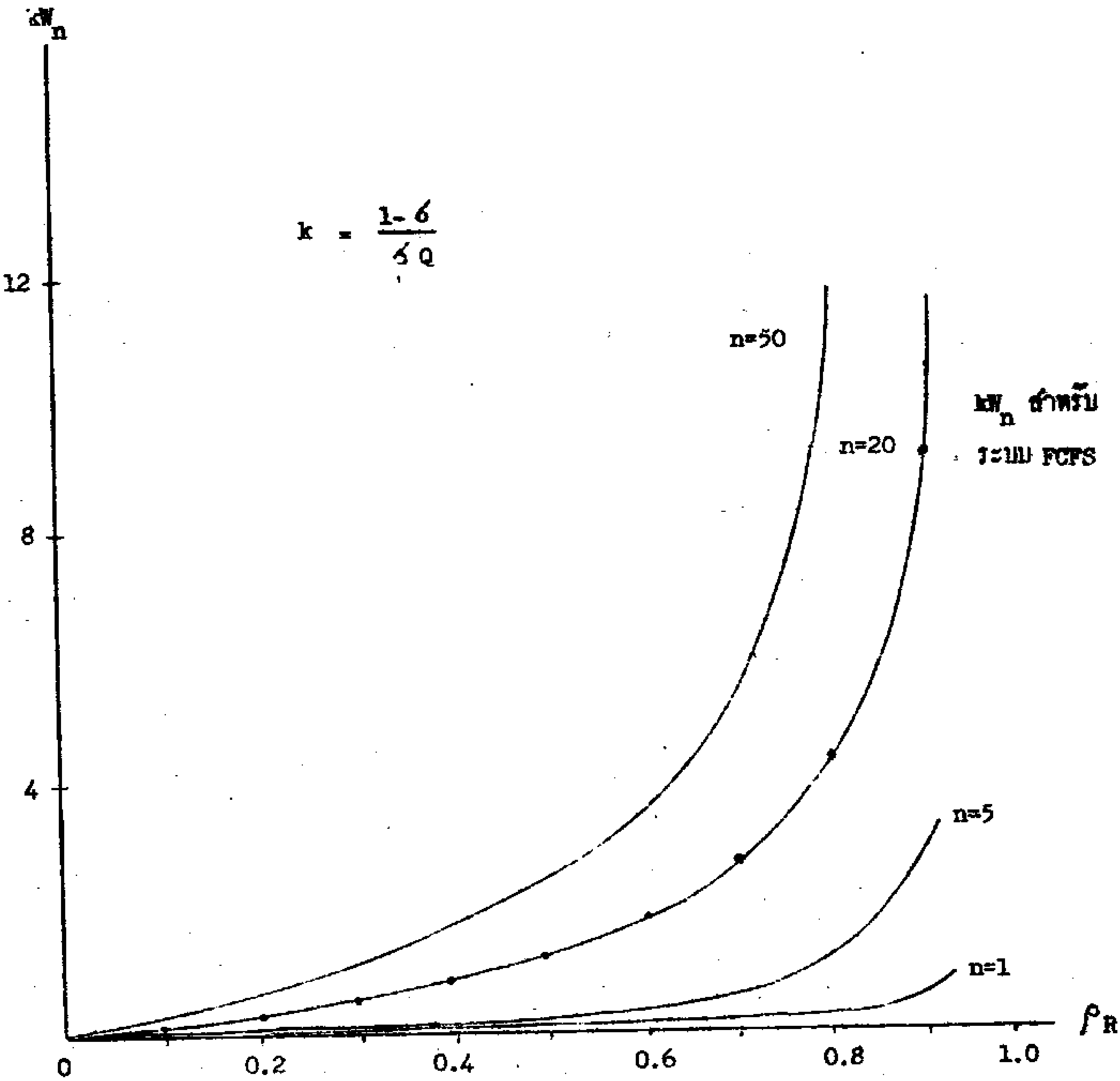
เวลาเฉลี่ยที่หน่วยรับบริการจะต้องอยู่ในแถวโดยไม่รวมเวลารับบริการทั้งหมด เมื่อหน่วยรับบริการต้องการเวลาบริการทั้งหมด nQ หน่วยเวลา ในแต่ละระบบเขียนได้ดังนี้

$$W_n^{l} = T_n^{l} - nQ \tag{3.19}$$

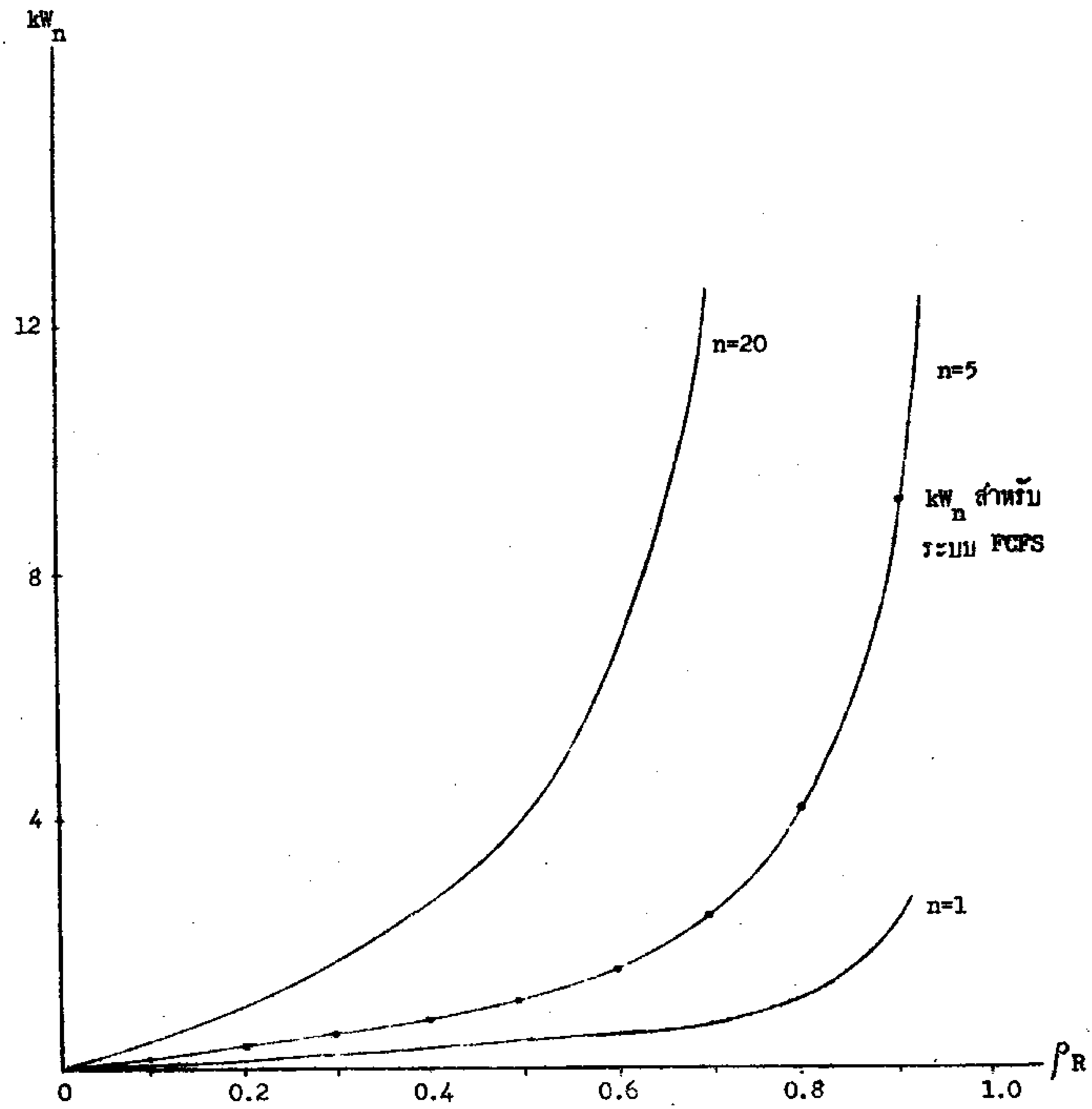
$$W_n^{e} = T_n^{e} - nQ \tag{3.20}$$

$$W_n^{b} = T_n^{b} - nQ \tag{3.21}$$

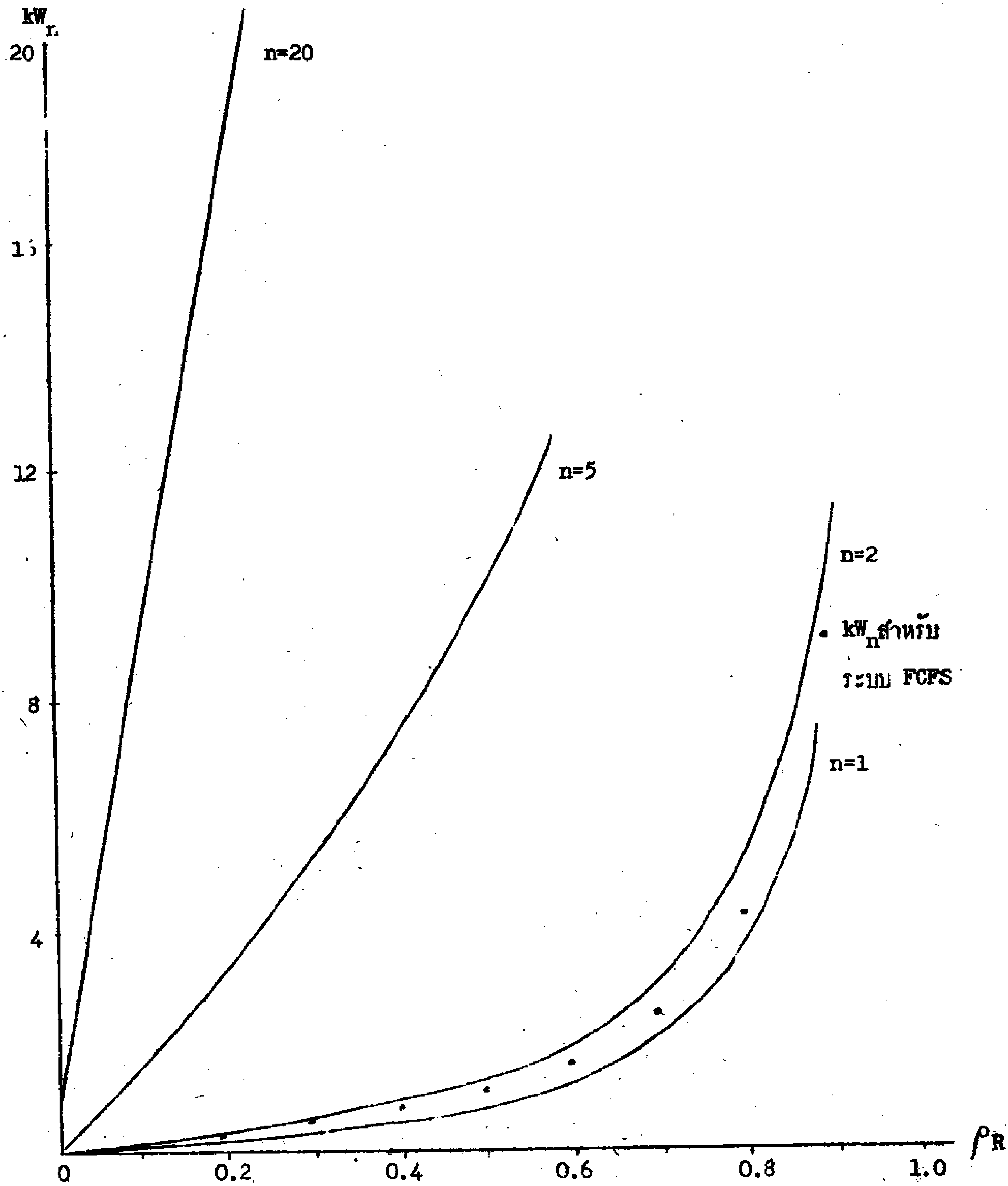
ในรูปที่ 4 ถึง 6 แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง $(1-\delta)W_n/(\delta Q)$ กับ ρ_R ของระบบ RRLA และ FCFS การที่นำเอา $(1-\delta)/\delta Q$ ไปคูณกับเวลารอคอยก็เพื่อที่จะเป็นการสะดวกสำหรับระบบ FCFS เพราะ $(1-\delta)W_n/(\delta Q)$ จะเท่ากับ $\rho_R/(1-\rho_R)$ ซึ่งอยู่ในเทอมของ ρ_R ตัวเดียวเท่านั้น ความสัมพันธ์แสดงในรูปที่ 4 ถึง 6 โดยมี δ เป็นพารามิเตอร์ มีค่าเท่ากับ 19/20, 4/5 และ 1/5 ตามลำดับ



รูปที่ 4 แสดงค่า $[(1-\sigma)/\sigma Q]$ $W_n(\rho)$ สำหรับระบบ RRLA โดย $\sigma = \frac{19}{20}$



รูปที่ 5 แสดงว่า $[(1-\sigma)/\sigma Q]\ W_n(\rho)$ สำหรับระบบ RRLA โดย $\sigma = \frac{4}{5}$



รูปที่ 6 แสดงค่า $[(1-\sigma)/\sigma Q]\ W_n(\rho)$ สำหรับระบบ RRLA โดย $\sigma = \frac{1}{5}$

รูปที่ 4 ถึง 6 นี้ จะแสดงถึงความถูกต้องของการสรุปผลจากค่าประมาณ T_{an} ในสมการที่ (3.14) ดังได้กล่าวมาแล้ว จากรูปที่ 4 σ = 19/20 ได้ $\bar{n}$ = 20 และรูปที่ 5 σ = 4/5 ได้ $\bar{n}$ = 5 จะเห็นได้ว่า $(1-\sigma)W_n/(\sigma Q)$ สำหรับระบบ FCFS จะอยู่บนเส้นเดียวกันกับ $(1-\sigma)W_n/(\sigma Q)$ ที่ $n = \bar{n}$ ในระบบ RRLA พอดี ถ้า n มีค่าน้อยกว่า $\bar{n}$ เส้นกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ของระบบ RRLA จะอยู่ใต้เส้นกราฟของระบบ FCFS แต่ถ้า n มีค่ามากกว่า $\bar{n}$ เส้นกราฟของระบบ RRLA จะอยู่เหนือเส้นกราฟของระบบ FCFS ส่วนในรูปที่ 6 σ = 1/5 ดังนั้น $\bar{n}$ = 1.25 กราฟของระบบ FCFS จะอยู่ระหว่างกราฟของระบบ RRLA ที่ n = 1 และ 2

ค่าคาดหมายของเวลารอคอยที่หน่วยรับบริการจะต้องอยู่ในแถวโดยไม่รวมเวลาบริการในแต่ละระบบปรากฏว่ามีค่าเท่ากันหมด[12] และเท่ากับ

$$W = \frac{Q\rho_R\sigma}{(1-\rho_R)(1-\sigma)} \tag{3.22}$$

ซึ่งเป็นการแสดงว่าไม่มีระบบแบบใดสามารถที่จะให้ค่าคาดหมายของเวลารอคอยน้อยกว่ากัน แต่ระบบเวียนรับบริการ (round robin) สามารถที่จะทำให้หน่วยที่ต้องการรับบริการในระยะเวลาน้อย จะมีค่าคาดหมายของเวลารอคอยน้อยกว่าค่าคาดหมายของเวลารอคอยในระบบ FCFS

การวิเคราะห์ที่ผ่านมาไม่ได้พิจารณาถึงเวลาที่ต้องใช้ไปในการนำเอาหน่วยงานที่อยู่ในแถวเข้าไปในแหล่งให้บริการและเวลาที่ต้องใช้ไปในการนำเอาหน่วยที่อยู่ในแหล่งให้บริการแต่ยังไม่เสร็จการรับบริการกลับเข้าสู่ระบบเพื่อรอรับบริการอีกในรอบต่อไป ซึ่งเป็นกรณีที่เวลาสับเปลี่ยนมีค่าเท่ากับศูนย์ อีกประการหนึ่ง การเข้าสู่ระบบของหน่วยรับบริการจะเข้าได้ ณ เวลาที่การบริการแล้วเสร็จในแต่ละรอบเท่านั้น หากเวลาสับเปลี่ยนมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ การเข้าสู่ระบบของหน่วยรับบริการในแต่ละรอบยังคงมีได้เพียงหนึ่งครั้งเท่านั้น แต่การพิจารณาจะแยกเป็น 2 กรณีคือ กรณีแรกจะเป็นกรณีที่ไม่ยอมให้มีหน่วยรับบริการเกิดขึ้นในช่วงเวลาสับเปลี่ยน ในกรณีนี้ค่าคาดหมายของจำนวนหน่วย

---

[12] ดูวิธีพิสูจน์ที่ภาคผนวก ก-4 ท้ายเล่ม.

รับบริการที่อยู่ในระบบยังคงมีค่าเท่าเดิมเหมือนในกรณีที่เวลาสับเปลี่ยนมีค่าเท่ากับศูนย์ แต่เวลาเฉลี่ยของการรอคอยจะเพิ่มขึ้นจากเดิม กรณีที่สองจะเป็นกรณีที่ยอมให้หน่วยรับบริการเกิดขึ้นในช่วงเวลาสับเปลี่ยนได้ ในขั้นแรกจะพิจารณารายละเอียดของกรณีแรกก่อนตามระบบ RRLA และ RREA

พิจารณาระบบ RRLA เมื่อในช่วงเวลาสับเปลี่ยนไม่ยอมให้หน่วยรับบริการเกิดขึ้นในระบบ โดยให้ N_i^{ℓ} เป็นค่าคาดหมายของจำนวนหน่วยรับบริการซึ่งรอรับบริการในระบบตั้งแต่เสร็จจากการรับบริการรอบที่ i-1 จนกระทั่งเสร็จการรับบริการรอบที่ i ของหน่วยที่กำลังพิจารณา ซึ่งรอบที่ 0 คือเวลาที่หน่วยรับบริการที่กำลังพิจารณานี้เริ่มเข้าสู่ระบบ ดังนั้น จำนวนครั้งทั้งหมดที่จะต้องนำหน่วยรับบริการเข้าสู่แหล่งให้บริการสำหรับหน่วยที่ต้องการรับบริการ n รอบ จึงเท่ากับ $\sum_{i=1}^{n} N_i^{\ell}$ ดังแสดงไว้ในภาคผนวก ก-1 ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{n} N_i^{\ell} = \frac{n}{1-\rho_R} - \frac{\lambda Q}{1-\rho_R}\left[1+\frac{(1-\delta\alpha)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\delta)^2\,(1-\rho_R)}\right] \quad (3.23)$$

ดังนั้น หาก S เป็นค่าเฉลี่ยของเวลาสับเปลี่ยนในการนำหน่วยรับบริการ 1 หน่วย เข้าสู่หรือออกจากแหล่งให้บริการ เวลารอคอยที่ต้องใช้ในการนำหน่วยรับบริการเข้าสู่แหล่งให้บริการจึงมีค่าเท่ากับ

$$S\sum_{i=1}^{N} N_i^{\ell} = \frac{nS}{1-\rho_R} - \frac{\lambda QS}{1-\rho_R}\left[1+\frac{(1-\delta\alpha)(1-\alpha)^{n-1}}{(1-\delta)^2(1-\rho_R)}\right] \quad (3.24)$$

และเมื่อรับบริการแล้ว $\sum_{i=1}^{n} N_i^{\ell}$ หน่วยนี้จะต้องกลับไปต่อท้ายแถว โดย $\sum_{i=1}^{n} N_i^{\ell}-n$ หน่วยจะกลับไปต่อท้ายแถวด้วย ความน่าจะเป็น δ และหน่วยที่พิจารณาจะกลับเข้าต่อท้ายแถวเพียง n-1 ครั้งเท่านั้น ดังนั้น เวลารอคอยที่ต้องใช้ในการนำหน่วยที่อยู่ในแหล่งให้บริการกลับเข้าต่อท้ายแถวอีกจึงเท่ากับ $S\delta\left[\sum_{i=1}^{n} N_i^{\ell} - n\right] + (n-1)S$

เวลารอคอยที่เพิ่มจากสมการที่ (3.19) ทั้งหมดจึงเท่ากับ

$$\Delta_n^{\ell} = S\sum_{i=1}^{n} N_i^{\ell} + S\delta\left[\sum_{i=1}^{n} N_i^{\ell} - n\right] + (n-1)S \qquad (3.25)$$

และค่าคาดหมายของเวลารอคอยจะเพิ่มขึ้นจากสมการที่ (3.22) ทั้งหมดเท่ากับ

$$\Delta^{\ell} = S\sum_{i=1}^{n} S_n N_i^{\ell} + S\delta\left[\sum_{i=1}^{n} S_n N_i^{\ell} - \bar{n}\right] + (\bar{n}-1)S$$

$$= \frac{S\rho_R\delta}{(1-\rho_R)(1-\delta)} + \bar{n}S + \frac{S\rho_R\delta^2}{(1-\rho_R)(1-\delta)} + (\bar{n}-1)S \qquad (3.26)$$

$$= \bar{n}SE^{\ell} + \bar{n}S + \bar{n}SE^{\ell}\delta + (\bar{n}-1)S \qquad (3.27)$$

โดย S_n และ $\bar{n}$ มีค่าเท่ากับสมการที่ (3.1) และ (3.2)

ในทำนองเดียวกันในระบบ RREA ให้ N_i^e เป็นค่าคาดหมายของจำนวนหน่วยรับบริการซึ่งรอรับบริการอยู่ในระบบตั้งแต่เสร็จจากการรับบริการรอบที่ i-1 จนกระทั่งเสร็จการรับบริการรอบที่ i ของหน่วยที่กำลังพิจารณา ความหมายของรอบที่ 0 คือเวลาที่หน่วยที่กำลังพิจารณาเริ่มเข้าสู่ระบบ ดังนั้น จำนวนครั้งทั้งหมดที่จะต้องนำหน่วยรับบริการเข้าสู่แหล่งให้บริการสำหรับหน่วยที่ต้องการรับบริการ n รอบ เท่ากับ $\sum_{i=1}^{n} N_i^e$ ดังแสดงไว้ในภาคผนวก ก-2 ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{n} N_i^e = \frac{n}{1-\rho_R} - \rho_R - \frac{\rho_R\lambda Q}{1-\rho_R}\left[1 + \frac{(1-\alpha\delta)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\rho_R)(1-\delta)^2}\right] \qquad (3.28)$$

เวลารอคอยที่ต้องใช้ในการนำหน่วยรับบริการเข้าสู่แหล่งให้บริการจึงมีค่าเท่ากับ $S \sum_{i=1}^{n} N_i^e$ เมื่อ $\sum_{i=1}^{n} N_i^e$ หน่วยนี้รับบริการแล้ว ก็จะต้องกลับไปต่อท้ายแถวอีกโดย $\sum_{i=1}^{n} N_i^e - n$ หน่วย จะกลับไปต่อท้ายแถวด้วยความน่าจะเป็น δ และหน่วยที่พิจารณาก็จะกลับเข้าต่อท้ายแถวเพียง n-1 ครั้งเท่านั้น ดังนั้น เวลารอคอยที่ต้องใช้ในการนำหน่วยที่อยู่ในแหล่งให้บริการกลับเข้าต่อท้ายแถวอีกจึงเท่ากับ $S\delta \left[\sum_{i=1}^{n} N_i^e - n \right] + (n-1)S$ เวลารอคอยที่เพิ่มขึ้นจากสมการที่ (3.20) ทั้งหมดจึงเท่ากับ

$$\Delta_n^e = S \sum_{i=1}^{n} N_i^e + S\delta \left[\sum_{i=1}^{n} N_i^e - n \right] + (n-1)S \qquad (3.29)$$

และค่าคาดหมายของเวลารอคอยจะเพิ่มจากสมการที่ (3.22) ทั้งหมดเท่ากับ

$$\Delta^e = S \sum_{i=1}^{n} S_n N_i^e + S\delta \left[\sum_{i=1}^{n} S_n N_i^e - \bar{n} \right] + (\bar{n}-1)S$$

$$= \frac{S \rho_R \delta}{(1-\rho_R)(1-\delta)} + \bar{n}S + \frac{S \rho_R \delta^2}{(1-\rho_R)(1-\delta)} + (\bar{n}-1)S \quad (3.30)$$

จากสมการที่ (3.26) และสมการที่ (3.30) จะพบว่า ค่าคาดหมายของเวลารอคอยสำหรับกรณีเวลาสับเปลี่ยนไม่เท่ากับศูนย์และไม่ยอมให้หน่วยใหม่เกิดขึ้นในระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยนทั้งระบบ RRLA และ RREA มีค่าเท่ากัน เช่นเดียวกันกับกรณีเวลาสับเปลี่ยนมีค่าเท่ากับศูนย์

ส่วนในกรณีที่สองซึ่งยอมให้หน่วยรับบริการเกิดขึ้นได้ในช่วงเวลาสับเปลี่ยนการเข้าสู่ระบบยังคงมีได้เพียงครั้งเดียวเท่านั้นในแต่ละรอบของการให้บริการของแหล่งบริการ การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ในกรณีนี้อาจกระทำได้ด้วยความยากลำบากเนื่องจากเวลาสับเปลี่ยนเป็นตัวแปรสุ่ม การศึกษาสำหรับกรณีที่สองจึงกระทำด้วยตัวแบบจำลอง (simulation model) ซึ่งจะได้กล่าวถึงในบทต่อไป

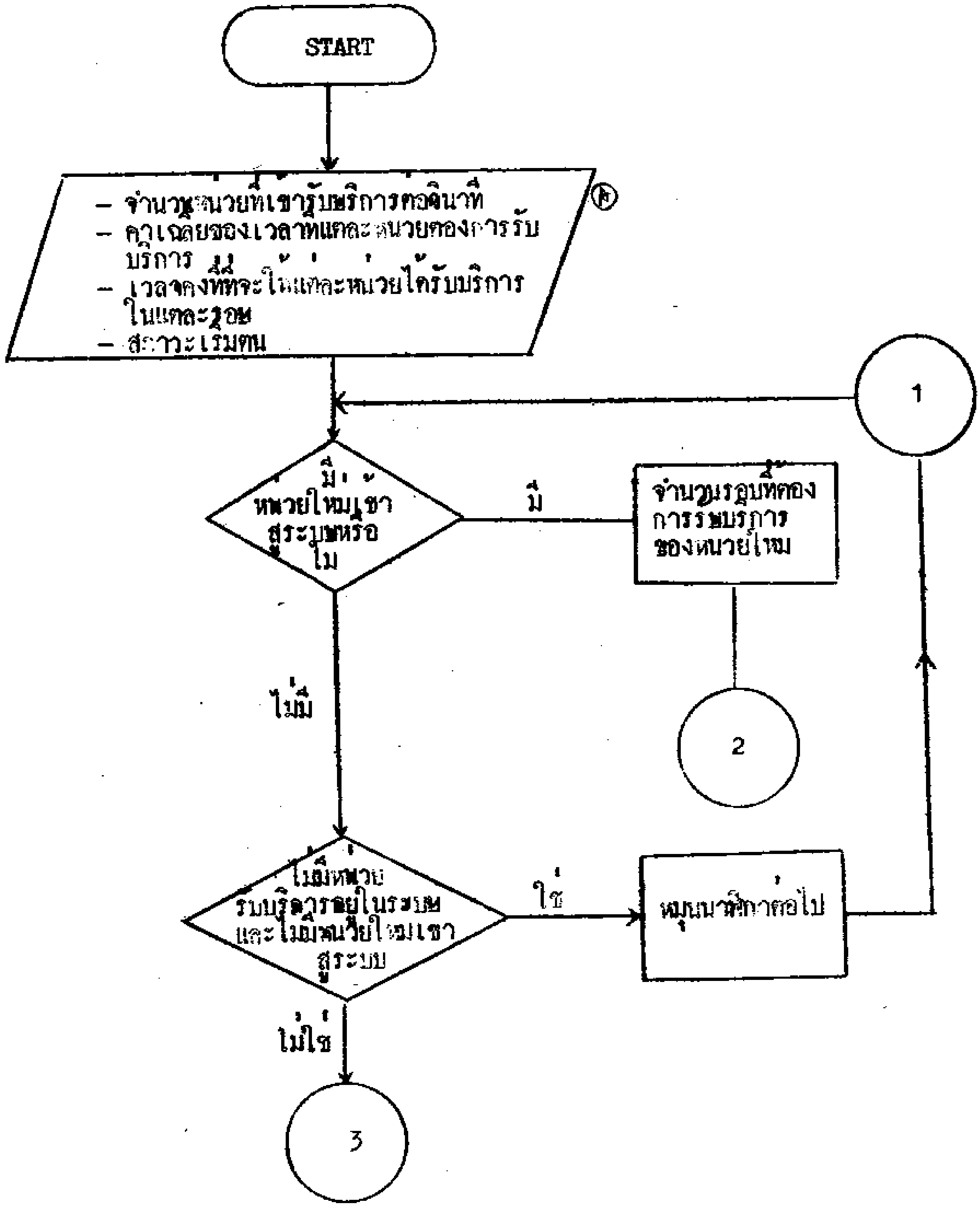
บทที่ 4
การจำลองโดยใช้เครื่องจักรคำนวณ

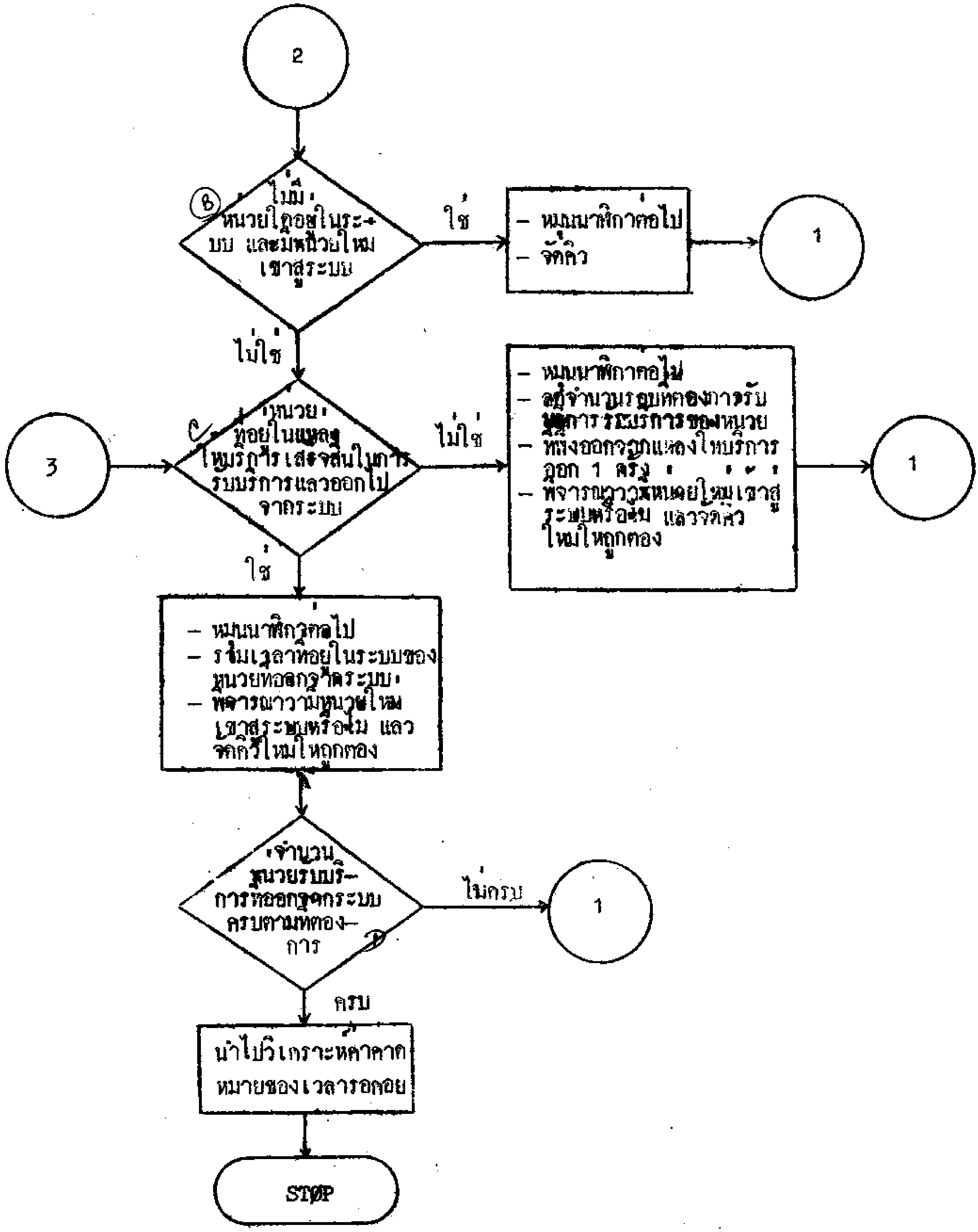
การศึกษาเวลารอคอยในระบบต่าง ๆ เมื่อเวลาสับเปลี่ยนมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ โดยใช้ตัวแบบจำลอง จะดำเนินเป็นขั้นตอน 2 ขั้นตอนคือ ขั้นตอนแรกเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบ โดยกำหนดให้เวลาสับเปลี่ยนในตัวแบบมีค่าเท่ากับศูนย์ แล้วนำผลลัพธ์จากตัวแบบจำลองเปรียบเทียบกับค่าต่าง ๆ ซึ่งคำนวณจากการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ตามที่ได้แสดงไว้ในบทที่ 3 เมื่อแน่ใจว่าตัวแบบจำลองที่สร้างขึ้นมีความถูกต้อง จึงทำการศึกษาในขั้นที่ 2 คือหาค่าคาดหมายของเวลารอคอยในระบบต่างๆ ที่ได้กล่าวในบทที่ 3

ในบทนี้จะได้กล่าวถึงแผนภูมิจำลองของตัวแบบ เทคนิคการผลิตตัวเลขสุ่มที่ใช้ในตัวแบบ รวมทั้งการทดสอบความเป็นสุ่มของตัวเลขที่ผลิตออกมาด้วย ในตอนท้ายของบทนี้จะกล่าวถึงแผนภูมิของโปรแกรม และการค้นหาค่าต่ำสุดโดยวิธีของ Fibonacci ซึ่งจะใช้ในตัวแบบอีกด้วย เนื่องจากเวลาคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการศึกษานี้มีจำนวนจำกัด การศึกษาจึงกระทำเฉพาะระบบ RREA เท่านั้น

<u>แผนภูมิจำลองระบบการแบ่งเวลากันในการรับบริการ ณ แหล่งให้บริการ</u>

แผนภูมิจำลองของระบบที่สร้างขึ้นนี้ได้สร้างขึ้นให้สอดคล้องกับการทำงานของระบบเวียนรับบริการดังที่ได้กำหนดไว้ในบทที่ 3 เพื่อที่จะทำให้ระบบเข้าสู่สภาวะปกติเร็วขึ้น การจำลองนี้จึงเริ่มจากระบบที่สภาวะเริ่มต้นมีจำนวนหน่วยอยู่ในระบบเท่ากับค่าคาดหมาย E^e การทำงานของระบบจะพิจารณาเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในระบบที่ละช่วงเวลาคงที่ Q ที่กำหนดให้บริการ เมื่อจำนวนหน่วยรับบริการเสร็จสิ้นการรับบริการออกจากระบบครบตามจำนวนที่ต้องการแล้วก็จะได้เวลารอคอยที่แต่ละหน่วยรับบริการใช้ไปในระบบ และจะได้นำไปวิเคราะห์หาค่าคาดหมายของเวลารอคอยต่อไป แผนภูมิจำลองของระบบได้แสดงไว้ดังนี้


START
– จำนวนหน่วยที่เข้ารับบริการต่อนาที
– ค่าเฉลี่ยของเวลาที่แต่ละหน่วยต้องการรับบริการ
– เวลาคงที่ที่จะให้แต่ละหน่วยได้รับบริการในแต่ละรอบ
– สภาวะเริ่มต้น
1
มีหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบหรือไม่
มี
จำนวนรอบที่ต้องการรับบริการของหน่วยใหม่
2
ไม่มี
ไม่มีหน่วยรับบริการอยู่ในระบบและไม่มีหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบ
ใช่
หมุนนาฬิกาต่อไป
ไม่ใช่
3


2
ไม่มีหน่วยใดอยู่ในระบบ และมีหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบ
ใช่
– หมุนนาฬิกาต่อไป
– จัดคิว
1
ไม่ใช่
3
หน่วยที่อยู่ในแหล่งให้บริการเสร็จสิ้นในการรับบริการแล้วออกไปจากระบบ
ไม่ใช่
– หมุนนาฬิกาต่อไป
– ลดจำนวนรอบที่ต้องการรับบริการของหน่วย
– ทิ้งออกจากแหล่งให้บริการออก 1 ครั้ง
– พิจารณาว่ามีหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบหรือไม่ และจัดคิวใหม่ให้ถูกต้อง
1
ใช่
– หมุนนาฬิกาต่อไป
– รวมเวลาที่อยู่ในระบบของหน่วยที่ออกจากระบบ
– พิจารณาว่ามีหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบหรือไม่ และจัดคิวใหม่ให้ถูกต้อง
จำนวนหน่วยรับบริการที่ออกจากระบบครบตามที่ต้องการ
ไม่ครบ
1
ครบ
นำไปวิเคราะห์ค่าคาดหมายของเวลารอคอย
STOP

<u>การกำเนิดเลขสุ่มสำหรับการจำลอง</u>

ในการศึกษาเวลารอคอยของหน่วยรับบริการในตัวแบบจำลองจะต้องใช้เลขสุ่มเพื่อหา

1. หน่วยใหม่ที่เข้าสู่ระบบ

2. เวลาที่ต้องการรับบริการของหน่วยที่เข้าสู่ระบบ

3. เวลาสับเปลี่ยนคือ เวลาที่เสียไปในการนำเอาหน่วยที่อยู่ในคิว เข้าสู่แหล่งให้บริการและเวลาที่เสียไปในการนำเอาหน่วยที่อยู่ในแหล่งให้บริการจนครบเวลาคงที่ที่กำหนดให้ แต่ยังไม่เสร็จสิ้นการรับบริการกลับเข้าต่อท้ายคิวอีกครั้งหนึ่ง

การหาหน่วยใหม่ที่เข้าสู่ระบบจะแบ่งพิจารณาตามขั้นตอนการศึกษาคือ

1. กรณีเวลาสับเปลี่ยนมีค่าเท่ากับศูนย์ ความน่าจะเป็นที่จะมีหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลา Q จะเท่ากับ λQ โดย λ เป็นค่าเฉลี่ยของจำนวนหน่วยเข้าสู่ระบบต่อหน่วยเวลา

2. กรณีเวลาสับเปลี่ยนมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ แต่ในช่วงเวลาสับเปลี่ยนนี้จะไม่ยอมให้มีหน่วยรับบริการเกิดขึ้น ความน่าจะเป็นที่จะมีหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลา Q บวกกับเวลาสับเปลี่ยน ยังคงเท่าเดิมคือ λQ

3. กรณีเวลาสับเปลี่ยนมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ แต่ยอมให้หน่วยรับบริการเกิดขึ้นได้ในช่วงเวลาสับเปลี่ยน ความน่าจะเป็นที่จะมีหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลา Q บวกกับเวลาสับเปลี่ยน S จึงเท่ากับ $\lambda(Q+S)$

เนื่องจากหน่วยรับบริการจะออกจากแหล่งให้บริการได้ทุก ๆ Q หน่วยเวลาเท่านั้น แม้ว่าหน่วยรับบริการนั้น ๆ จะเสร็จจากการรับบริการก่อนหมด Q หน่วยเวลาก็ตาม จึงเป็นการเหมาะสมที่จะกล่าวถึงเวลาที่หน่วยรับบริการต้องการรับบริการในเทอมของจำนวนเท่าของ Q ดังนั้น ในการศึกษานี้จะให้การแจกแจงของจำนวนเท่าของ Q ในการรับบริการเป็นแบบ geometric

$$S_n = (1-\delta)\delta^{n-1} \tag{4.1}$$

การแจกแจงของเวลารับบริการตามสมการ (4.1) ในระบบดังกล่าวเป็นผลจากการแจกแจงของเวลารับบริการแบบ exponential เมื่อหน่วยรับบริการถูกกำหนดให้ออกจากแหล่งบริการได้เฉพาะเวลาที่เป็นจำนวนเท่าของ Q เท่านั้น ค่าคาดหมายของเวลาในการรับบริการตามสมการ (4.1) จึงเขียนได้เท่ากับ $Q/(1-\delta)$ หน่วยเวลา

ในการศึกษานี้ เวลาสับเปลี่ยนในการนำเอาหน่วยที่อยู่ในคิวเข้าสู่แหล่งให้บริการหรือการนำเอาหน่วยที่อยู่ในแหล่งให้บริการจนครบเวลาคงที่ที่กำหนดให้ แต่ยังไม่เสร็จสิ้นการรับบริการกลับเข้าต่อท้ายคิวอีกเพื่อรอรับบริการในรอบต่อไป มีการแจกแจงแบบเดียวกันคือ

$$f(x) = \frac{1}{800}(50-x) \quad ; \quad 10 \leq x \leq 50 \qquad (4.2)$$

โดยเวลาสับเปลี่ยนน้อยที่สุดเท่ากับ .010 วินาที และเวลาสับเปลี่ยนมากที่สุดเท่ากับ 0.050 วินาที ค่าคาดหมายของเวลาสับเปลี่ยนตามสมการ (4.2) มีค่าเท่ากับ .02333 วินาที

เนื่องจากคอมพิวเตอร์ที่ใช้จำลองในการศึกษานี้เป็นเครื่อง B-1700 ขนาด 48K byte ภาษาจำลอง (simulation language) เช่น GPSS, SIMSCRIPT ไม่อาจใช้ในการจำลองได้ การจำลองจึงใช้ภาษา FØRTRAN ดังนั้น เลขสุ่มที่ใช้ในการจำลองจึงต้องผลิตขึ้นเองทั้งสิ้น จึงควรพิจารณาถึงเทคนิคการผลิตเลขสุ่มต่าง ๆ ด้วย

เทคนิคกำเนิดเลขสุ่มแบ่งได้กว้าง ๆ ออกเป็น 3 ประเภทดังนี้

ประเภทที่ 1 เทคนิคโปรแกรม วิธีนี้เลขสุ่มจะกำเนิดขึ้นโดย recurence relation ซึ่งหมายความว่าเลขสุ่มตัวถัดไป x_{j+1} จะต้องใช้เลขสุ่ม x_j หรือกลุ่มหนึ่งของเลขสุ่มตัวก่อน ๆ เทคนิคโปรแกรมนี้จะให้เลขเป็นอนุบรรพที่มีคาบ (periodic sequence) ความจริงอนุบรรพที่มีคาบจะเป็นอนุบรรพสุ่มในความหมายที่แท้จริงของความสุ่มมิได้ อย่างไรก็ตาม อนุบรรพที่มีคาบใดที่มีคุณสมบัติบางประการของอนุบรรพสุ่มเราจะเรียกว่าเป็นอนุบรรพคล้ายสุ่ม (pseudo-random sequence) และอาจยอมรับว่าเป็นอนุบรรพสุ่ม

ข้อดีของเทคนิคโปรแกรมในการกำเนิดเลขสุ่มคือ เราสามารถตรวจสอบการทำงานของคอมพิวเตอร์ได้ในระหว่างการแก้ปัญหา ซึ่งหมายถึงว่าเราสามารถซ้ำการทำงานนั้นได้ และวิธีการในการกำเนิดเลขสุ่มนั้นไม่ยุ่งยากมากนัก

ข้อเสียของเทคนิคโปรแกรมนั้นได้แก่ คุณสมบัติเชิงสถิติของเลขสุ่มที่ผลิตโดยวิธีนี้อนุมานได้ยากมากทางทฤษฎี และยิ่งกว่านั้นอนุบรรพของเลขที่ผลิตออกมาเป็นอนุบรรพที่มีคาบ

ประเภทที่ 2 เครื่องมือเลขสุ่ม (random number device) วิธีนี้จะแปลงผลลัพธ์จากขบวนการสุ่มกายภาพ (random physical process) ให้เป็นอนุบรรพของเลขฐานสอง เลขที่ผลิตด้วย RND นี้เป็นเลขสุ่มที่แท้จริง แต่ข้อเสียอย่างหนึ่งของวิธีนี้คือ ความขาดเสถียรภาพของ RND ทำให้ต้องสิ้นเปลืองการบำรุงรักษาและต้องทำการทดสอบ RND เป็นประจำ อีกประการหนึ่งก็คือ เมื่อใช้ RND จะไม่สามารถตรวจสอบความผิดพลาดในการคำนวณระหว่างการจำลองได้ เพราะ RND ไม่สามารถจะให้อนุบรรพสุ่มที่ซ้ำกันได้

ประเภทที่ 3 เก็บตารางเลขสุ่มไว้ในคอมพิวเตอร์ วิธีนี้มักจะทำไม่ได้เพราะจะทำให้เนื้อที่สำหรับเก็บข้อมูลอื่นซึ่งเกี่ยวข้องกับขบวนการที่กำลังจำลองอยู่น้อยลง วิธีนี้รวมถึงการเก็บตารางเลขสุ่มลงในเทปหรือดรัมด้วย วิธีนี้ได้รับความนิยมน้อยมาก

การจำลองบนคอมพิวเตอร์โดยทั่ว ๆ ไปจะใช้เทคนิคโปรแกรมในการผลิตเลขสุ่มและวิธีที่ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายก็คือวิธี Multiplicative Congruential ซึ่งคำนวณเลขสุ่ม x_{n+1} จากเลขสุ่ม x_n โดยใช้ความสัมพันธ์ recurrence ดังนี้

$$x_{n+1} \equiv h\, x_n \qquad \text{(module m)} \tag{4.3}$$

โดย h และ m เป็นเลขจำนวนเต็มบวก และ $h < m$

สัญลักษณ์คณิตศาสตร์ดังกล่าวแสดงว่า x_{n+1} เป็นเศษของผลหาร hx_n ด้วย m x_{n+1} จึงเป็นเลขจำนวนเต็มที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ m โดยค่า x_o, h และ m เป็นค่าที่เราเลือกขึ้นมา

ถ้า h มีค่าอยู่ในรูป $8t \pm 3$ แล้ว คาบของอนุบรรพจะเท่ากับ 2^{k-2} เมื่อ m มีค่าเท่ากับ 2^k และ x_o เป็นเลขคี่ใด ๆ 13/ และถ้า h มีค่าอยู่ในรูป $8t - 3$ แล้ว อนุบรรพของเลขซึ่งคำนวณจากสมการ (4.3) จะเป็นการสลับ (permutation) ของเลข

13/ R.W. Hamming, Numerical Methods for Scientists and Engineers, 2^{nd} Edition, McGraw-Hill, 1973.

$1, 5, 9, \ldots, 2^k - 3$ ถ้า $x_o \equiv 1 \pmod 4$

หรือ

$3, 7, 11, \ldots, 2^k - 1$ ถ้า $x_o \equiv 3 \pmod 4$

การจำลองนี้ใช้เลขสุ่ม 2 ชุดคือ

ชุดที่ 1 $h = 527,898,597$

$m = 2^{31} = 2,147,483,648$

$x_o = 1$

คาบของอนุกรมของเลขสุ่มชุดนี้จะเท่ากับ 2^{29} และเมื่อนำเลขซึ่งคำนวณจากสมการ (4.3) มาหารด้วย 4 แล้ว จะมีค่าในพิสัยตั้งแต่ 0 ถึง $2^{29}-1 = 536,370,911$

ชุดที่ 2 $h = 637,085$

$m = 2^{22} = 4,194,304$

$x_o = 1$

คาบของอนุกรมของเลขสุ่มชุดที่ 2 จะเท่ากับ 2^{20} และเมื่อนำเลขซึ่งคำนวณจากสมการ (4.3) มาหารด้วย 4 แล้ว จะมีค่าในพิสัยตั้งแต่ 0 ถึง $2^{20}-1 = 1,048,575$

เลขสุ่มชุดที่ 1 ใช้สำหรับหาว่ามีหน่วยใหม่เข้ารับบริการหรือไม่ กับใช้หาเวลาที่ต้องการรับบริการของหน่วยที่เข้าสู่ระบบ ส่วนชุดที่ 2 ใช้ในการกำเนิดเวลาสับเปลี่ยน

โปรแกรมการกำเนิดเลขสุ่มชุดที่ 1 และ 2 เขียนได้ดังนี้

```
SUBRØUTINE RANDØM (NRAN, RAN)
DØUBLE PRECISIØN NRAN, AAA
NRAN = NRAN* 527898597
L = NRAN/2147483648
AAA = L
AAA = AAA*2147483648
```

```
NRAN = NRAN - AAA
IRR = NRAN/4
AAA = IRR
RAN = AAA/536370911
RETURN
END

SUBRØUTINE RAND (BRAN, RAN)
DØUBLE PRECISIØN BRAN, AAA
BRAN = BRAN*637085
L = BRAN/4194304
AAA = L
AAA = AAA*4194304
BRAN = BRAN - AAA
IRR = BRAN/4
AAA = IRR
RAN = AAA/1048575
RETURN
END
```

BRAN และ NRAN ในโปรแกรมคือ เลขสุ่มกระจายสม่ำเสมอในพิสัย $[0, 2^{22} - 1]$ และ $[0, 2^{31} - 1]$ ตามลำดับ และ RAN คือเลขสุ่มสม่ำเสมอในพิสัย $[0, 1]$

<u>การทดสอบเชิงสถิติของเลขสุ่ม</u>

เมื่อสร้างอนุกรมของเลขตามสมการ (4.3) แล้ว จะต้องทำการทดสอบว่าเลขที่ผลิตขึ้นมีคุณสมบัติเกี่ยวกับความเป็นสุ่มเพียงพอหรือไม่ คุณสมบัติความเป็นสุ่มในการศึกษานี้จะกำหนดเพียง 2 ประการคือ เลขสุ่มที่ผลิตขึ้นจะต้องกระจายสม่ำเสมอ และเลขที่ผลิตขึ้นจะต้องมีความอิสระต่อกัน

ในการทดสอบคุณสมบัติประการแรกจะสร้างสถิติทดสอบขึ้นโดยการเปรียบเทียบความถี่ของเลขสุ่มที่ผลิตขึ้น กับความถี่คาดหมายของเลขสุ่มจริงในช่วงย่อยที่จะแบ่งขึ้น ให้ k เป็นจำนวนช่วงย่อยที่แบ่งขึ้นใน $[0, 1]$ และจำนวนเลขสุ่มที่ผลิตขึ้นและต้องการทดสอบมีจำนวน M ตัว

f_i คือความถี่ของเลขที่ผลิตขึ้นที่อยู่ในช่วงย่อยที่ i

E_i คือค่าคาดหมายของจำนวนเลขที่จะอยู่ในช่วงย่อยที่ i ถ้าเลขเชิงสุ่มมีคุณสมบัติเป็นเลขเชิงสุ่มจริง ๆ ในที่นี้มีค่าเท่ากับ M/k

ดังนั้น สถิติทดสอบเมื่อใช้การทดสอบแบบ chi-square คือ

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - E_i)^2}{E_i} \qquad (4.4)$$

โดยองศาแห่งเสรีภาพเท่ากับ $k - 1$

ส่วนการทดสอบคุณสมบัติประการที่สอง จะทดสอบว่าเลขที่ผลิตขึ้นปัจจุบัน และเลขที่ผลิตขึ้นตัวถัดไป มีความเป็นอิสระต่อกันหรือไม่ จำนวนเลขที่ทำการทดสอบยังคงสมมติให้เท่ากับ M ตัว และช่วง $[0, 1]$ ยังคงแบ่งออกเป็น k ช่วงย่อย สร้างตารางความถี่ f_{ij} ขนาด $k \times k$ โดยความถี่ f_{ij} คือจำนวนเลขที่ผลิตขึ้นมีค่าในช่วงย่อยที่ i ถูกตามด้วยเลขที่ผลิตขึ้นมีค่าในช่วงย่อยที่ j ตารางความถี่นี้จะเปรียบเทียบกับตารางความถี่คาดหมาย E_{ij} โดย E_{ij} คือค่าคาดหมายของจำนวนเลขเชิงสุ่มในช่วงย่อยที่ i ที่ถูกตามด้วยเลขเชิงสุ่มในช่วงย่อยที่ j ถ้าเลขเชิงสุ่มนี้มีคุณสมบัติเป็นเลขเชิงสุ่มที่แท้จริง และมีค่าเท่ากับ M/k^2

สถิติทดสอบในการทดสอบนี้คือ

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \frac{(f_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} - \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{k} f_{ij} - \sum_{j=1}^{k} E_{ij}\right)^2}{\sum_{j=1}^{k} E_{ij}} \qquad (4.5)$$

และมีองศาแห่งเสรีภาพเท่ากับ $k^2 - k$

เลขสุ่มทั้ง 2 ชุดที่จะผลิตขึ้น จะได้รับการทดสอบคุณสมบัติทั้ง 2 ประการ โดยใช้เลขแต่ละหลักจำนวน 6 หลัก ในเลขสุ่มแต่ละจำนวน การทดสอบนี้ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ข.

<u>การจำลองเหตุการณ์ด้วยเลขสุ่มกระจายสม่ำเสมอมาตรฐาน</u>

ในการจำลอง เราจำเป็นจะต้องมีเลขสุ่มที่มีการกระจายแบบต่าง ๆ เลขสุ่มที่กระจายแบบสม่ำเสมอในช่วง [0, 1] มีบทบาทสำคัญมาก เพราะสามารถที่จะกำเนิดเลขสุ่มที่มีการกระ–จายแบบอื่น ๆ โดยใช้เลขสุ่มที่กระจายสม่ำเสมอ

ในการศึกษานี้ จะมีการจำลองเหตุการณ์ 3 อย่างด้วยเลขสุ่มคือ

1. การที่มีหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบ
2. เวลาที่ต้องการรับบริการของหน่วยที่เข้าสู่ระบบ

และ 3. เวลาสับเปลี่ยน

ให้หน่วยใหม่เข้าสู่ระบบด้วยความน่าจะเป็น p ซึ่งมีค่าเท่ากับ λQ ในกรณีที่เวลาสับเปลี่ยนมีค่าเท่ากับศูนย์และในกรณีที่เวลาสับเปลี่ยนมีค่าไม่เท่ากับศูนย์แต่ในช่วงเวลาสับเปลี่ยนจะไม่มีหน่วยรับบริ–การเกิดขึ้น และ p จะมีค่าเท่ากับ $\lambda(Q+S)$ ในกรณีที่เวลาสับเปลี่ยนมีค่าไม่เท่ากับศูนย์แต่หน่วยรับบริการอาจเกิดขึ้นได้ในช่วงเวลาสับเปลี่ยน การจำลองเหตุการณ์นี้อาจกระทำได้โดยนิยาม A เป็นเหตุการณ์ที่ค่าของเลขสุ่มกระจายสม่ำเสมอมาตรฐานมีค่าไม่มากกว่า p และจากนิยามนี้ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A คือ

$$\int_0^p dx = p \tag{4.6}$$

นั่นคือเหตุการณ์ A เกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็น p ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นของหน่วยรับบริการที่จะเข้าสู่ระบบ ดังนั้น จึงอาจใช้เหตุการณ์ A เสมือนเหตุการณ์ที่มีหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบ

พิจารณาเวลาที่รับบริการของหน่วยที่เข้าสู่ระบบ มีการแจกแจงแบบ exponential โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $1/\mu$ ต่อ 1 หน่วย

$$f(x) = \mu e^{-\mu x} \quad ; \quad x > 0 \tag{4.7}$$

ให้ x_{1i} เป็นเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ exponential ซึ่งอาจพิสูจน์ว่าสามารถผลิตจากเลขสุ่มกระจายสม่ำเสมอมาตรฐานด้วยสมการต่อไปนี้

$$x_{1i} = -\frac{1}{\mu} \ln (R_i) \qquad (4.8)$$

เนื่องจากในระบบที่ทำการศึกษานี้ให้หน่วยที่เข้ารับบริการได้ครั้งละ Q วินาที และหน่วยรับบริการจะออกจากแหล่งให้บริการได้เมื่อหมดเวลา Q เท่านั้นแม้จะเสร็จจากการรับบริการก่อนหมดรอบก็ตาม ดังนั้น จำนวนรอบที่เข้ารับบริการจึงเท่ากับ x_{1i}/Q รอบ ถ้า Q หาร x_{1i} ได้ลงตัว และเท่ากับ $[x_{1i}/Q]$ 14/ + 1 รอบ ถ้า Q หาร x_i ไม่ลงตัว

เวลาสับเปลี่ยนในการศึกษานี้มีการแจกแจงดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{800}(50-x) \quad ; \quad 10 \leq x \leq 50 \qquad (4.9)$$

ให้ x_{2i} เป็นเลขเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงตามสมการ (4.9) ซึ่งอาจผลิตจากเลขสุ่มกระจายสม่ำเสมอมาตรฐานตามสมการ (4.10)

$$x_{2i} = 50 - 40\sqrt{1 - R_i} \qquad (4.10)$$

<u>สัญลักษณ์ที่ใช้ในแผนภูมิโปรแกรม</u>

N	–	จำนวนหน่วยที่อยู่ในระบบในขณะเวลาหนึ่ง ๆ
RA	–	จำนวนหน่วยที่เข้ารับบริการต่อวินาที
SM	–	ค่าเฉลี่ยของเวลาที่แต่ละหน่วยต้องการรับบริการ
Q	–	เวลาคงที่ที่จะให้แต่ละหน่วยได้รับบริการในแต่ละรอบ
TIME	–	เวลา
K	–	จำนวนหน่วยที่เสร็จสิ้นการรับบริการและออกจากระบบไปแล้ว
NØP	–	ลำดับของหน่วยที่เข้ารับบริการ
AA	–	ความน่าจะเป็นที่จะมีหน่วยที่เข้าสู่ระบบในแต่ละช่วงของเวลา Q

14/ $[x_{1i}/Q]$ คือจำนวนเต็มใหญ่ที่สุดของ x_{1i}/Q

AR – รหัสที่แสดงว่ามีหน่วยใหม่เข้ามารับบริการหรือไม่

ถ้า AR = 0 แสดงว่าไม่มีหน่วยใหม่เข้ามารับบริการ

ถ้า AR = 1 แสดงว่ามีหน่วยใหม่เข้ามารับบริการ

RS – เวลาที่หน่วยที่เข้ารับบริการต้องการรับบริการจริง ๆ

NS – จำนวนรอบของหน่วยที่เข้ารับบริการต้องการรับบริการ

NQ – หน่วยที่กำลังจะเข้าสู่แหล่งให้บริการ

NF – รหัสที่แสดงว่าหน่วยที่จะออกจากแหล่งให้บริการจะยังต้องการรับบริการอีกต่อไปหรือไม่

ถ้า NF = 1 แสดงว่าหน่วยที่จะออกจากแหล่งให้บริการยังคงต้องการรับบริการอีกต่อไป

ถ้า NF = 2 แสดงว่าหน่วยที่จะออกจากแหล่งให้บริการเสร็จสิ้นการรับบริการแล้ว และออกไปจากระบบ

RAN – เลขสุ่มที่มีการแจกแจงสม่ำเสมอในช่วง [0, 1] ที่กำเนิดขึ้น

NØR(I) – ลำดับของหน่วยที่เข้ารับบริการซึ่งเก็บไว้ในลำดับที่ I ของที่ ๆ เตรียมไว้[15]

ET(I) – เวลาที่เข้าสู่ระบบของหน่วยที่เข้ารับบริการในลำดับที่ NØR(I)

NSURT(I) – จำนวนรอบที่ต้องการรับบริการทั้งหมดของหน่วยที่เข้ารับบริการในลำดับที่ NØR(I)

NUS(I) – จำนวนรอบที่เหลืออยู่และต้องการรับบริการต่อไปอีกของหน่วยที่เข้ารับบริการในลำดับที่ NØR(I)

SUR(I) – เวลาที่ต้องการรับบริการจริง ๆ ของหน่วยที่เข้ารับบริการในลำดับที่ NØR(I)

---

[15] เตรียมที่ ๆ เก็บหน่วยซึ่งยังคงอยู่ในระบบไว้จำนวนหนึ่ง (ต้องเตรียมไว้ให้พอ ในโปรแกรมที่เขียนนี้เตรียมไว้ 50 ที่) หน่วยงานใดที่หลุดไปจากระบบแล้วก็ไม่จำเป็นจะต้องเก็บไว้อีก เพราะจะทำให้เปลือง Memory ของเครื่องคำนวณ

NCØD(I) – รหัสที่แสดงว่าหน่วยที่เข้ารับบริการในลำดับที่ NØR(I) ยังอยู่ในระบบหรือได้ออกไปจากระบบแล้ว

NCØD(I) = 1 แสดงว่าหน่วยงานในลำดับ NØR(I) ยังคงอยู่ในระบบ

NCØD(I) = 0 แสดงว่าหน่วยงานในลำดับ NØR(I) ออกไปจากระบบแล้วเพื่อที่จะได้นำเอาหน่วยที่เข้ารับบริการใหม่เก็บไว้ในตำแหน่งที่ I ได้

QUEUE(N) – ตำแหน่งของ I ที่แสดงงานในลำดับ NØR(I) อยู่ในคิวลำดับที่ N

NUMB – จำนวนหน่วยที่ออกจากระบบที่ต้องการ

TØTAL – ผลรวมของเวลาที่อยู่ในระบบทั้งหมดของหน่วยที่ออกจากระบบ

WAIT – ระยะเวลาการรอคอยของหน่วยที่ออกจากระบบ

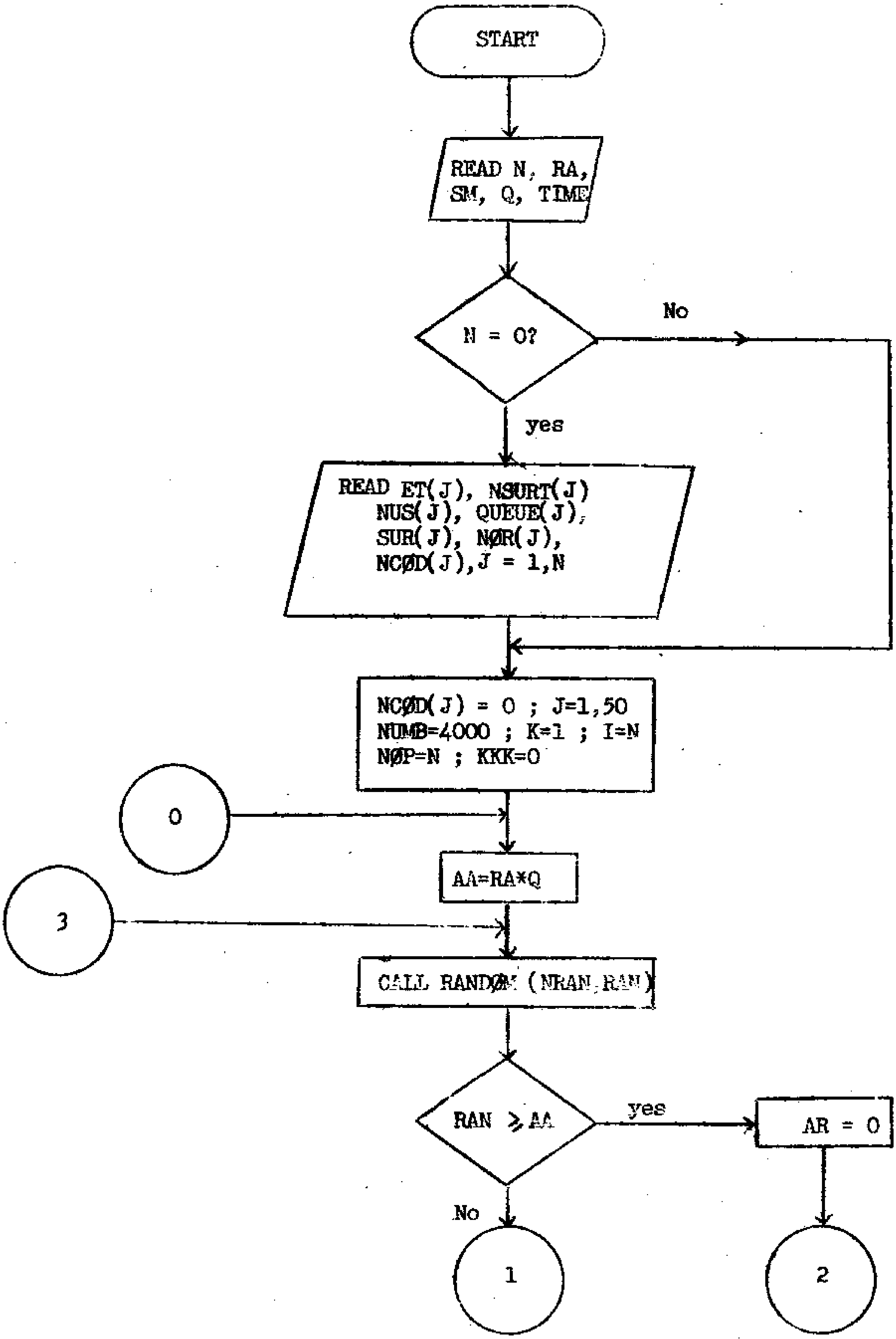
SURVT – เวลาที่ให้บริการซึ่งคิดเป็นจำนวนเท่าของ Q

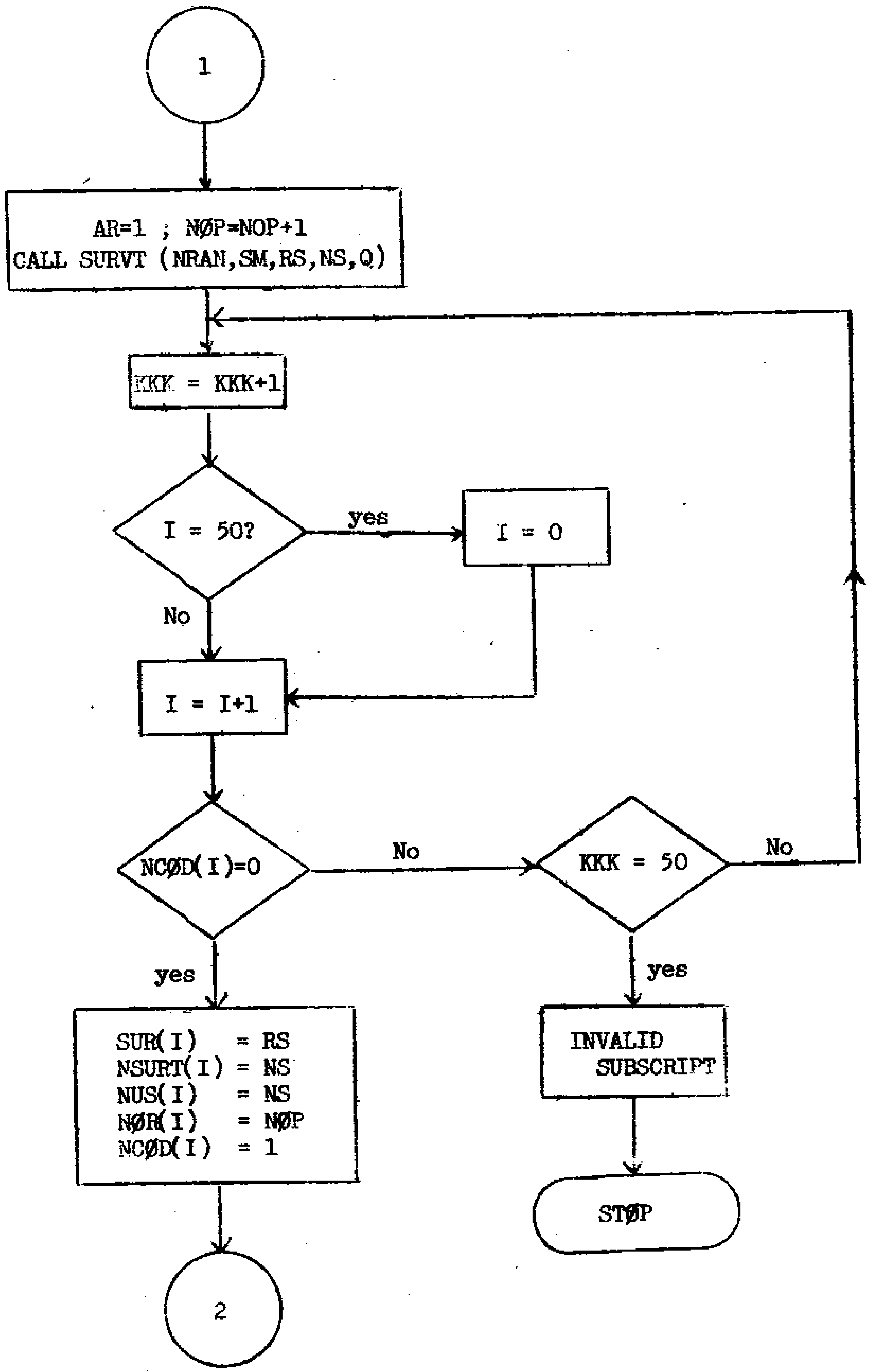
ST – เวลาสับเปลี่ยน

STR – เวลาที่ใช้ไปในการนำเอาหน่วยที่อยู่ในคิวเข้าสู่แหล่งให้บริการ

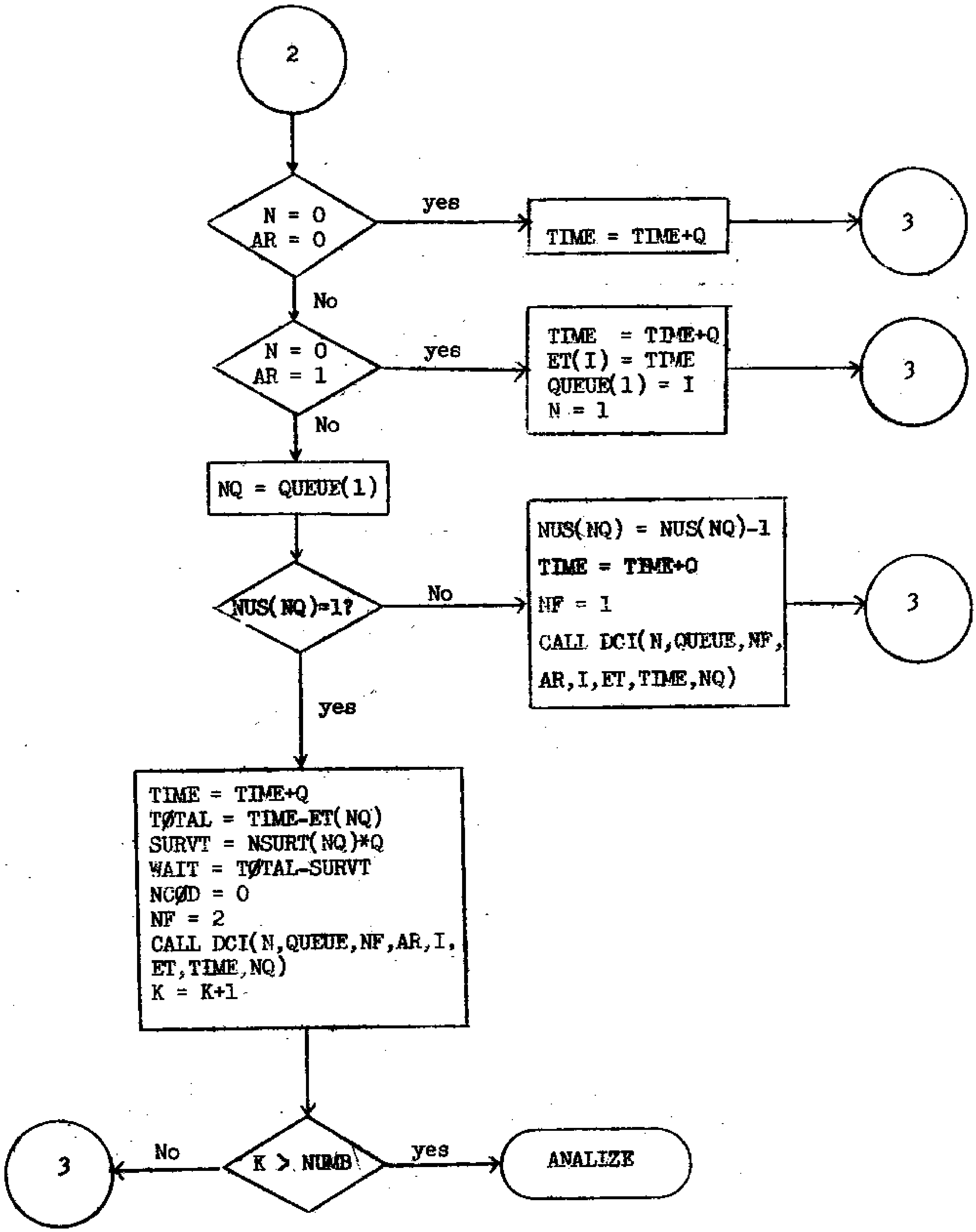
STW – เวลาที่เสียไปในการนำเอาหน่วยที่อยู่ในแหล่งให้บริการจนครบเวลาคงที่ที่กำหนดให้แก่ยังไม่เสร็จสิ้นการรับบริการกลับเข้าต่อท้ายคิวอีก

<u>แผนภูมิโปรแกรม</u>

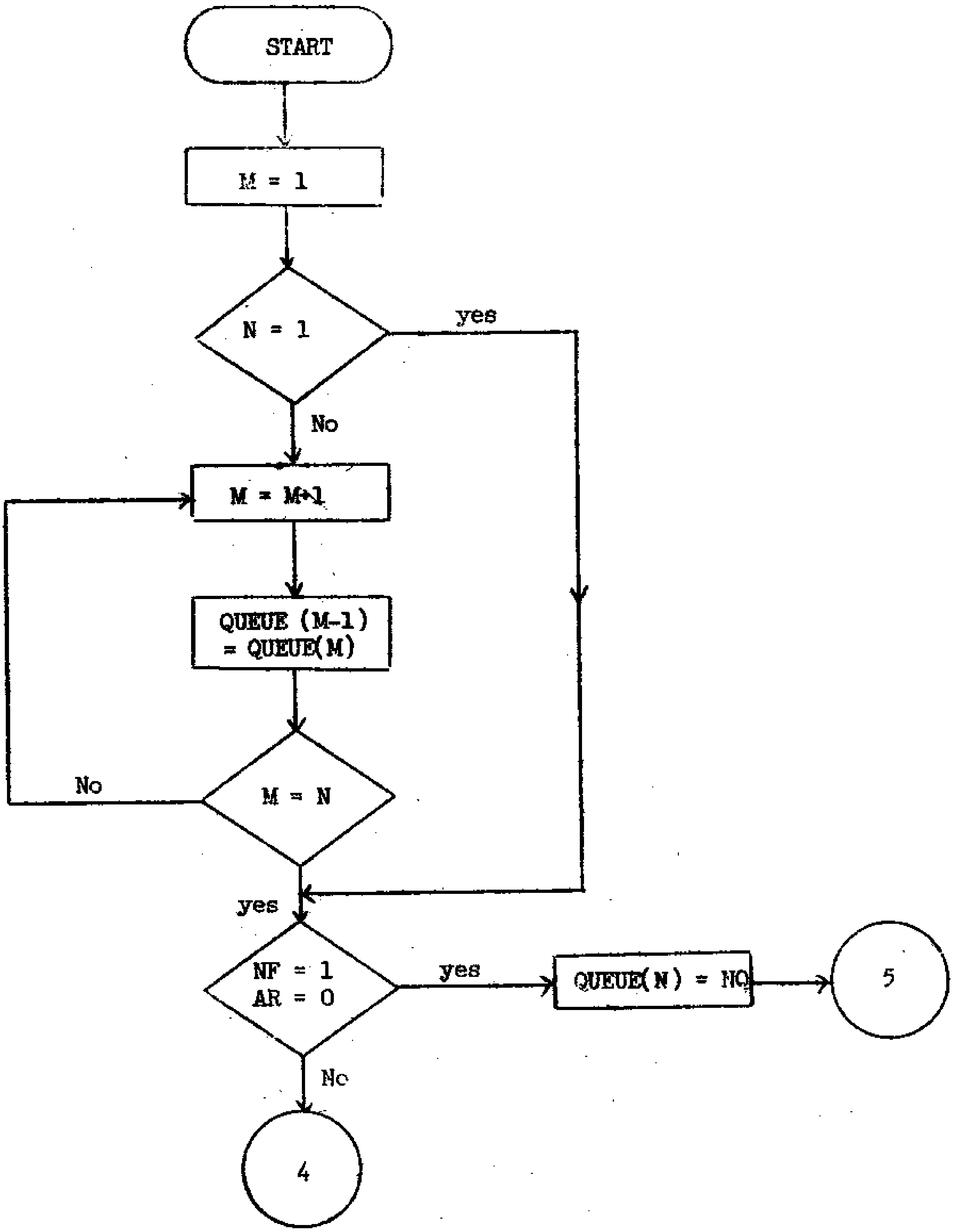


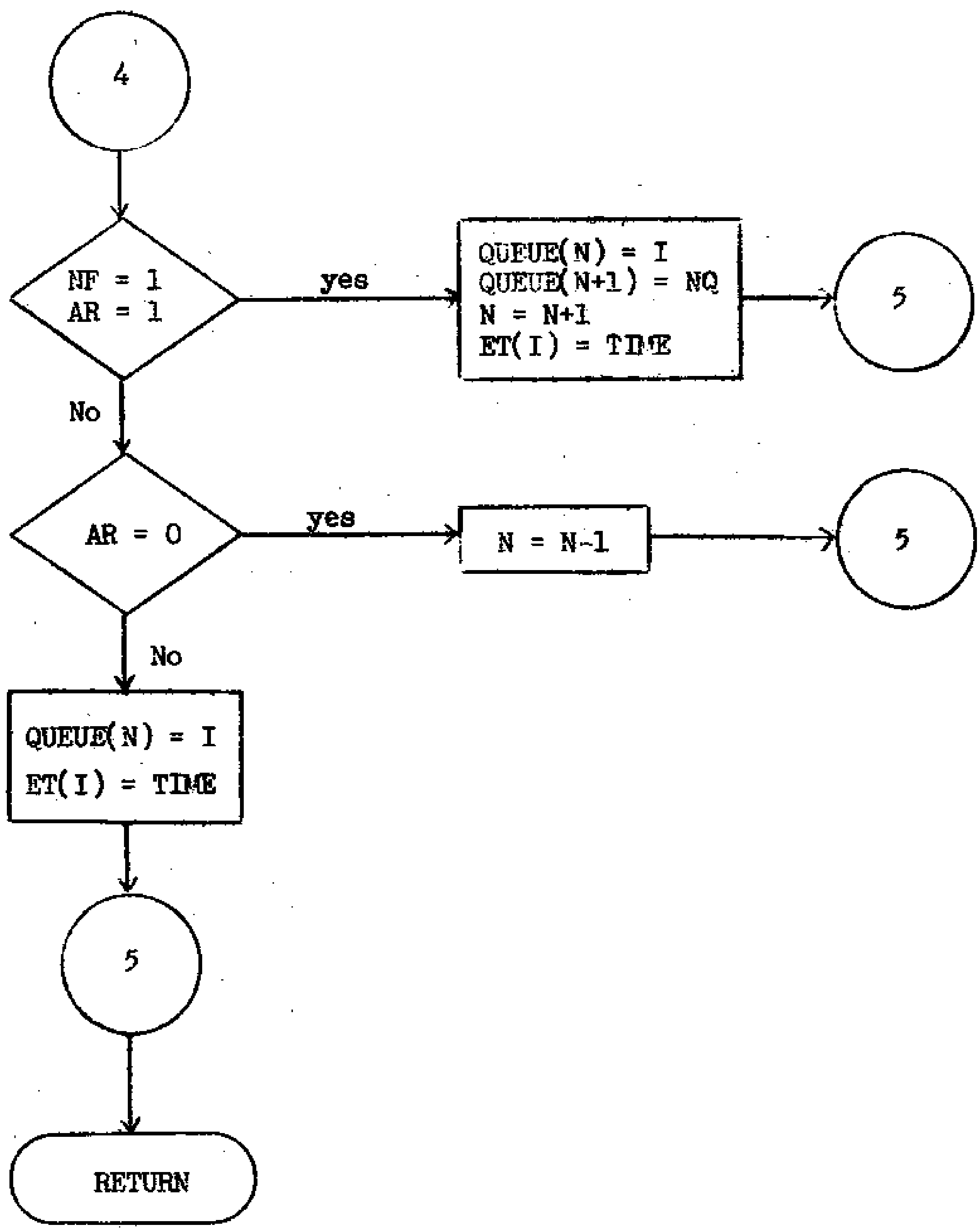


1
AR=1 ; NØP=NOP+1
CALL SURVT (NRAN,SM,RS,NS,Q)
KKK = KKK+1
I = 50?
yes
I = 0
No
I = I+1
NCØD(I)=0
No
KKK = 50
No
yes
yes
SUR(I) = RS
NSURT(I) = NS
NUS(I) = NS
NØR(I) = NØP
NCØD(I) = 1
INVALID SUBSCRIPT
STØP
2

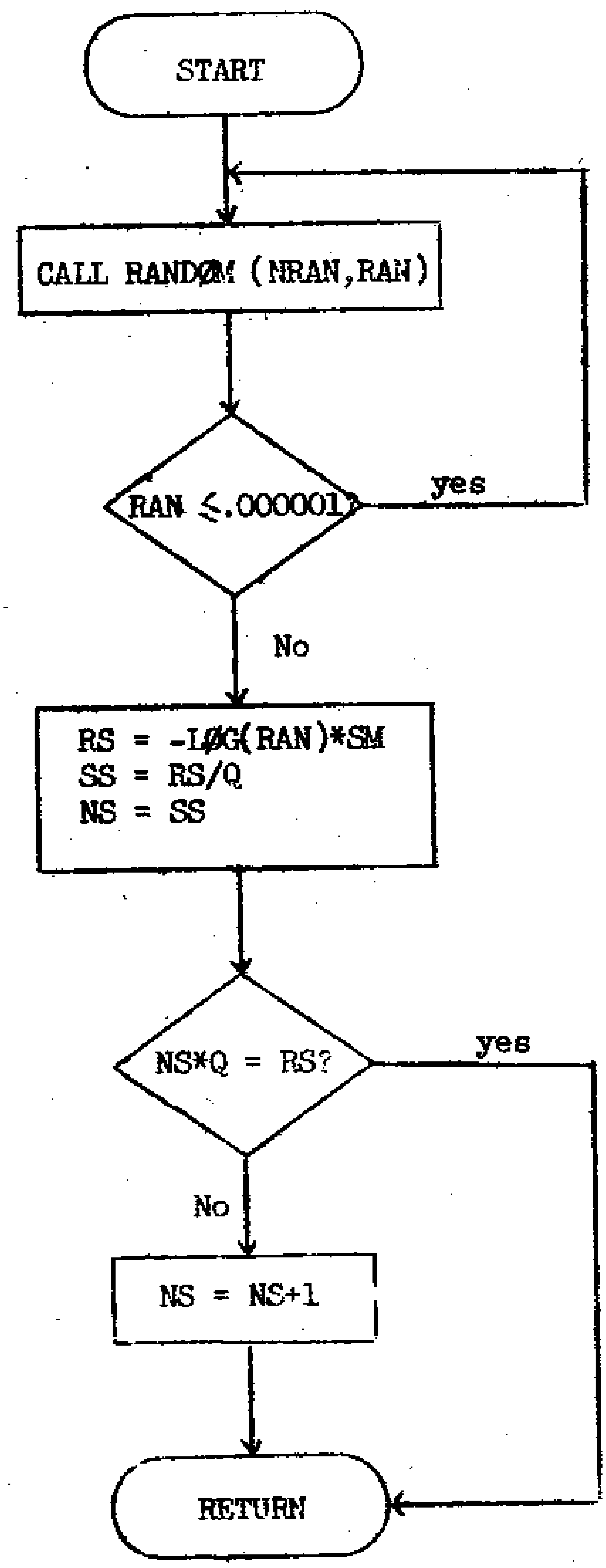

2
N = 0
AR = 0
yes
TIME = TIME+Q
3
No
N = 0
AR = 1
yes
TIME = TIME+Q
ET(I) = TIME
QUEUE(1) = I
N = 1
3
No
NQ = QUEUE(1)
NUS(NQ)=1?
No
NUS(NQ) = NUS(NQ)-1
TIME = TIME+Q
NF = 1
CALL DCI(N,QUEUE,NF,
AR,I,ET,TIME,NQ)
3
yes
TIME = TIME+Q
TØTAL = TIME-ET(NQ)
SURVT = NSURT(NQ)*Q
WAIT = TØTAL-SURVT
NCØD = 0
NF = 2
CALL DCI(N,QUEUE,NF,AR,I,
ET,TIME,NQ)
K = K+1
3
No
K > NUMB
yes
ANALIZE

แผนภูมิโปรแกรมย่อยของ SUBRØUTINE DCI(N,QUEUE,NF,AR,I,ET,TIME,NQ)

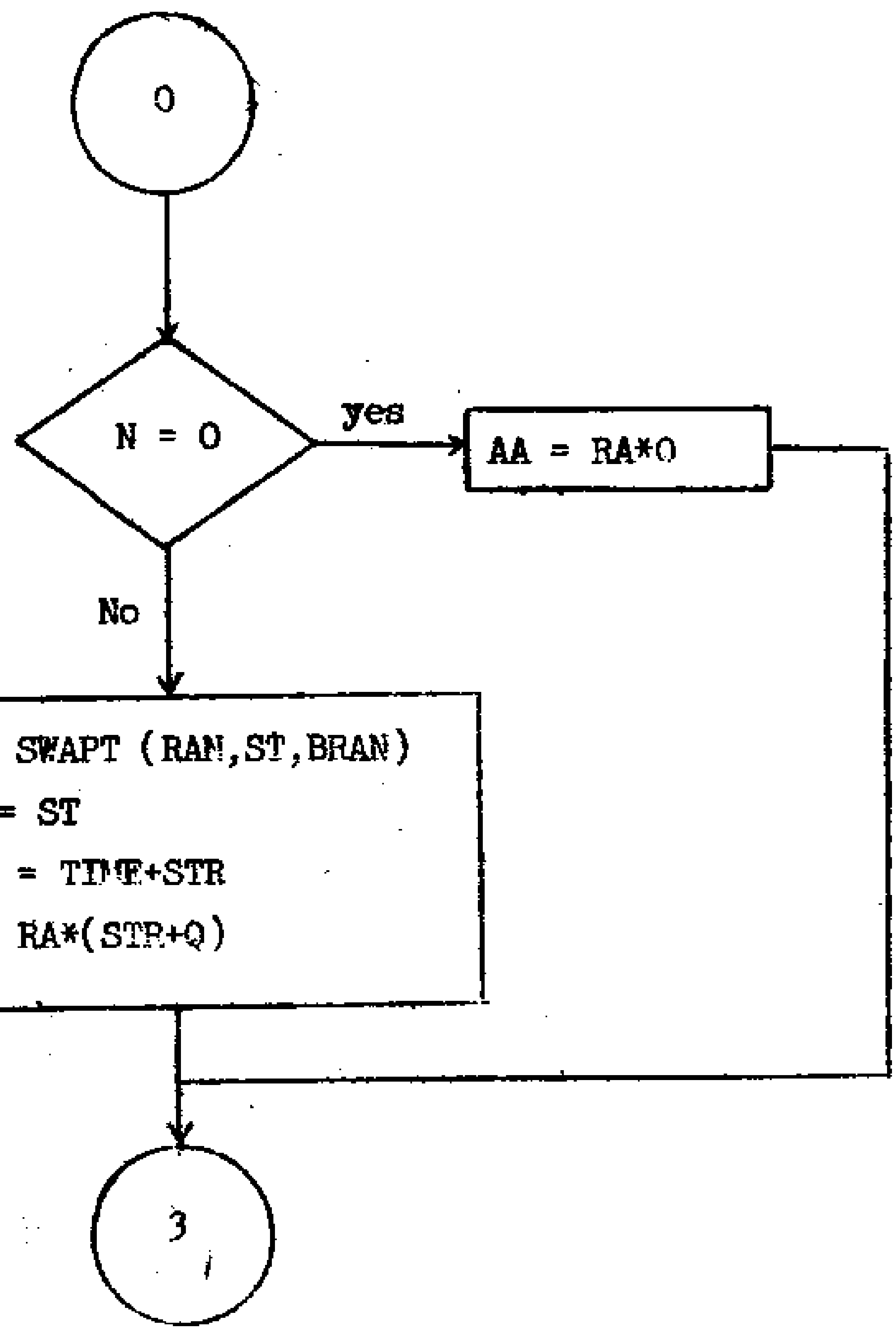



4
NF = 1
AR = 1
yes
QUEUE(N) = I
QUEUE(N+1) = NQ
N = N+1
ET(I) = TIME
5
No
AR = 0
yes
N = N-1
5
No
QUEUE(N) = I
ET(I) = TIME
5
RETURN

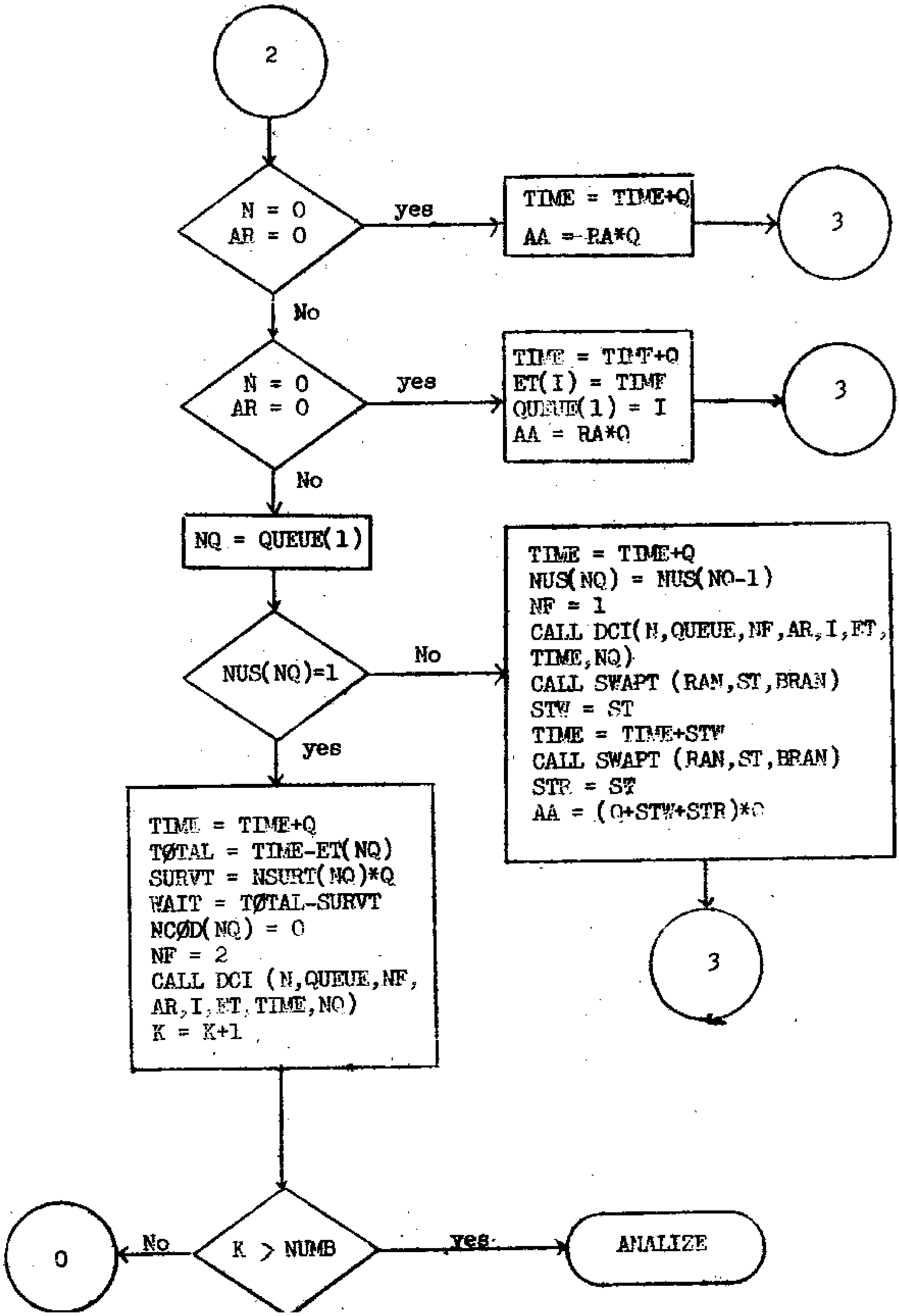
แผนภูมิโปรแกรมย่อยของ SUBRØUTINE SURVI(NRAN,SM,RS,NS,Q)



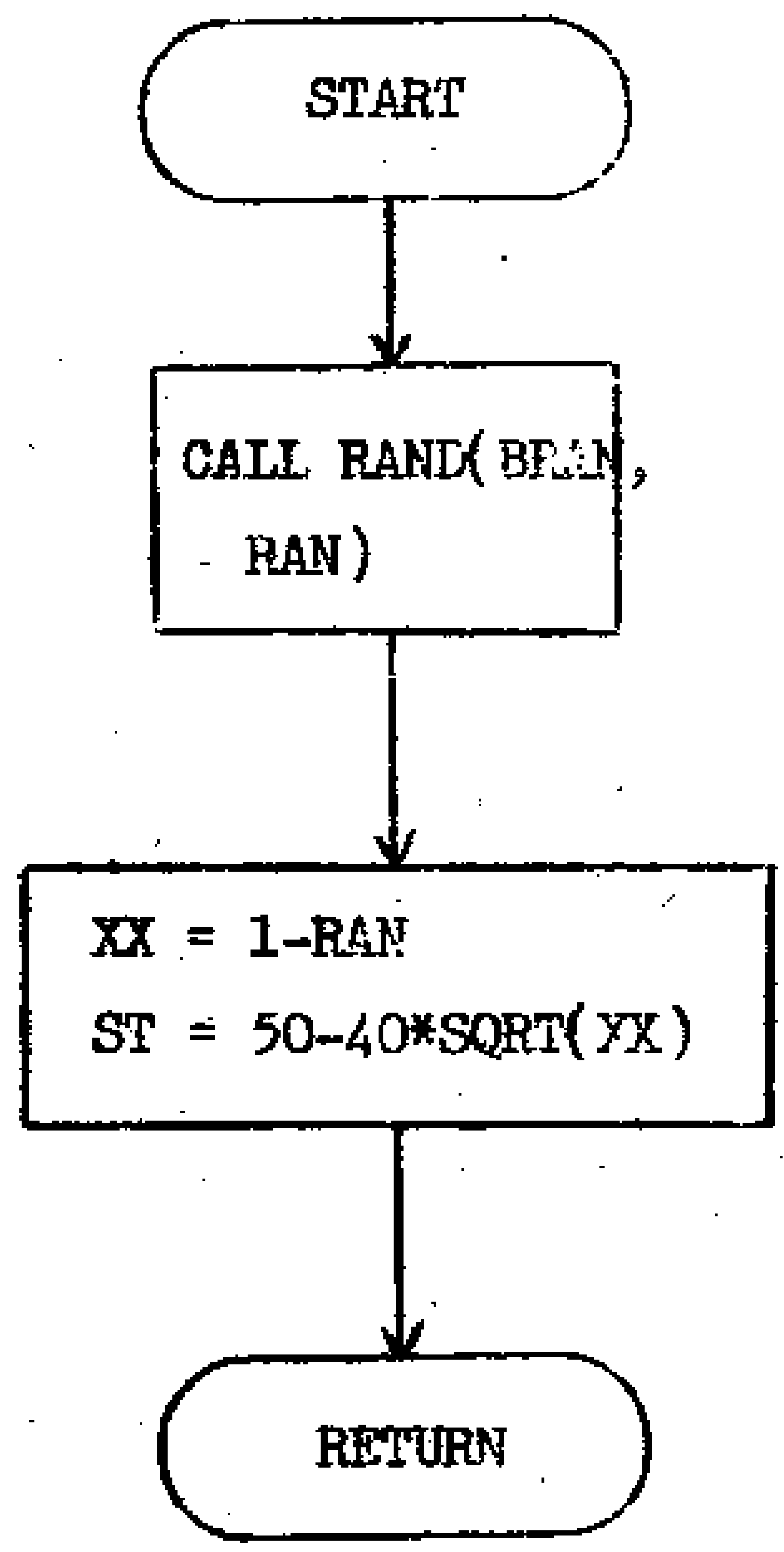
สำหรับกรณีเวลาสับเปลี่ยนไม่เท่ากับศูนย์ แผนภูมิโปรแกรมจะเปลี่ยนแปลงจากกรณีเวลาสับเปลี่ยนเท่ากับศูนย์ดังนี้คือ การหมุนนาฬิกาต่อไปนอกจากจะหมุนไปช่วงเวลา Q หน่วยเวลาแล้ว ยังต้องหมุนไปตามค่าของเวลาสับเปลี่ยนที่เกิดขึ้นอีกด้วย และถ้าเป็นกรณีที่ยอมให้หน่วยรับบริการใหม่เกิดขึ้นในช่วงเวลาสับเปลี่ยนค่า AA จะเปลี่ยนแปลงไปด้วยดังแสดงไว้ในแผนภูมิข้างล่าง แต่ถ้าเป็นกรณีที่ไม่ยอมให้หน่วยรับบริการใหม่เกิดขึ้นในช่วงเวลาสับเปลี่ยน AA จะยังคงมีค่าเท่ากับ RA*Q โดยตลอด แผนภูมิโปรแกรมสำหรับกรณีเวลาสับเปลี่ยนไม่เท่ากับศูนย์จะเปลี่ยนแปลงจากกรณีเวลาสับเปลี่ยนเท่ากับศูนย์ที่หมายเลข (O) ดังนี้



นอกจากนี้ยังจะเปลี่ยนแปลงจากหมายเลข ② อีกดังนี้



แผนภูมิโปรแกรมย่อยของ SUBRØUTINE SWAPT(RAN,ST,BRAN)



การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชั่นด้วยวิธีการ Fibonacci

ในการวิเคราะห์หาเวลาคงที่ที่กำหนดให้หน่วยที่เข้ารับบริการได้รับบริการในแต่ละรอบ ที่ทำให้ค่าคาดหมายของเวลารอคอยมีค่าน้อยที่สุดจะใช้วิธีการ Fibonacci จึงควรพิจารณาวิธีการนี้ให้ละเอียด

ให้ f(x) เป็นฟังก์ชั่นแบบ unimodal ในพิสัย $[0, L]$

ให้ b^n และ u^n เป็น lowerbound และ upperbound ของ x เมื่อเริ่มต้นการวนซ้ำรอบที่ n (n^{th} iteration)

ในการวนซ้ำรอบที่ n วิธีการ Fibonacci จะเลือกค่า x_1^n และ $x_2^n \in [b^n, u^n]$ เพื่อการเปรียบเทียบค่าของฟังก์ชั่น f(x) k เป็นจำนวนครั้งที่จะต้องทำวนซ้ำ (number of iteration) เพื่อให้มีความแม่นยำของค่าที่ทำให้ฟังก์ชั่นมีค่าต่ำสุดห่างจากค่าจริงไม่มากกว่า ε เมื่อทำการวนซ้ำ n ครั้ง ค่าของ x ที่ทำให้ฟังก์ชั่นมีค่าต่ำสุดจะอยู่ในพิสัย $\frac{1}{F_N}(u^1 - b^1)$[16/] โดย F_N เป็นเลข Fibonacci ที่ N ดังนั้นค่า k จะต้องเลือกให้อสมการ (inequality) ดังต่อไปนี้เป็นจริง

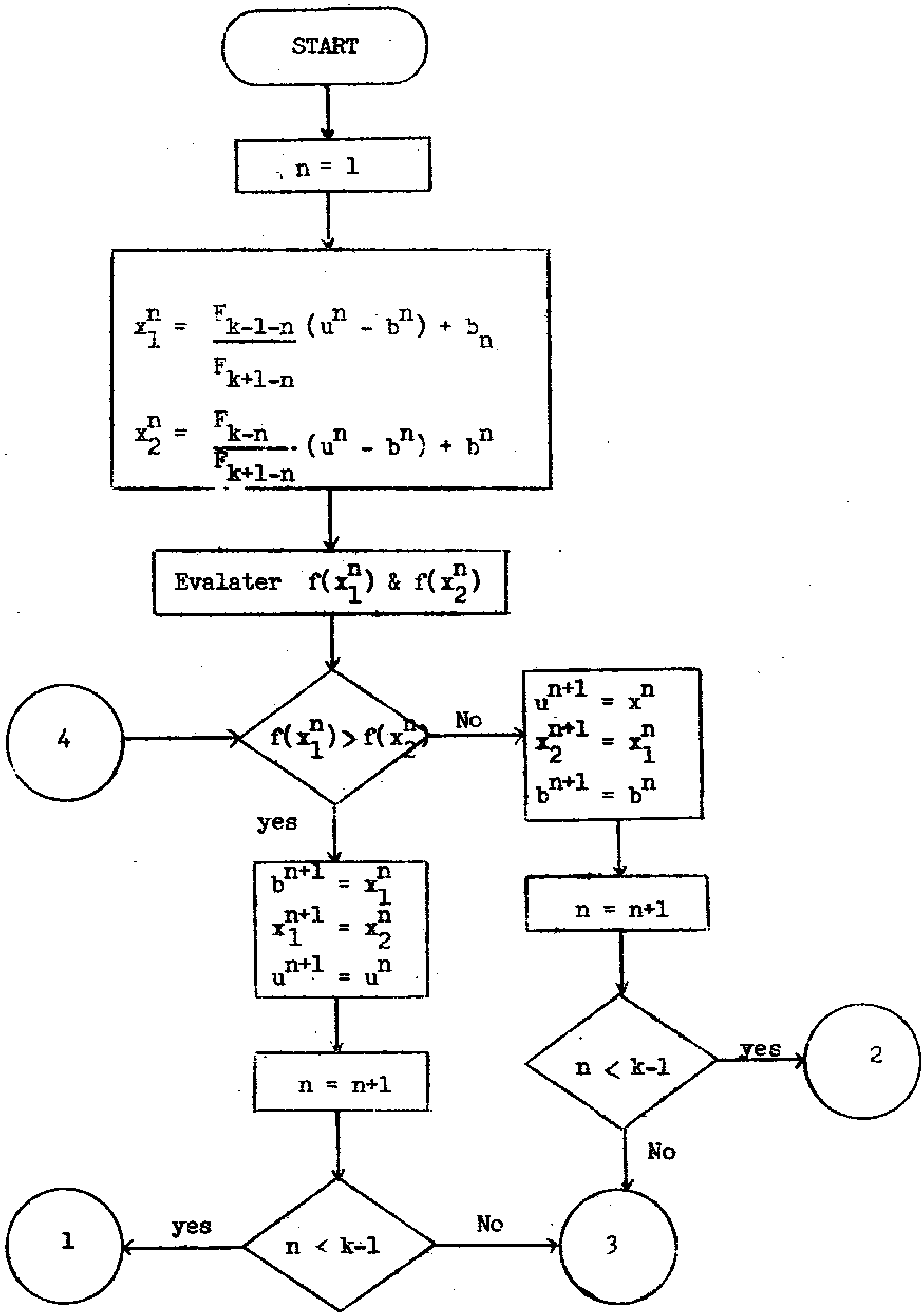
$$\frac{1}{F_k}(u^1 - b^1) < \varepsilon \qquad (4.11)$$

ตัวอย่าง 20 ตัวแรกของเลข Fibonacci ได้แสดงไว้ดังต่อไปนี้

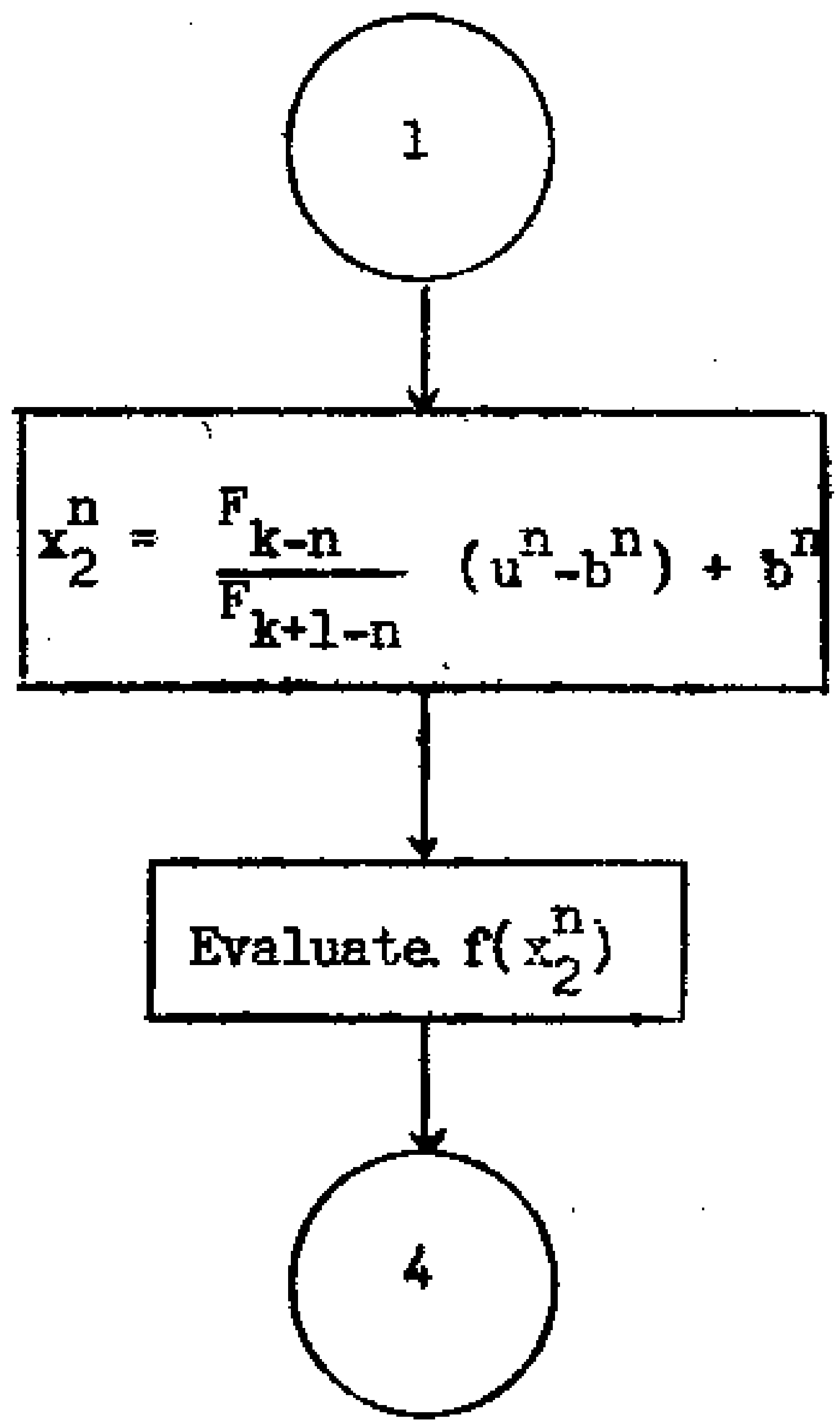
16/ คำบรรยายวิชา สป.743 การโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ของ ดร.วิชิต หล่อจีระชุณห์กุล

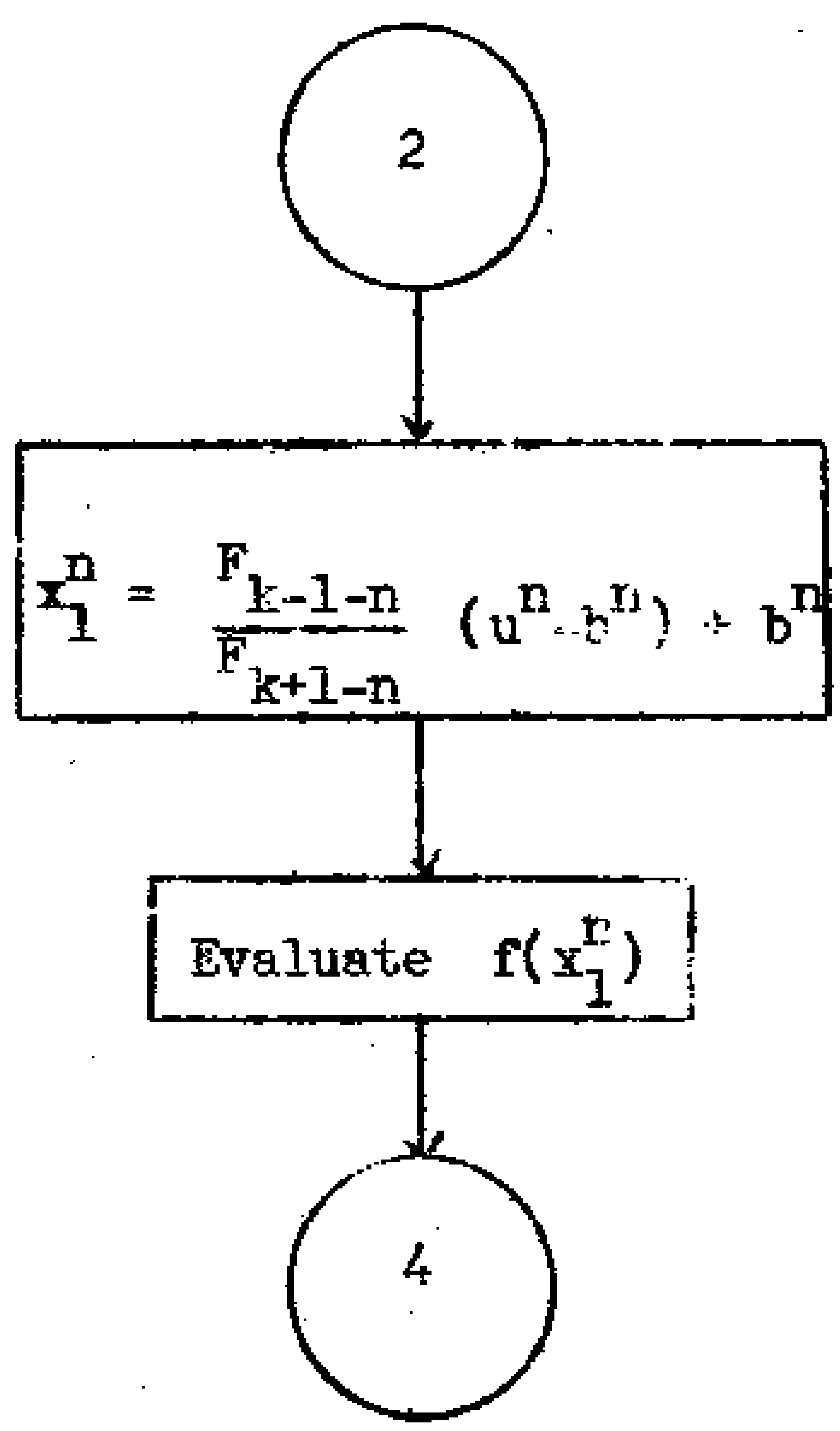
N	F_N
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597
17	2584
18	4181
19	6765
20	10946

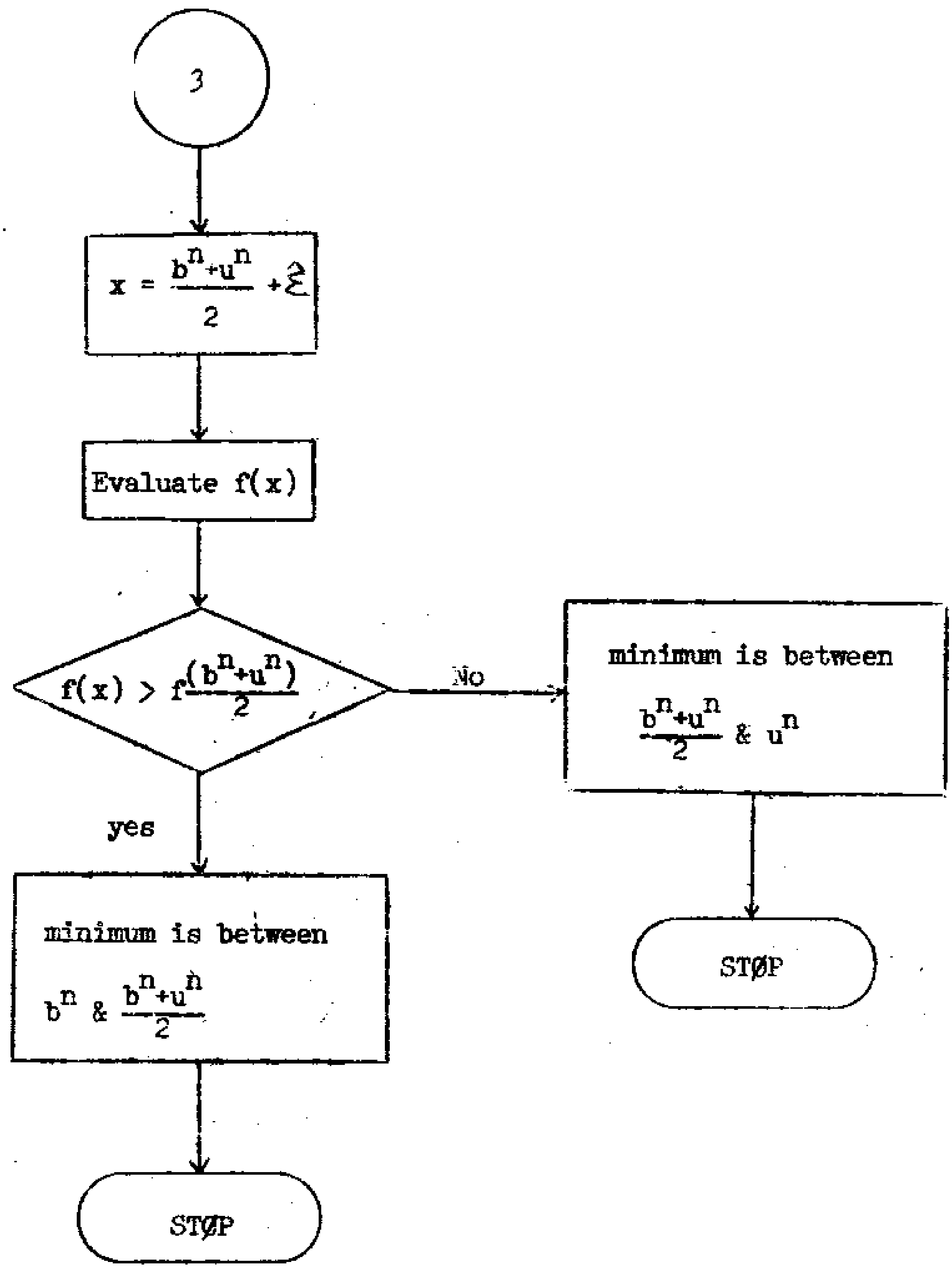
แผนภูมิ Fibonacci Search[17/]



17/ คำบรรยายวิชา สป.743 การโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ของ ดร.วิชิต หล่อจีระชุณห์กุล


1
$x_2^n = \frac{F_{k-n}}{F_{k+1-n}} (u^n - b^n) + b^n$
Evaluate $f(x_2^n)$
4


2
$x_1^n = \frac{F_{k-1-n}}{F_{k+1-n}} (u^n - b^n) + b^n$
Evaluate $f(x_1^n)$
4


3
x = (b^n+u^n)/2 + ε
Evaluate f(x)
f(x) > f((b^n+u^n)/2)
No
minimum is between
(b^n+u^n)/2 & u^n
STØP
yes
minimum is between
b^n & (b^n+u^n)/2
STØP

บทที่ 5

วิธีการจัดแบ่งเวลาในการให้บริการที่เหมาะสม

ดังได้กล่าวไว้ในบทก่อน ๆ แล้วว่า ระบบที่กำลังศึกษาเป็นแบบเวียนเข้ารับบริการตามส่วนเวลาที่ได้แบ่ง (round-robin time-shared service system) โดยหน่วยรับบริการเข้ารับบริการได้ครั้งละ Q หน่วยเวลา และจะออกจากแหล่งให้บริการได้ก็ต่อเมื่อครบเวลา Q เท่านั้น ในแต่ละช่วงเวลา Q ให้มีหน่วยรับบริการเข้าสู่ระบบด้วยความน่าจะเป็น λQ ดังนั้นค่าเฉลี่ยของหน่วยที่จะเข้ารับบริการเท่ากับ λ หน่วยต่อหน่วยเวลา ส่วนเวลาในการรับบริการที่จะพิจารณานี้ให้มีการแจกแจงแบบ Exponential โดยมีค่าเฉลี่ยของเวลาที่รับบริการเท่ากับ $\frac{1}{\mu}$ ดังนั้น การแจกแจงของเวลาที่ใช้ในการรับบริการจึงเขียนได้เป็น

$$f(t) = \mu e^{-\mu t}, \qquad t > 0 \tag{5.1}$$

จากคุณสมบัติปราศจากความจำ (Memoryless) ของการแจกแจงแบบ Exponential ความน่าจะเป็นที่หน่วยที่ได้รับบริการแล้ว Q หน่วยเวลา กลับเข้าต่อท้ายคิวเพื่อรอรับบริการอีก จึงมีค่าคงที่และเท่ากับ

$$\sigma = \int_Q^\infty \mu e^{-\mu t}\, dt$$

$$= e^{-\mu Q} \tag{5.2}$$

ความน่าจะเป็นที่จะมีหน่วยรับบริการต้องการรับบริการ 1 รอบคือ

$$S_1 = \int_0^Q \mu e^{-\mu t}\, dt$$

$$= 1 - e^{-\mu Q}$$

$$= 1 - \sigma \tag{5.3}$$

ความน่าจะเป็นที่จะมีหน่วยรับบริการต้องการรับบริการ 2 รอบคือ

$$S_2 = \int_{Q}^{2Q} \mu e^{-\mu t}\, dt$$

$$= e^{-\mu Q}(1-e^{-\mu Q})$$

$$= \delta(1-\delta) \qquad (5.4)$$

ความน่าจะเป็นที่จะมีหน่วยรับบริการต้องการรับบริการ 3 รอบคือ

$$S_3 = \int_{2Q}^{3Q} \mu e^{-\mu t}\, dt$$

$$= e^{-2\mu Q}(1-e^{-\mu Q})$$

$$= \delta^2(1-\delta) \qquad (5.5)$$

ความน่าจะเป็นที่จะมีหน่วยรับบริการต้องการรับบริการ n รอบคือ

$$S_n = \int_{(n-1)Q}^{nQ} \mu e^{-\mu t}\, dt$$

$$= e^{-(n-1)\mu Q}(1-e^{-\mu Q})$$

$$= \delta^{n-1}(1-\delta) \qquad (5.6)$$

นั่นคือ จำนวนรอบของหน่วยที่เข้ารับบริการต้องการรับบริการจะมีการแจกแจงแบบ Geometric

$$S_n = (1-\delta)\delta^{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots \qquad (5.7)$$

เวลาที่เสียไปทั้งหมดในระบบโดยคิดทั้งเวลารอคอยและเวลาที่ใช้ไปในแหล่งให้บริการในระบบเวียนเข้ารับบริการตามช่วงเวลาที่ได้แบ่ง เมื่อหน่วยรับบริการต้องการรับบริการ n รอบ ได้พิสูจน์ไว้ในบทที่ 3 เมื่อใช้ค่า δ เท่ากับที่คำนวณไว้ในสมการ (5.2) สมการ (3.8) และ (3.12)

จะกลายเป็น

$$T_n^{l} = \frac{nQ}{1-\rho_R} - \frac{\lambda Q^2}{1-\rho_R}\left[1 + \frac{(1-e^{-\mu Q}-\alpha)(1-\alpha^{n-1})}{(1-e^{-\mu Q})^2(1-\rho_R)}\right] \tag{5.8}$$

$$T_n^{e} = \frac{nQ}{1-\rho_R} - \rho_R Q - \frac{\lambda Q^2 \rho_R}{1-\rho_R}\left[1 + \frac{(1-e^{-\mu Q}-\alpha)(1-\alpha^{n-1})}{(1-e^{-\mu Q})^2(1-\rho_R)}\right] \tag{5.9}$$

ส่วนในระบบ FCFS สมการ (3.13) จะเขียนได้เป็น

$$T_n^{b} = \frac{Q\rho_R e^{-\mu Q}}{(1-\rho_R)(1-e^{-\mu Q})} + nQ \tag{5.10}$$

โดยที่

$$\alpha = e^{-\mu Q} + \lambda Q \tag{5.11}$$

และ

$$\rho_R = \frac{\lambda Q}{1-e^{-\mu Q}} \tag{5.12}$$

ค่าเฉลี่ยของระยะเวลารอคอยในระบบ RRLA, RREA และ FCFS ของหน่วยรับบริการได้พิสูจน์ไว้ในบทที่ 3 ว่ามีค่าเท่ากันหมด และเขียนได้เป็น

$$W = \frac{Q\rho_R\sigma}{(1-\rho_R)(1-\sigma)} \tag{5.13}$$

เมื่อการแจกแจงของการบริการเป็นแบบ Exponential ค่าของ σ และ ρ_R จะคำนวณได้จากสมการ (5.2) และ (5.12) ตามลำดับ ดังนั้น ในกรณีนี้สมการ (5.13) จะกลายเป็น

$$W = \frac{\lambda Q^2 e^{-\mu Q}}{(1-e^{-\mu Q})(1-e^{-\mu Q}-\lambda Q)} \tag{5.14}$$

<u>การทดสอบตัวแบบจำลอง</u>

ผลลัพธ์ของตัวแบบจำลองที่ได้สร้างขึ้นจะถูกทดสอบความถูกต้องในกรณีที่เวลาสับเปลี่ยนมีค่าเท่ากับศูนย์โดยให้

λ = 1 หน่วยต่อวินาที

μ = 2 หน่วยต่อวินาที

นั่นคือ ρ = 0.5

และให้ Q = 0.2 วินาที

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หน่วยที่ได้รับบริการแล้ว 0.2 วินาทีจะกลับเข้าต่อท้ายคิวเพื่อรอรับบริการอีกในรอบต่อไป, δ จะคำนวณได้จากสมการ (5.2) ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.67 ส่วนค่าเฉลี่ยของจำนวนรอบที่หน่วยที่เข้ารับบริการต้องการรับบริการคือ $1/(1-\delta)$ ดังแสดงไว้ในสมการ (3.2) จะเท่ากับ 3.03 รอบ นั่นคือค่า ρ_R ดังแสดงไว้ในสมการ (5.12) จะมีค่าเท่ากับ 0.606 และค่าคาดหมายของจำนวนหน่วยที่อยู่ในระบบ RREA ดังแสดงไว้ในสมการ (3.11) จะมีค่าเท่ากับ 1.230 หน่วย

ค่าคาดหมายของเวลารอคอยในกรณีนี้คำนวณได้จากสมการ (5.13) จะได้ค่าเท่ากับ 0.6272 วินาที

เมื่อจะใช้ตัวแบบจำลองตามที่ได้สร้างขึ้นในบทที่ 4 สภาวะเริ่มต้น (initial state) ของระบบจะต้องกำหนดขึ้นก่อน ในที่นี้สภาวะที่เหมาะสมคือ ให้มีหน่วยรับบริการอยู่ในระบบ 1 หน่วย และหน่วยนี้ต้องการเวลารับบริการ 3 รอบ[18] คือใกล้เคียงกับค่าคาดหมายต่าง ๆ ของระบบตามที่ได้คำนวณไว้ เมื่อจำลองระบบไปจนกระทั่งมีจำนวนหน่วยรับบริการออกจากระบบ 1000 หน่วยแล้ว ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยเท่ากับ 0.6939 วินาที และทำการคำนวณหาค่าแปรปรวนของระยะเวลารอคอยจาก[19]

---

[18] ข้อมูลที่อ่านเข้าไปมีดังนี้ N=1, RA=1, SM=0.5, Q=0.2, TIME=0.2, ET(1) =0, NSURT(1)=3, NUS(1)=3, QUEUE(1)=1, SUR(1)=.55, NØR(1)=1, NCØD(1)=1.

[19] W.B. Davepert Jr. & W.L.Root, <u>An Introduction to the Theory of Random Singnals and Noise</u>, McGraw-Hill, New York, 1958, pp.801.

$$\mathrm{Var}_{Sa} = \mathrm{Var} + \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N}\right) R(j) \tag{5.15}$$

โดย

$$R(j) = E\left\{\left[W_i - E(W_i)\right]\left[W_{i+j} - E(W_{i+j})\right]\right\} \tag{5.16}$$

และ W_i คือเวลารอคอยของหน่วยรับบริการที่ i และ $E(W_i)$ คือค่าคาดหมายของเวลารอคอยของหน่วยรับบริการที่ i

จากตัวอย่างนี้ได้ $\frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} (1 - \frac{j}{N}) R(j) = .006$ ซึ่งมีค่าน้อยมาก และจะเป็นการแสดงว่าค่าของระยะเวลารอคอยของแต่ละหน่วยที่ออกจากระบบไม่ได้มีความเกี่ยวข้องกันมากนัก ดังนั้น การคำนวณค่าแปรปรวนจึงใช้แต่เทอมแรกในสมการ (5.15) เท่านั้น และค่าแปรปรวนของเวลารอคอยจาก 1000 ตัวอย่างของหน่วยรับบริการคือ

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} \left[(W_i - E(W)\right]^2}{N - 1} = 1.3039$$

โดย Central limit Theorem ค่าอนุมานของความผิดพลาด (estimate of error) ในการประมาณค่าคาดหมายของเวลารอคอยของหน่วยรับบริการเมื่อต้องการความเชื่อมั่น 99% เขียนได้เป็น

$$\delta = \frac{2.576\sqrt{1.3039}}{\sqrt{1000}} = 0.0930$$

ดังนั้น พิสัยของความเชื่อมั่น 99% (99% confidence interval) จึงเท่ากับ (0.6009, 0.7869) ซึ่งค่าคาดหมายของเวลารอคอยซึ่งคำนวณจากสมการ (5.13) ก็อยู่ในพิสัยนี้ แต่ถ้าต้องการลดพิสัยของความเชื่อมั่นลงอีก วิธีหนึ่งซึ่งอาจกระทำได้ก็คือเพิ่มจำนวนหน่วยรับบริการที่เสร็จออกจากระบบให้เพิ่มมากขึ้นอีก เพราะ

$$\delta \propto \frac{1}{\sqrt{N}} \tag{5.17}$$

และจำนวนหน่วยรับบริการที่เสร็จออกจากระบบเพื่อให้ค่าประมาณของความผิดพลาดเท่ากับ δ_2 จึงเขียนได้เป็น

$$N_2 = \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2} N_1 \tag{5.18}$$

ถ้าต้องการลดพิสัยของความเชื่อมั่นลงครึ่งหนึ่งคือให้ δ_2 เท่ากับ 0.0465 ดังนั้น N_2 จะมีค่าเท่ากับ

$$N_2 = \frac{(.0930)^2}{(.0465)^2} \times 1000$$

$$\approx 4000$$

ดังนั้น การใช้ตัวแบบจำลองเพื่อวิเคราะห์หาค่าคาดหมายของเวลารอคอยของหน่วยรับบริการด้วยความผิดพลาดที่น้อยกว่า 0.05 จึงต้องใช้จำนวนตัวอย่าง 4,000 หน่วย ผลลัพธ์จาก 4,000 ตัวอย่างนี้ปรากฏว่ามีค่าเท่ากับ 0.6519 วินาที และค่าแปรปรวนมีค่าเท่ากับ 1.4077 ดังนั้น ค่าอนุมานของความผิดพลาดจึงเขียนได้เป็น

$$= \frac{2.576\sqrt{1.4077}}{\sqrt{4000}} = .0483$$

พิสัยของความเชื่อมั่น 99% ในกรณีนี้คือ (0.6036, 0.7002)

เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของการจำลองอีกขั้นหนึ่ง การกระจายของจำนวนรอบที่หน่วยรับบริการต้องการรับจากแหล่งให้บริการซึ่งได้จากการจำลองจะเปรียบเทียบกับการกระจาย Geometric ตามสมการ (5.7) ผลการเปรียบเทียบได้แสดงไว้ในตาราง 5.2 และค่า Chi-Square คำนวณได้เท่ากับ

$$\chi^2 = 10.73$$

โดยมีองศาแห่งเสรีภาพเท่ากับ 15 ค่าวิกฤตของ χ^2 ในกรณีนี้เมื่อ α = .01 มีค่าเท่ากับ 30.58 จึงสรุปได้ว่าจำนวนรอบที่หน่วยรับบริการต้องการรับจากแหล่งให้บริการที่ได้จากการจำลองมีการกระจายแบบ Geometric

เวลารอคอยโดยเฉลี่ยเมื่อจำแนกตามจำนวนรอบที่หน่วยรับบริการต้องการจากแหล่งให้บริการอาจคำนวณได้จาก $T_n^e - nQ$ โดย T_n^e คำนวณตามสมการ (5.9) ผลการคำนวณโดย n มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง 8 ได้แสดงไว้ในสดมภ์ที่ 2 ในตาราง 5.3 พิสัยความเชื่อมั่น 99% ของเวลารอคอยเมื่อคำนวณจากข้อมูลในตารางที่ 5.1 ได้แสดงไว้ในสดมภ์สุดท้ายในตารางที่ 5.3 จะเห็นว่าค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยเมื่อจำแนกตามจำนวนรอบที่หน่วยรับบริการต้องการจากแหล่งให้บริการ ซึ่งคำนวณจากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และตัวแบบจำลองมีค่าใกล้เคียงกันมาก และค่าคาดหมายจากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ก็อยู่ในพิสัยความเชื่อมั่น 99% ด้วย

<u>การหาวิธีการให้บริการที่เหมาะสมสำหรับกรณีเวลาสับเปลี่ยนมีค่าเท่ากับศูนย์</u>

เวลารอคอยเมื่อเฉลี่ยตามจำนวนรอบได้แสดงไว้แล้วในสมการ (5.14) เพื่อความสะดวกจะให้ฟังค์ชั่นของค่าเฉลี่ยของระยะเวลารอคอยนี้อยู่ในเทอมของ ρ โดย $\rho = \lambda/\mu$ สมการ (5.14) อาจดัดแปลงได้เป็น

$$\lambda W(\mu Q) = \frac{\lambda^2 Q^2 e^{-\mu Q}}{(1-e^{-\mu Q})(1-e^{-\mu Q} - \lambda Q)}$$

$$= \frac{\rho^2 (\mu Q)^2 e^{-\mu Q}}{(1-e^{-\mu Q})(1-e^{-\mu Q} - \rho\mu Q)} \qquad (5.19)$$

ให้ $\mu Q = x$

$$\lambda W(x) = \frac{\rho^2 x^2 e^{-x}}{(1-e^{-x})(1-e^{-x} - \rho x)} \qquad (5.20)$$

ตารางที่ 5.1 แสดงค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยของหน่วยที่เข้ารับบริการที่ต้องการรับบริการเป็นจำนวนรอบต่าง ๆ กัน โดยจำนวนของหน่วยที่ออกจากแหล่งให้บริการ 4,000 หน่วย λ = 1 หน่วยต่อวินาที, μ = 2 หน่วยต่อวินาที, Q = 0.2 วินาที และเวลาสับเปลี่ยน = 0

จำนวนรอบที่ต้องการรับบริการ	จำนวนหน่วย	ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอย	ค่าความแปรปรวน
1	1337	0.1350	0.0654
2	872	0.3719	0.2474
3	572	0.6432	0.6200
4	404	0.8379	1.0427
5	264	1.0618	1.2740
6	168	1.3115	2.1543
7	117	1.4747	2.2616
8	82	1.8190	3.4675
9	58	2.4062	5.0333
10	49	2.7218	5.2373
11	26	3.4684	11.2626
12	16	3.0116	7.0992
13	8	3.4239	3.3653
14	6	4,5320	1.6432
15	8	5.7483	22.1152
16	7	5.5984	21.9693
17	2	0.8989	0.9795
18	1	4.8005	0.0
19	1	2.2004	0.0
20	-	-	-
21	-	-	-
22	1	7.8007	0.0
23	1	6.5973	0.0

ตารางที่ 5.2 แสดงการเปรียบเทียบการกระจายของจำนวนรอบที่หน่วยรับบริการต้องการรับจากแหล่งให้บริการที่จำลองได้กับค่าคาดหมายที่มีการแจกแจงแบบ Geometric

จำนวนรอบที่ต้องการรับบริการ	จำนวนหน่วยที่ได้จากการจำลอง	ค่าคาดหมายจำนวนหน่วย
1	1337	1320
2	872	884
3	572	593
4	404	397
5	264	266
6	168	178
7	117	119
8	82	80
9	58	54
10	49	36
11	26	24
12	16	16
13	8	11
14	6	7
15	8	5
ตั้งแต่ 16 รอบเป็นต้นไป	13	10

ตารางที่ 5.3 เปรียบเทียบค่าคาดหมายที่ได้จากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ กับค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยที่ได้จากการจำลองโดยเครื่องจักรคำนวณ สำหรับหน่วยที่ต้องการรับบริการ, nQ วินาที $n = 1,2,3,..8$ โดยใช้จำนวนตัวอย่าง 4000 หน่วย และให้ $\lambda = 1$ หน่วยต่อวินาที, $\mu = 2$ หน่วยต่อวินาที และเวลาสับเปลี่ยน = 0

จำนวนรอบที่ต้องการรับบริการ	ค่าคาดหมายของเวลารอคอยจากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์	ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยจากการจำลองโดยเครื่องจักรคำนวณ	ค่าแปรปรวน	พิสัยความเชื่อมั่น 99%
1	0.1254	0.1350	.0654	(0.1170, 0.1530)
2	0.3559	0.3719	.2474	(0.3285, 0.4153)
3	0.5965	0.6432	.6200	(0.5584, 0.7280)
4	0.8459	0.8379	1.0427	(0.7071, 0.9688)
5	1.1030	1.0618	1.2740	(0.8765, 1.2472)
6	1.3667	1.3115	2.1543	(1.0198, 1.6032)
7	1.6362	1.4747	2.2616	(1.1166, 1.8328)
8	1.9108	1.8190	3.4675	(1.2893, 2.3487)

วิธีกำหนดค่า Q วิธีหนึ่งซึ่งอาจกระทำได้คือ หาค่า Q ที่ทำให้ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยมีค่าน้อยที่สุด แต่ในระบบหนึ่ง ๆ ค่า λ และ μ เป็นค่าคงตัวที่กำหนด ดังนั้น การหาค่า Q ที่ทำให้ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยมีค่าน้อยที่สุดอาจเปลี่ยนเป็นการหาค่า $x = \mu Q$ ที่ทำให้ $\lambda W(x)$ มีค่าน้อยที่สุดได้

เมื่อ x มีค่าน้อยมากคือใกล้ศูนย์ สมการ (5.20) อาจเขียนได้เป็น

$$\lambda W(x) \simeq \frac{\rho^2}{1-\rho}\ (1-x) \tag{5.21}$$

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ $\lambda W(x)$ ในสมการ (5.21) จะมีค่าเท่ากับ $\frac{\rho^2}{1-\rho}$ หรือ

$$W(x) = \frac{1}{\mu}\ \frac{\rho}{1-\rho} \tag{5.22}$$

ซึ่งเป็นเวลารอคอยในคิวของระบบ FCFS เมื่อการมาของหน่วยรับบริการมีการกระจายแบบ Poisson และเวลาที่ต้องการรับบริการมีการกระจายแบบ exponential[20] เมื่อ x มีค่ามาก สมการ (5.20) จะมีค่าโดยประมาณเท่ากับ

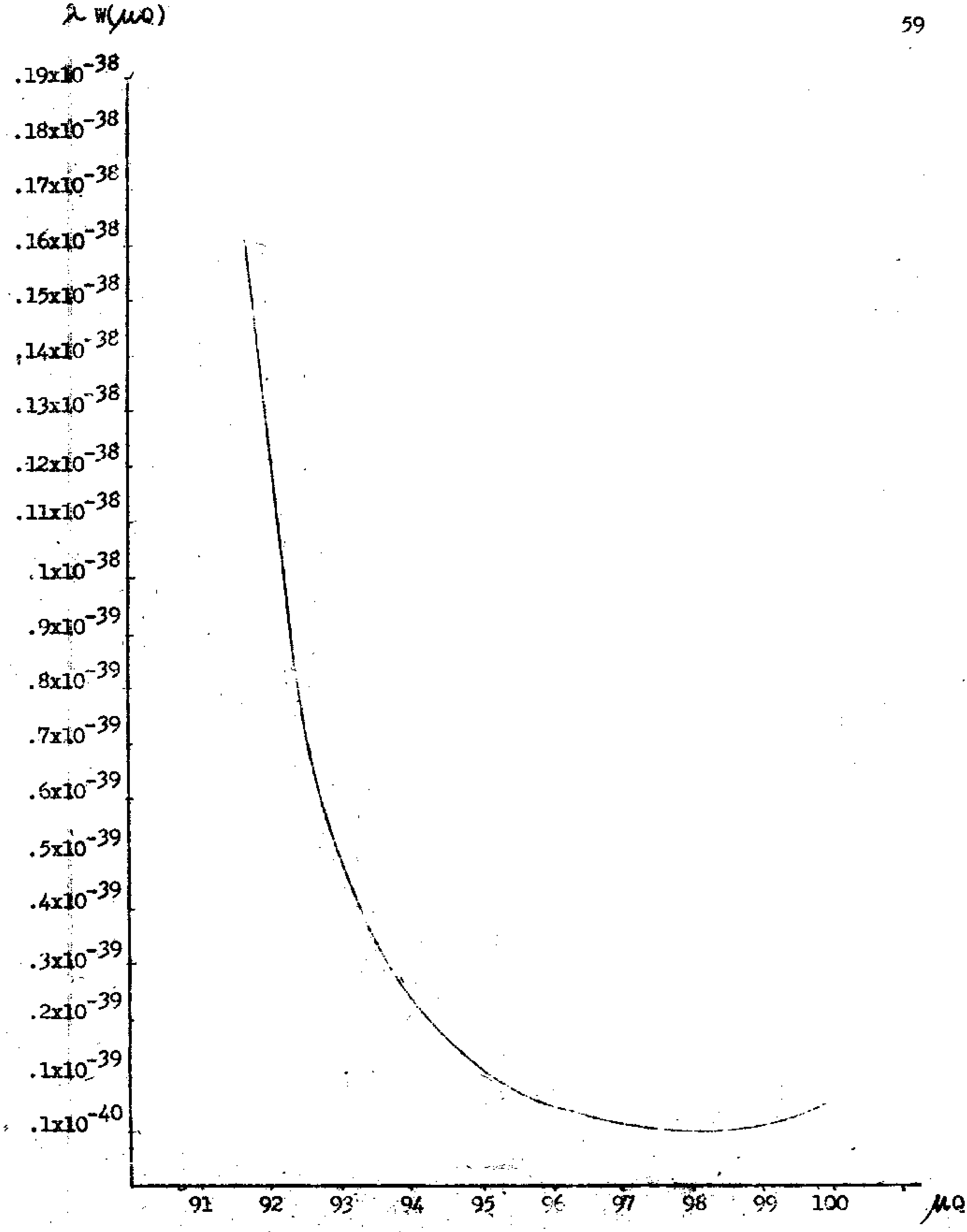
$$\lambda W(x) \simeq \frac{\rho^2 x^2 e^{-x}}{1-\rho x} \tag{5.23}$$

จะเห็นว่า x จะมีค่าได้อย่างมากที่สุดไม่เกิน $\frac{1}{\rho}$ ดังนั้น ช่วงของค่า x ที่สนใจคือ $\left[0, \frac{1}{\rho}\right]$

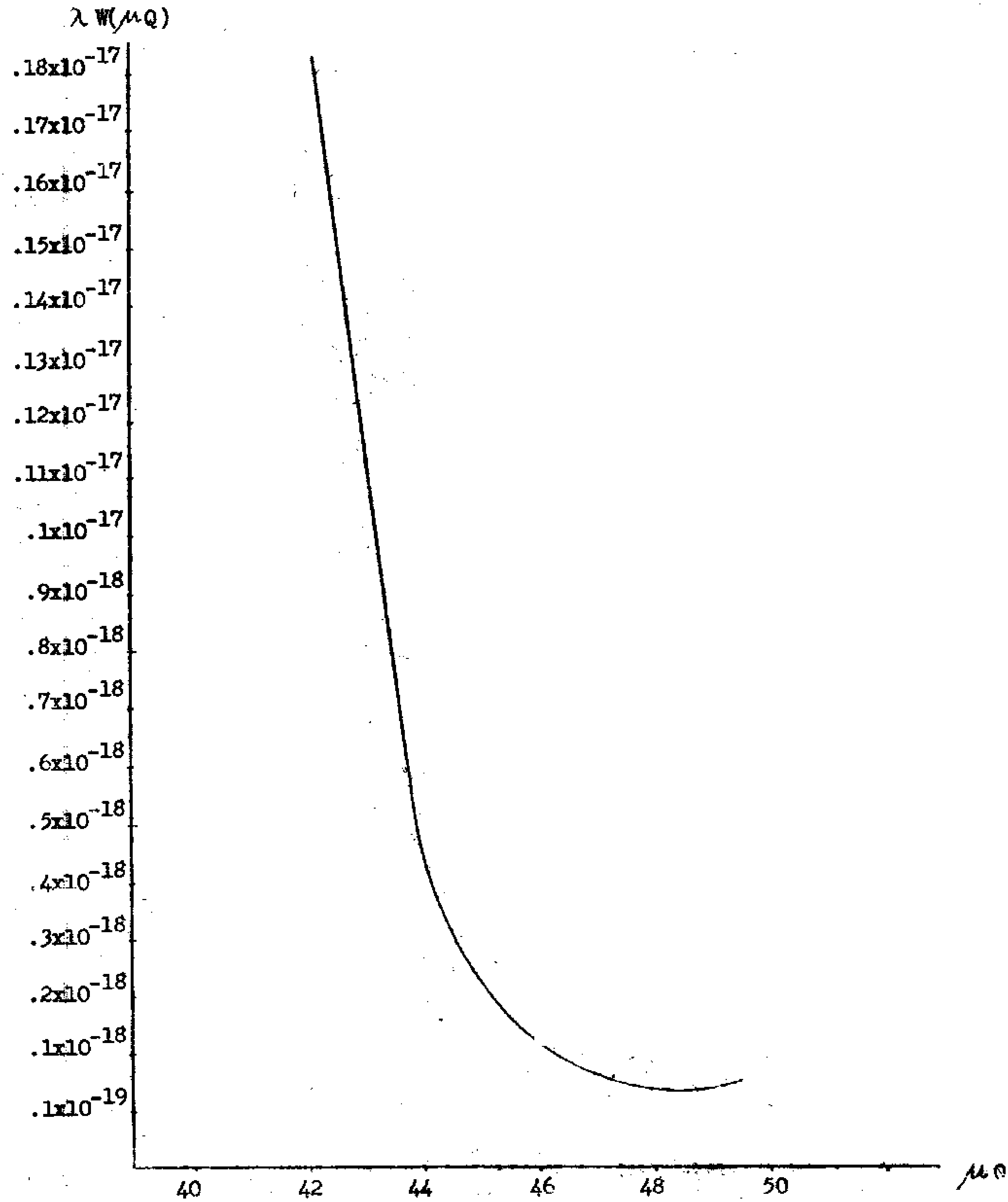
การหาค่า x ที่ทำให้ $\lambda W(x)$ ในสมการ (5.20) มีค่าน้อยที่สุด จะดำเนินด้วยวิธีการ Fibonacci ตามที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 4 แต่วิธีการ Fibonacci นี้จะใช้ได้เฉพาะกับฟังก์ชันชนิด unimodel เท่านั้น เพราะฉะนั้นจึงต้องศึกษาลักษณะของฟังก์ชัน $\lambda W(x)$ โดยหยาบ ๆ ก่อน เพื่อกำหนดช่วงของค่า x ซึ่งฟังก์ชัน $\lambda W(x)$ เป็น unimodel ช่วงของค่า x ที่จะใช้ในวิธีการ Fibonacci ได้แสดงไว้ในตาราง 5.4 และลักษณะของ $\lambda W(x)$ ได้แสดงไว้ในรูปที่ 7-33

---

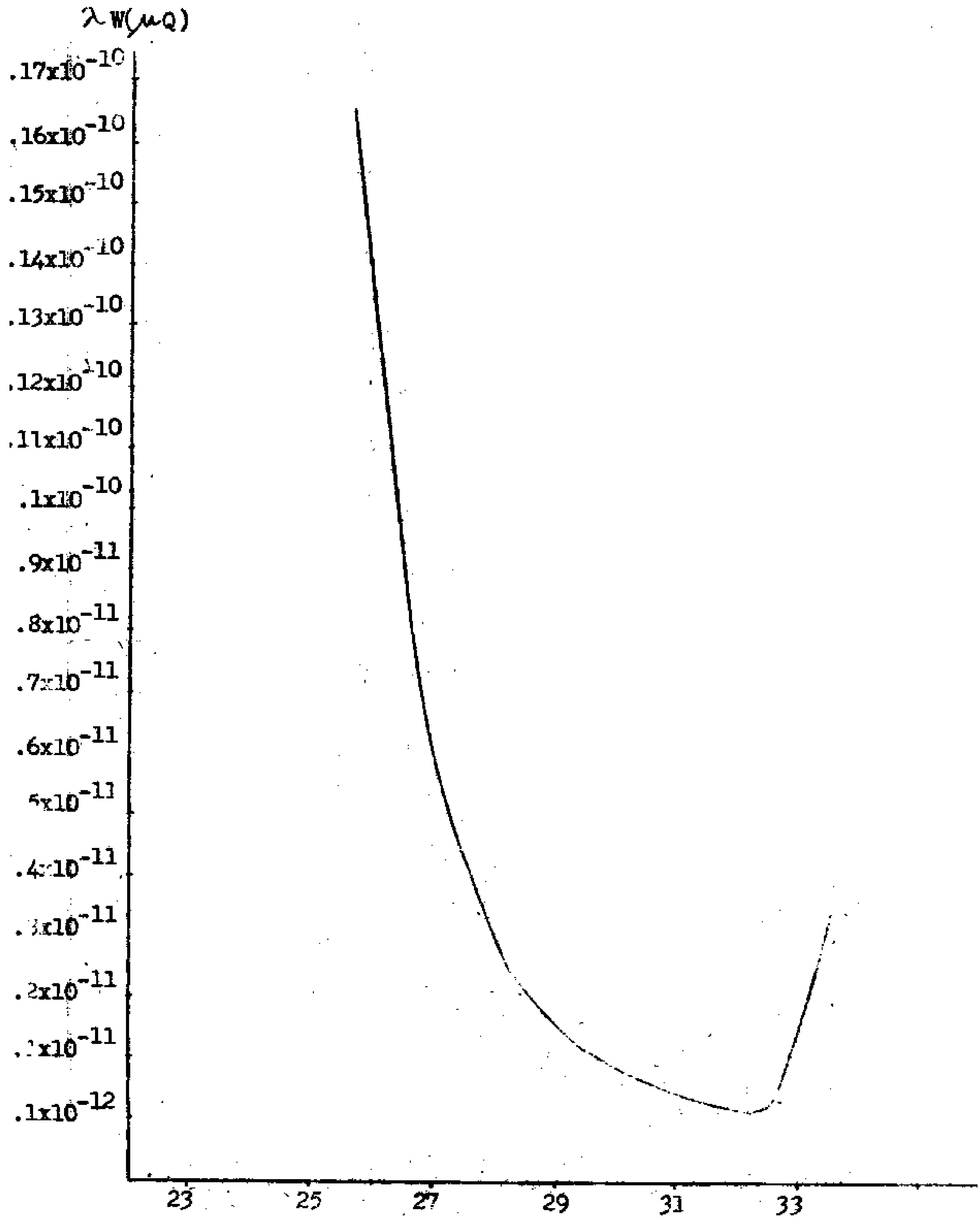
[20] Frederick S. Hillier & Gerald J. Lieberman, Introduction to Operations Research, Holden-day, Inc., 1970, p.300.



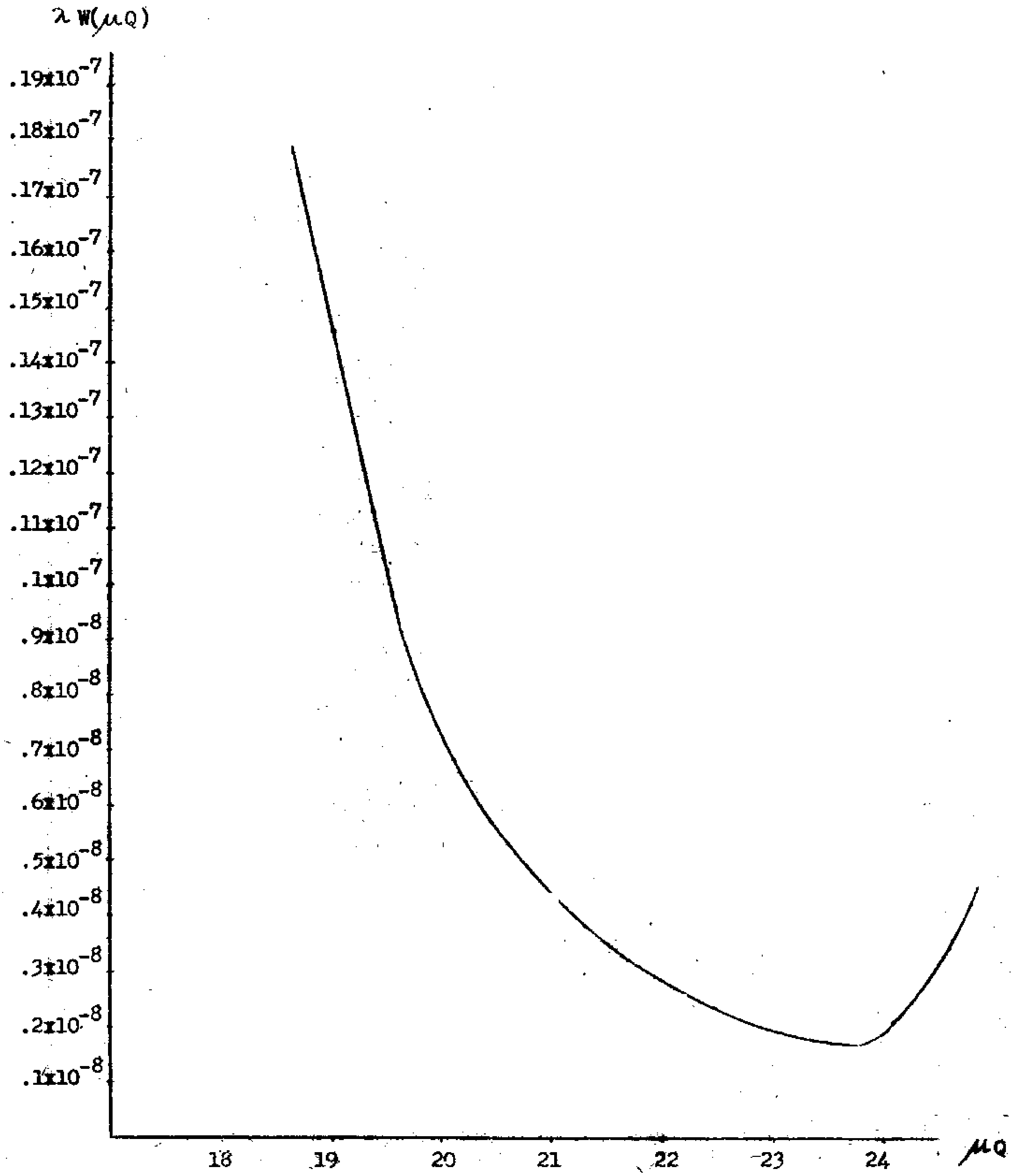
รูปที่ 7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.01$



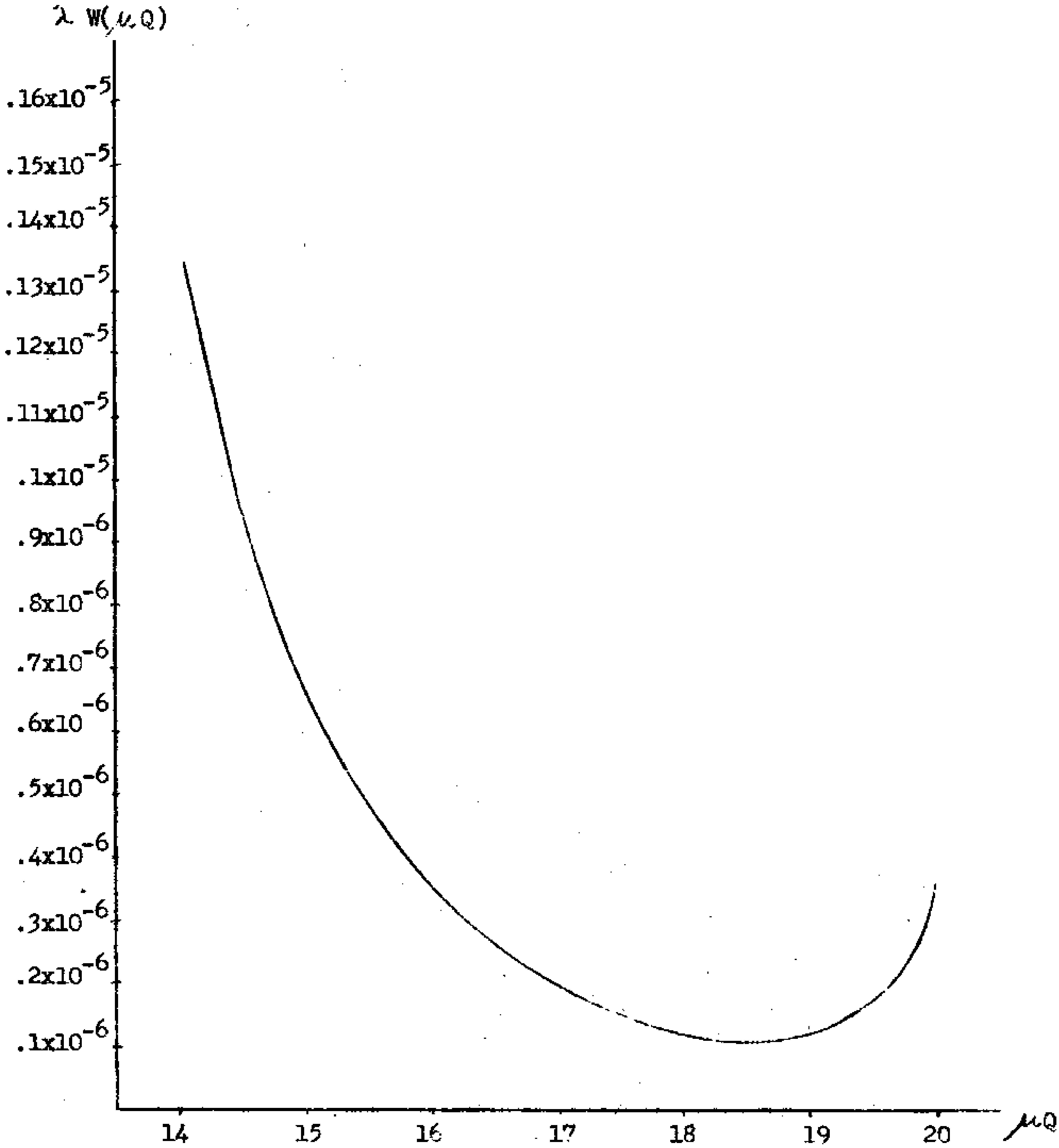
รูปที่ 8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.02$



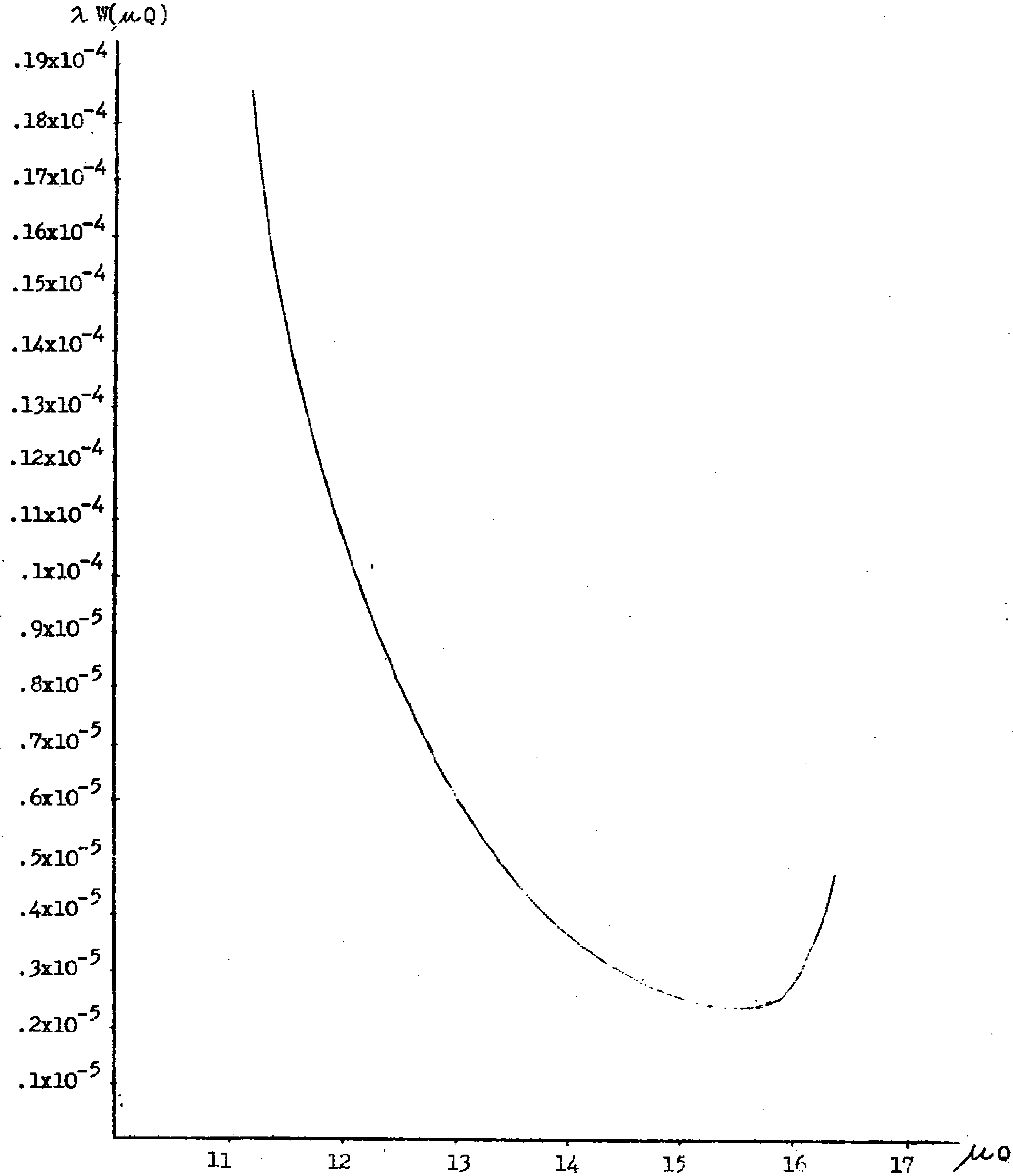
รูปที่ 9 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย ρ = 0.03



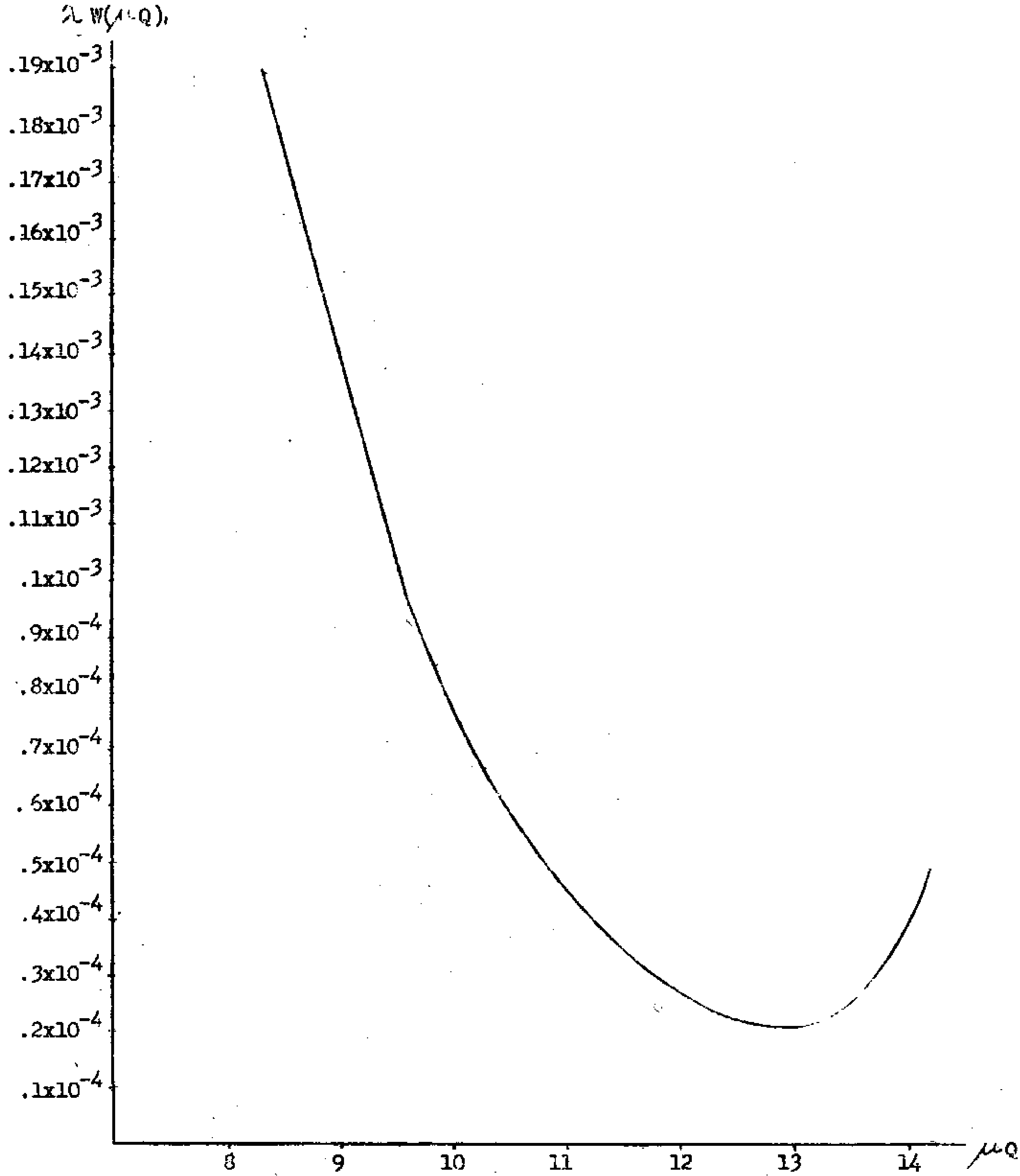
รูปที่ 10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.04$



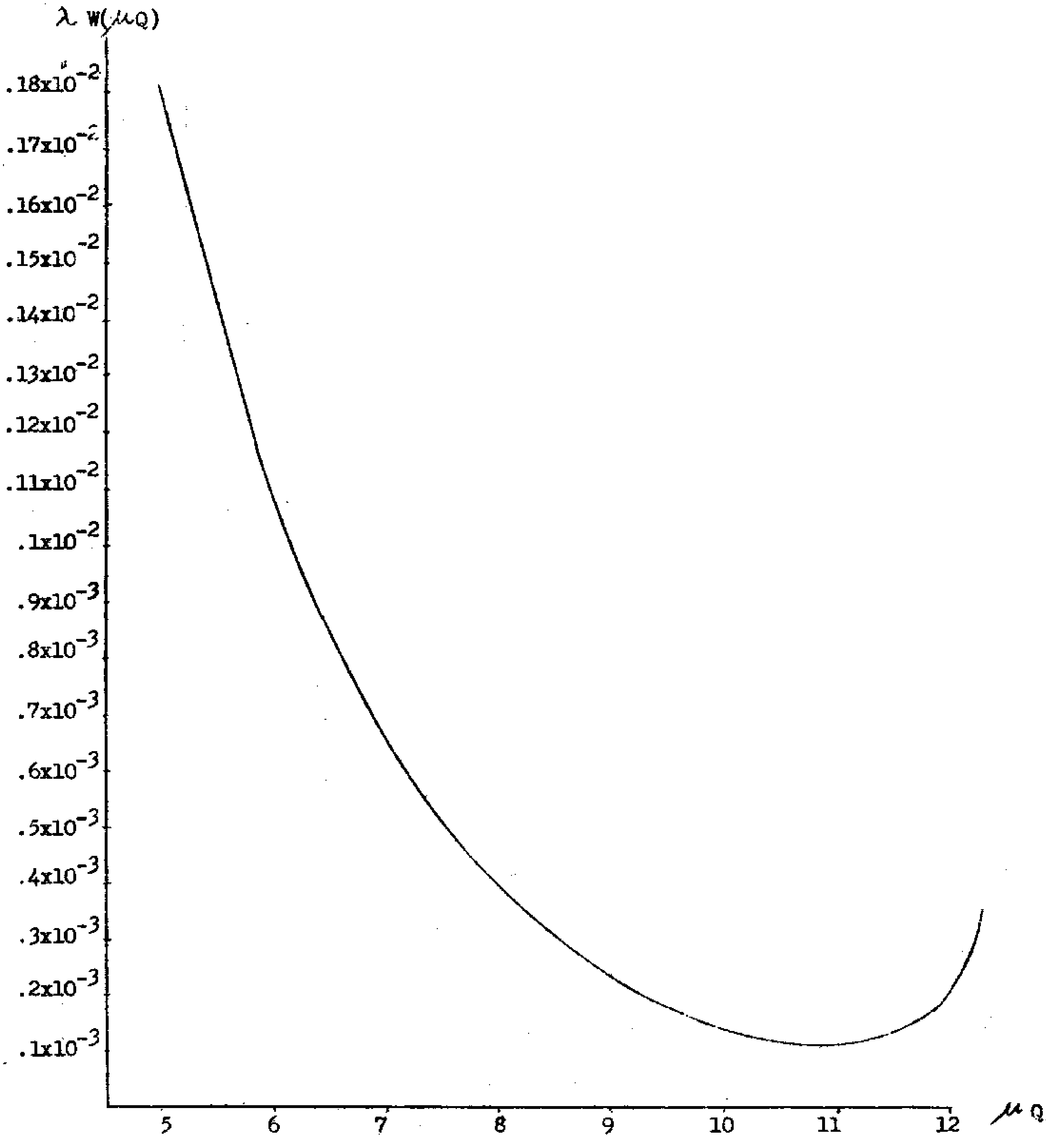
รูปที่ 11 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.05$



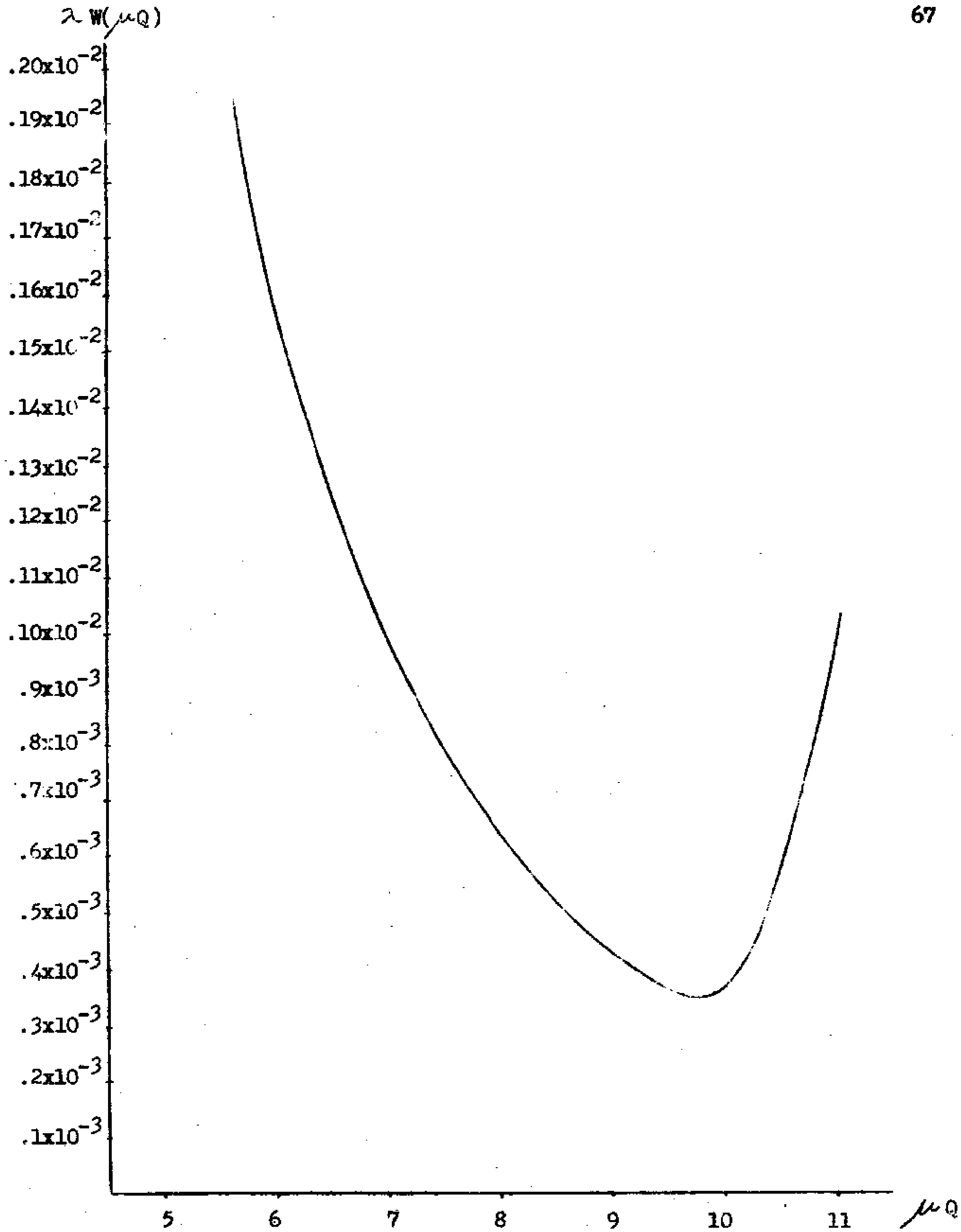
รูปที่ 12 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.06$



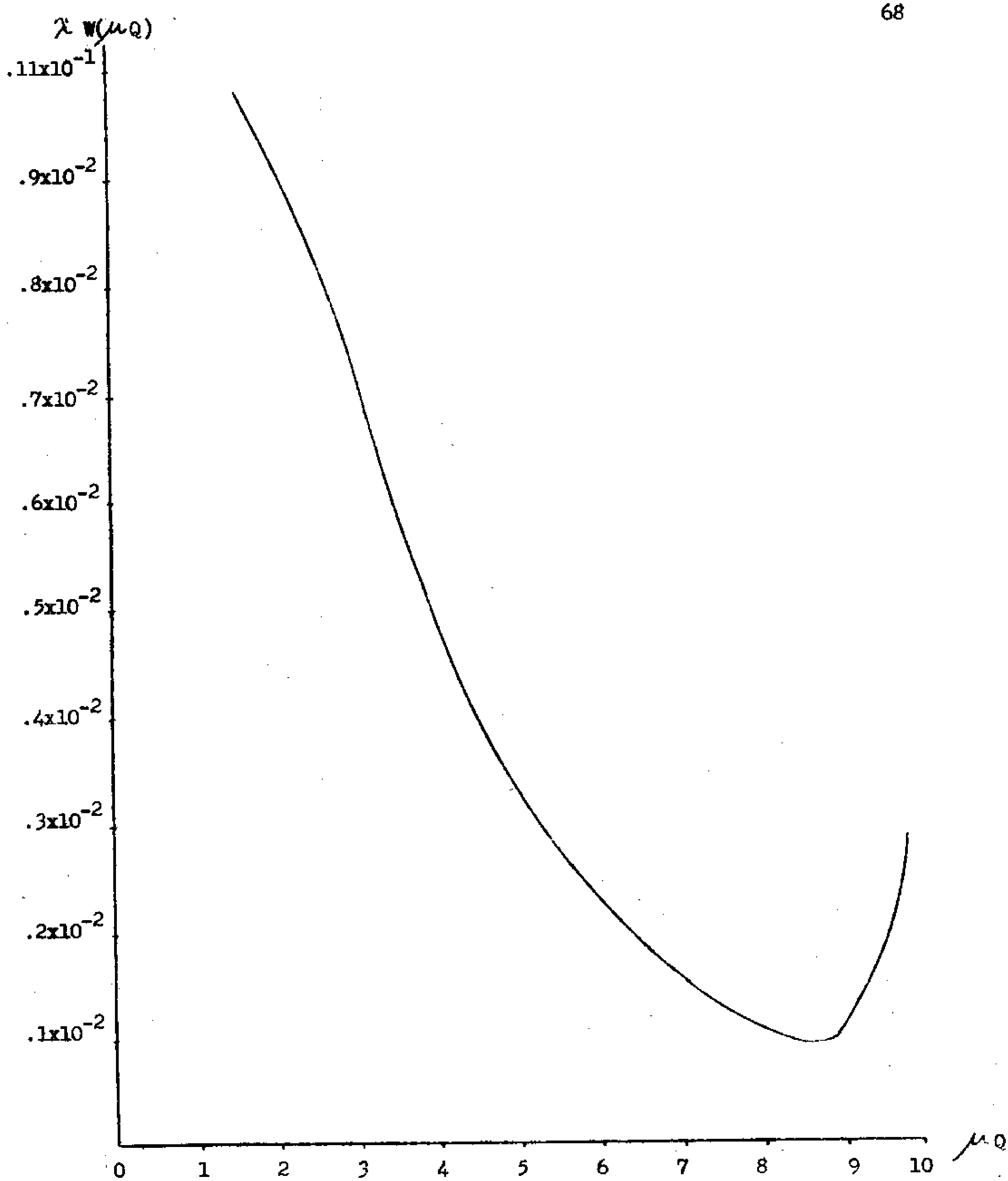
รูปที่ 13 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย ρ = 0.07



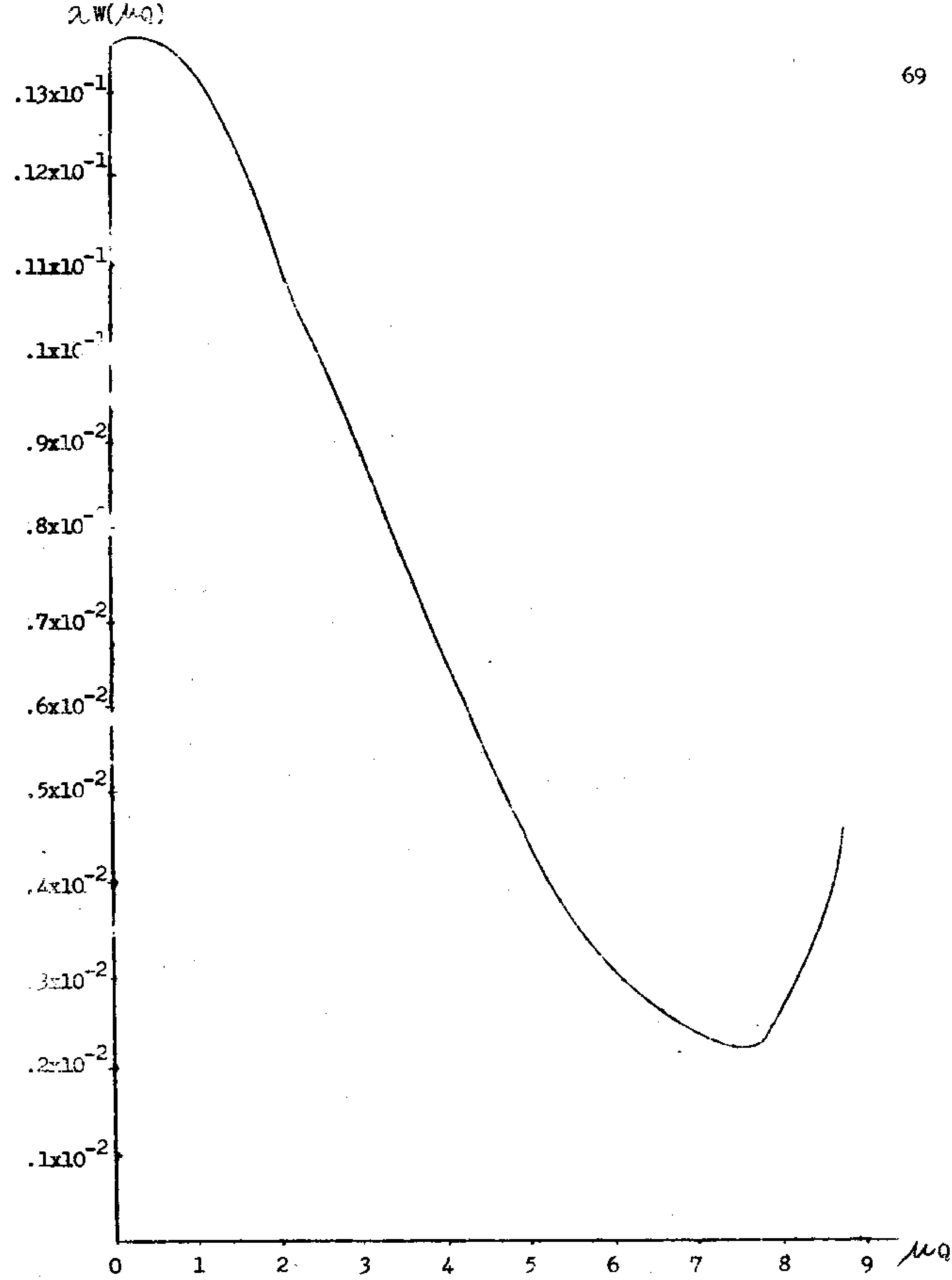
รูปที่ 14 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.08$



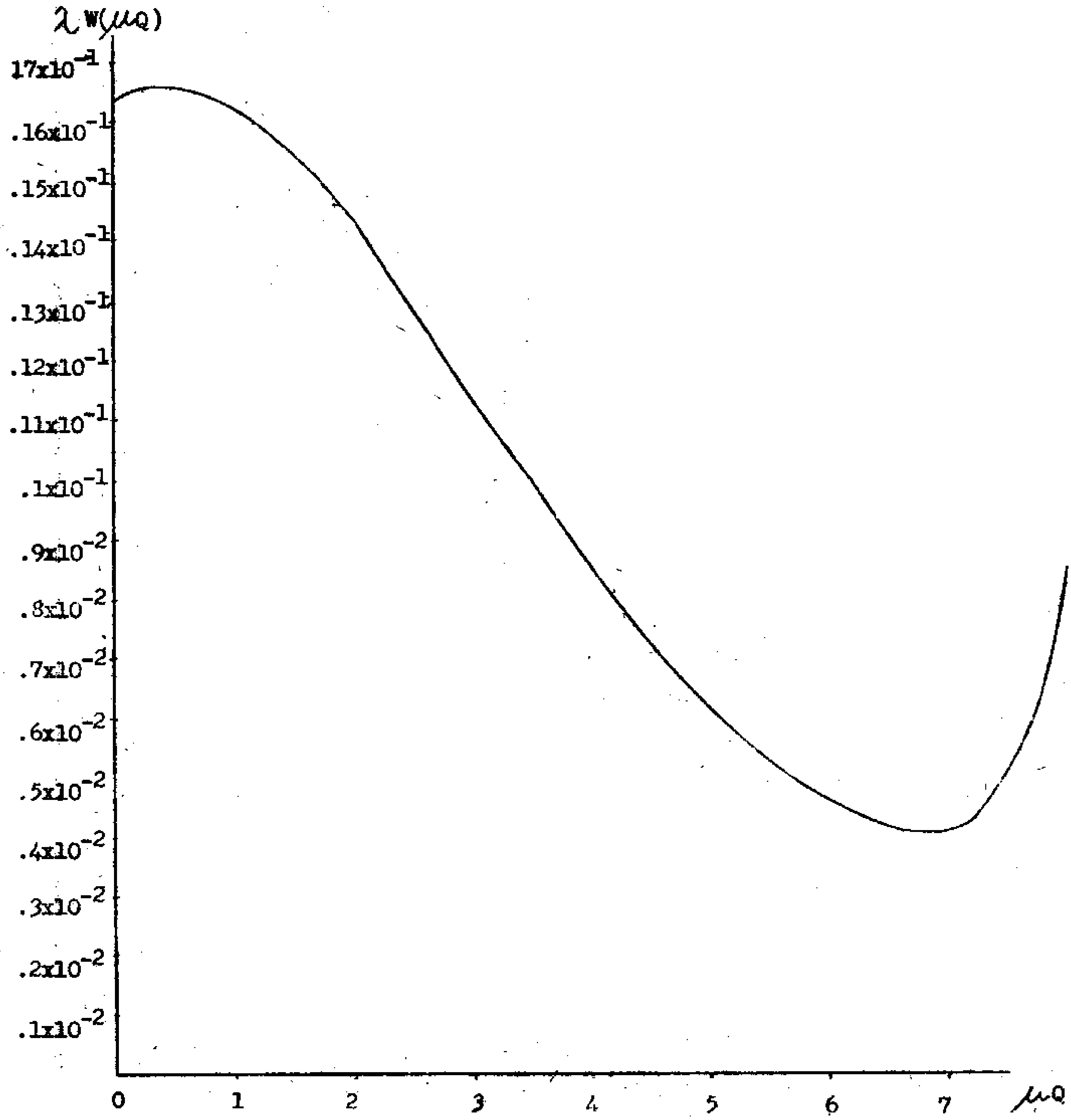
รูปที่ 15 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.09$



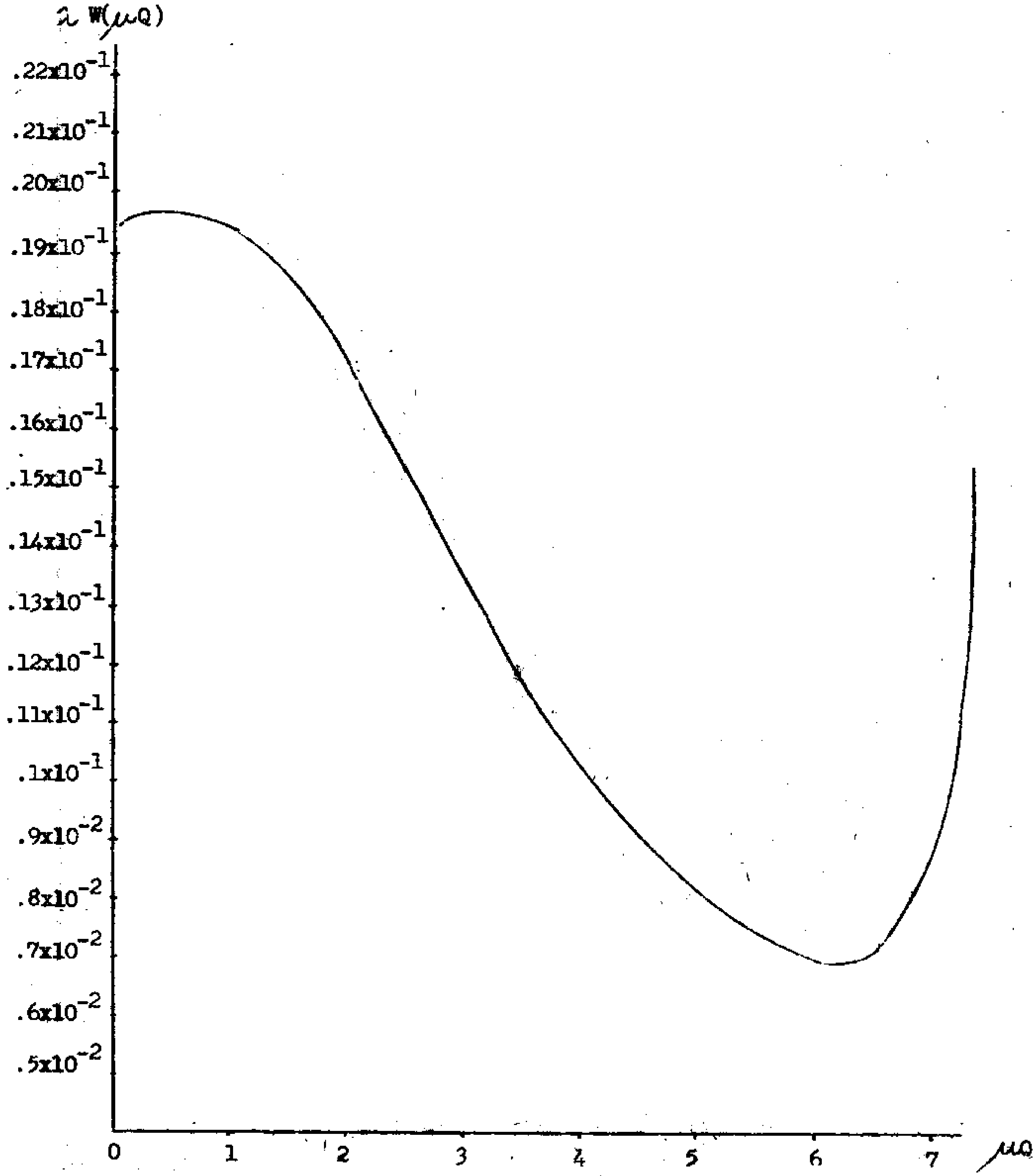
รูปที่ 16 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu_Q)$ กับ μ_Q โดย $\rho = 0.10$



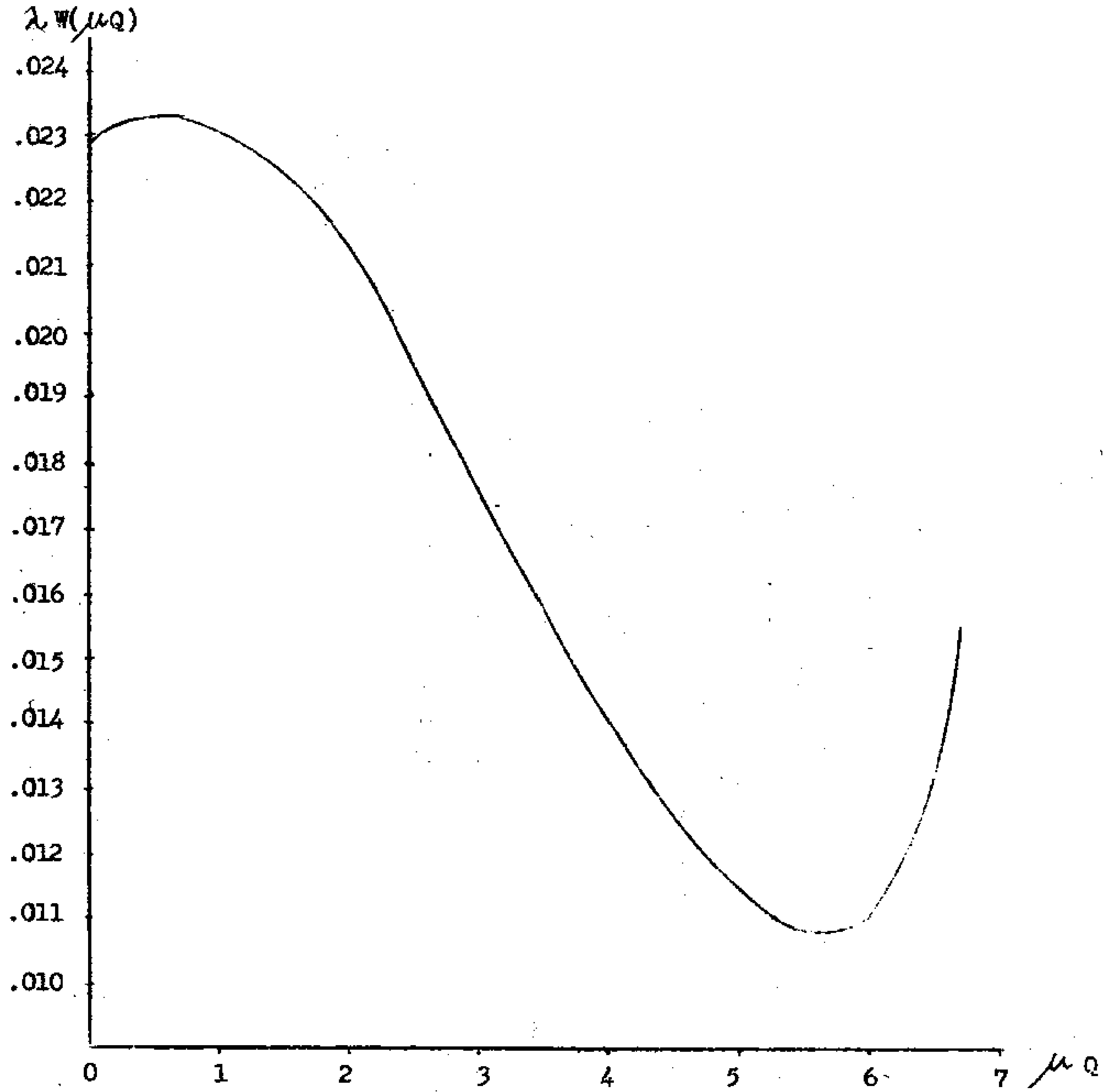
รูปที่ 17 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.11$



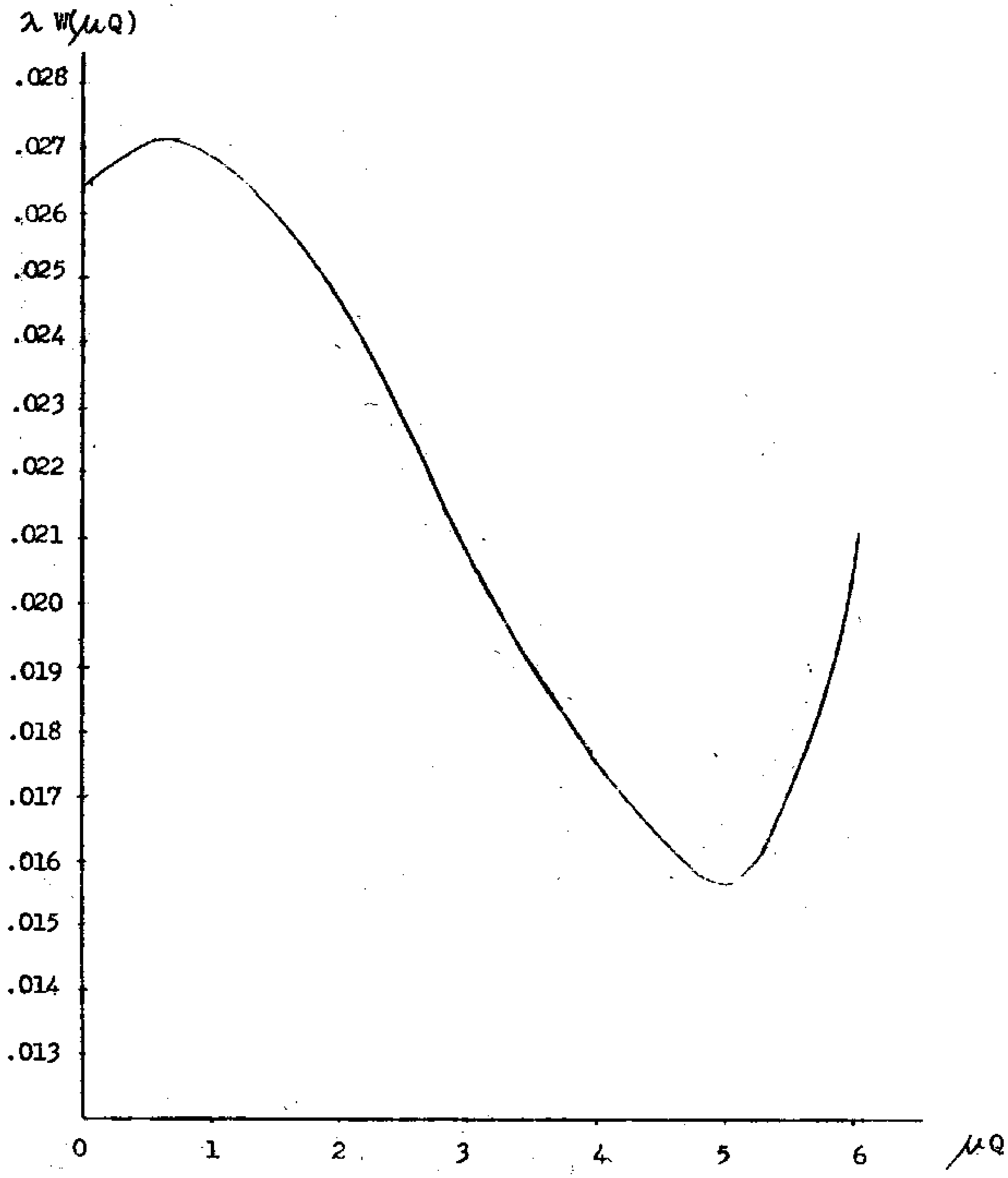
รูปที่ 18 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.12$



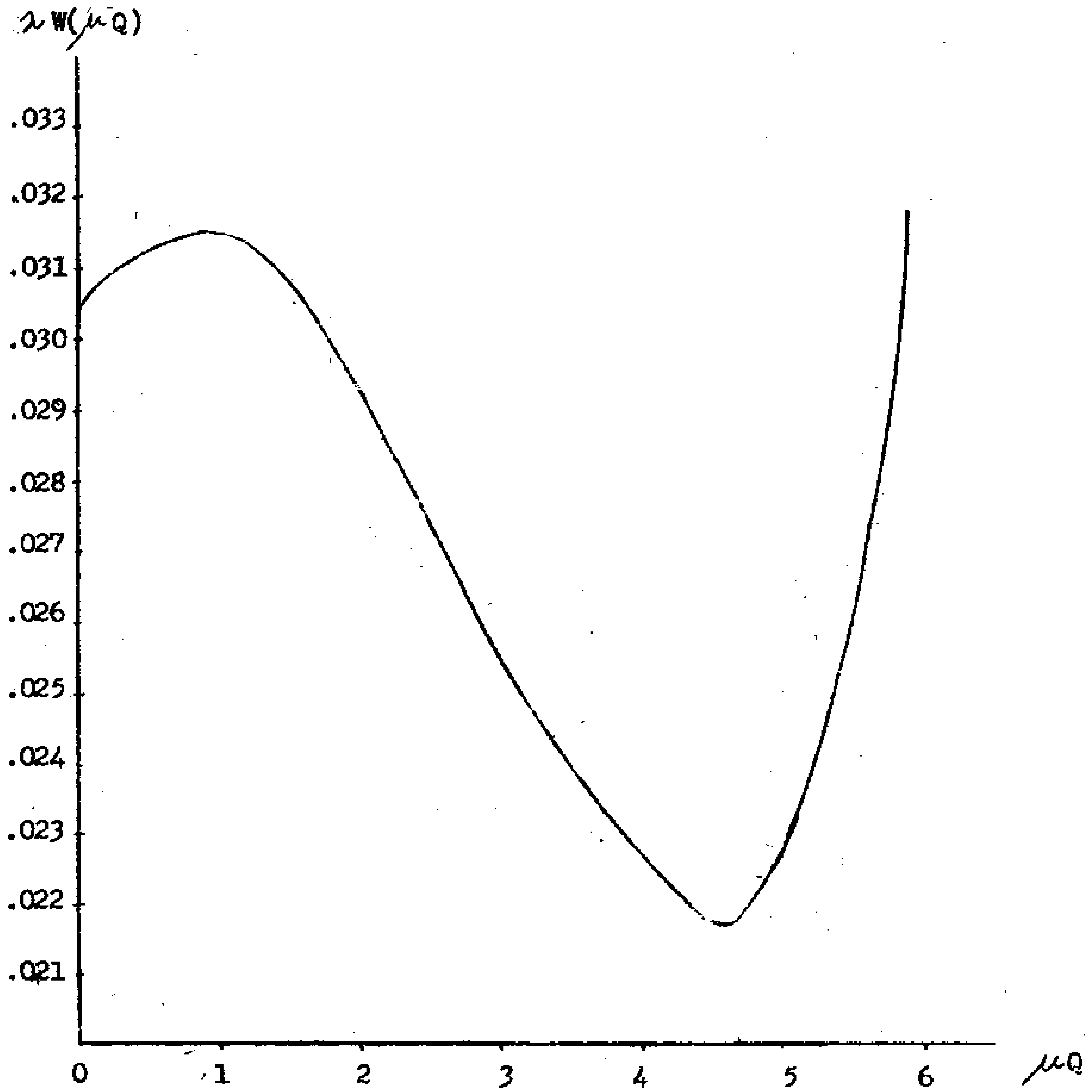
รูปที่ 19 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.13$



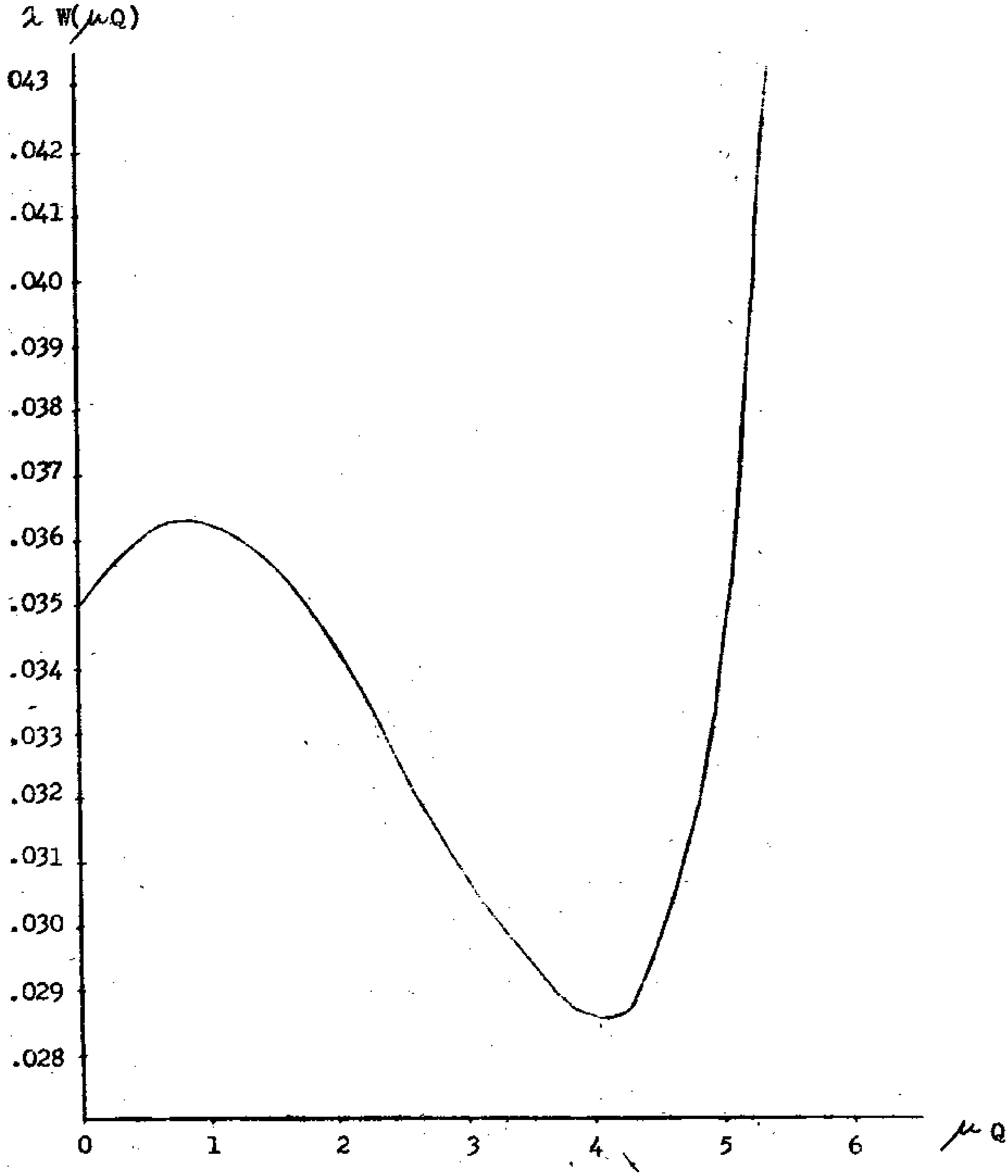
รูปที่ 20 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.14$



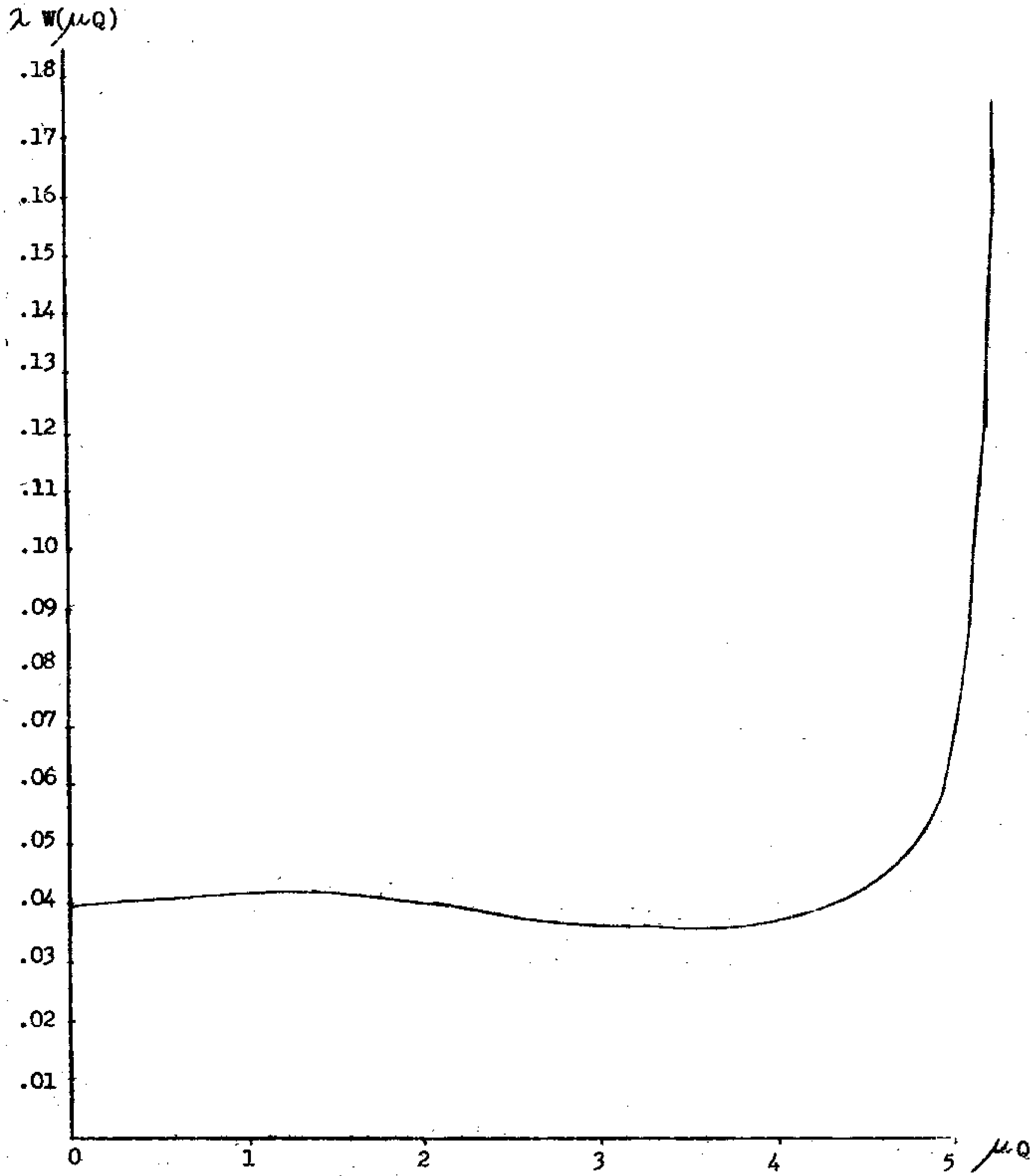
รูปที่ 21 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.15$



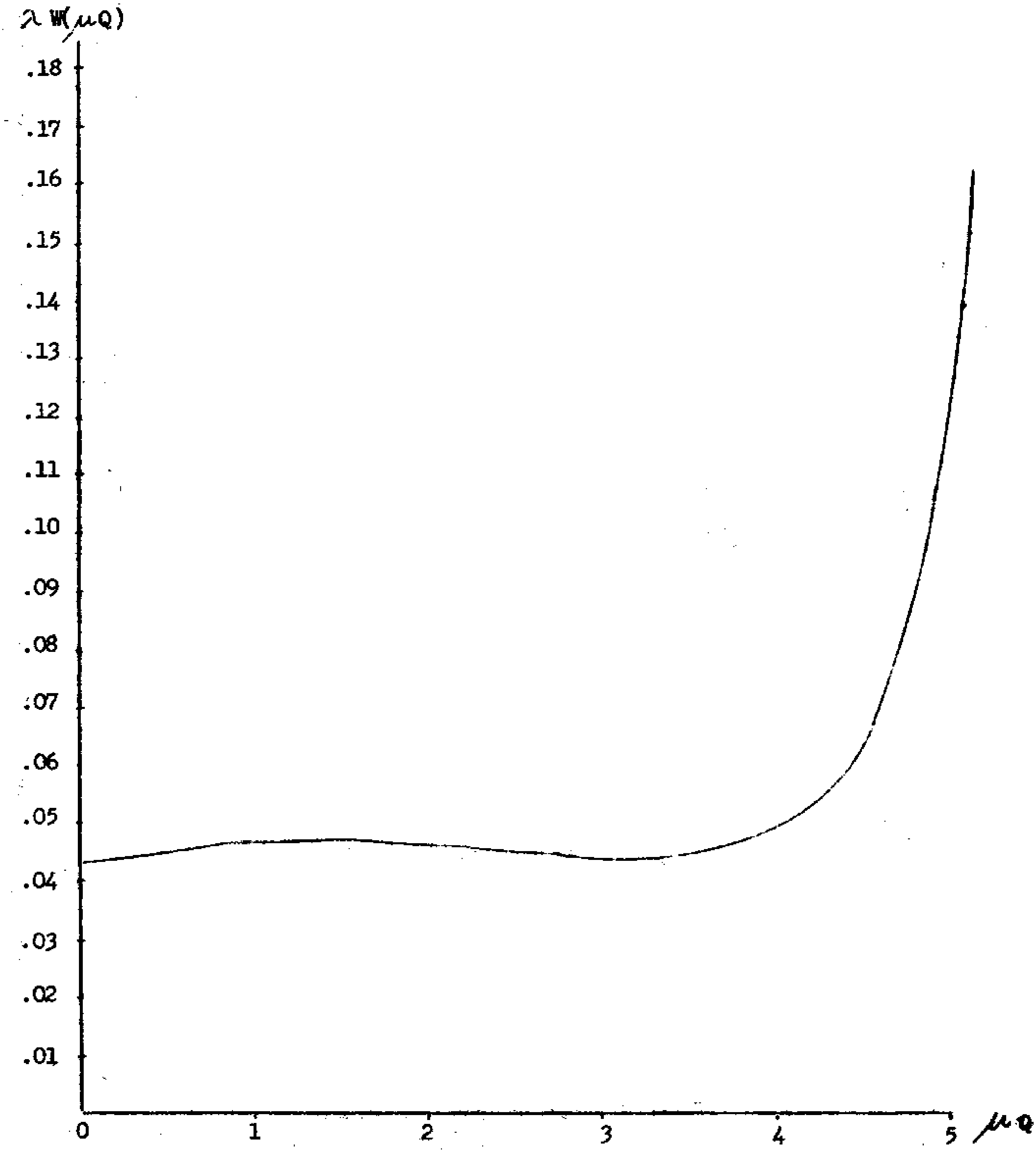
รูปที่ 22 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง λ W(μ Q) กับ μQ โดย ρ= 0.16



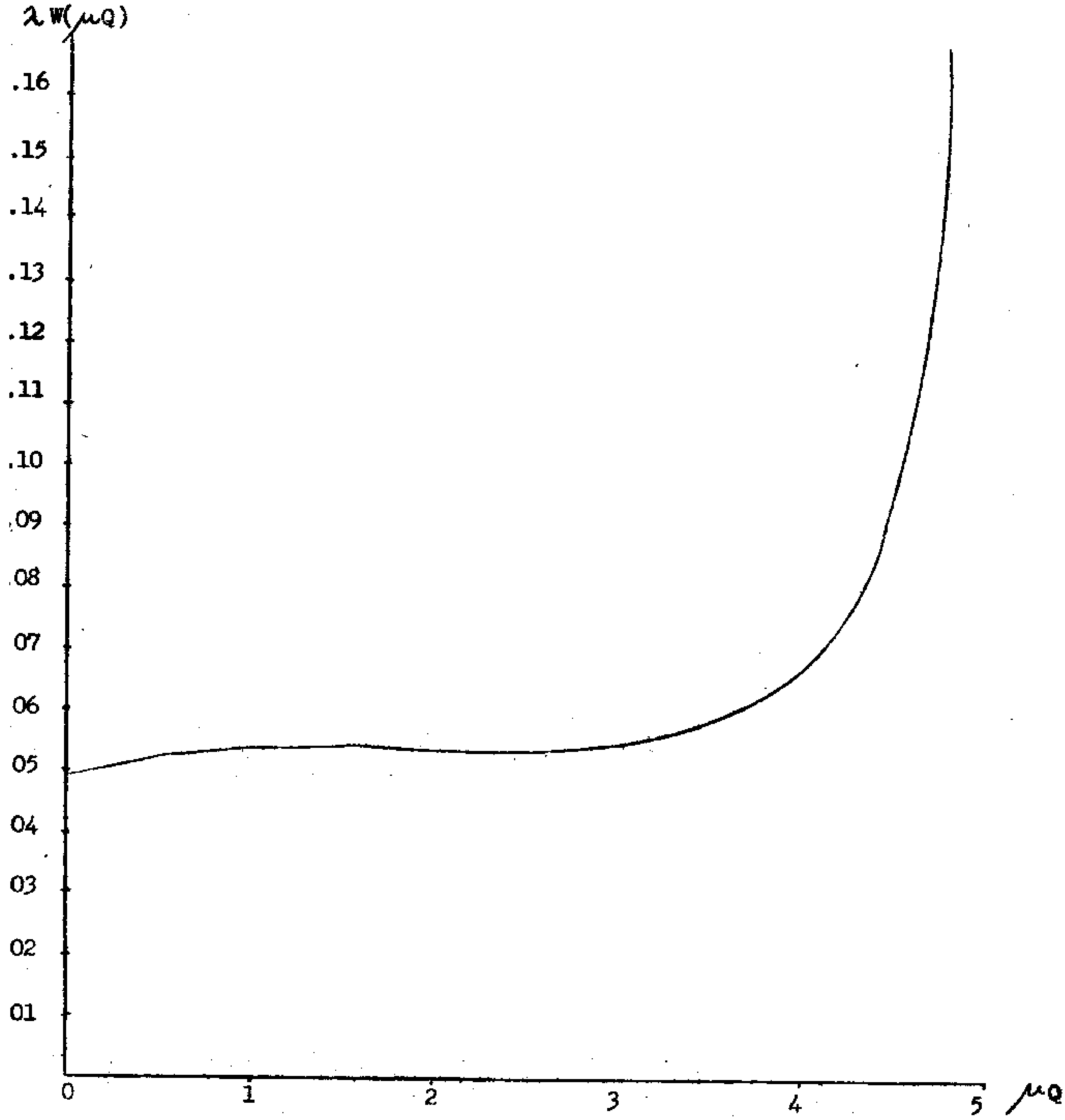
รูปที่ 23 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง λ W(μ Q) กับ μ Q โดย ρ = 0.17



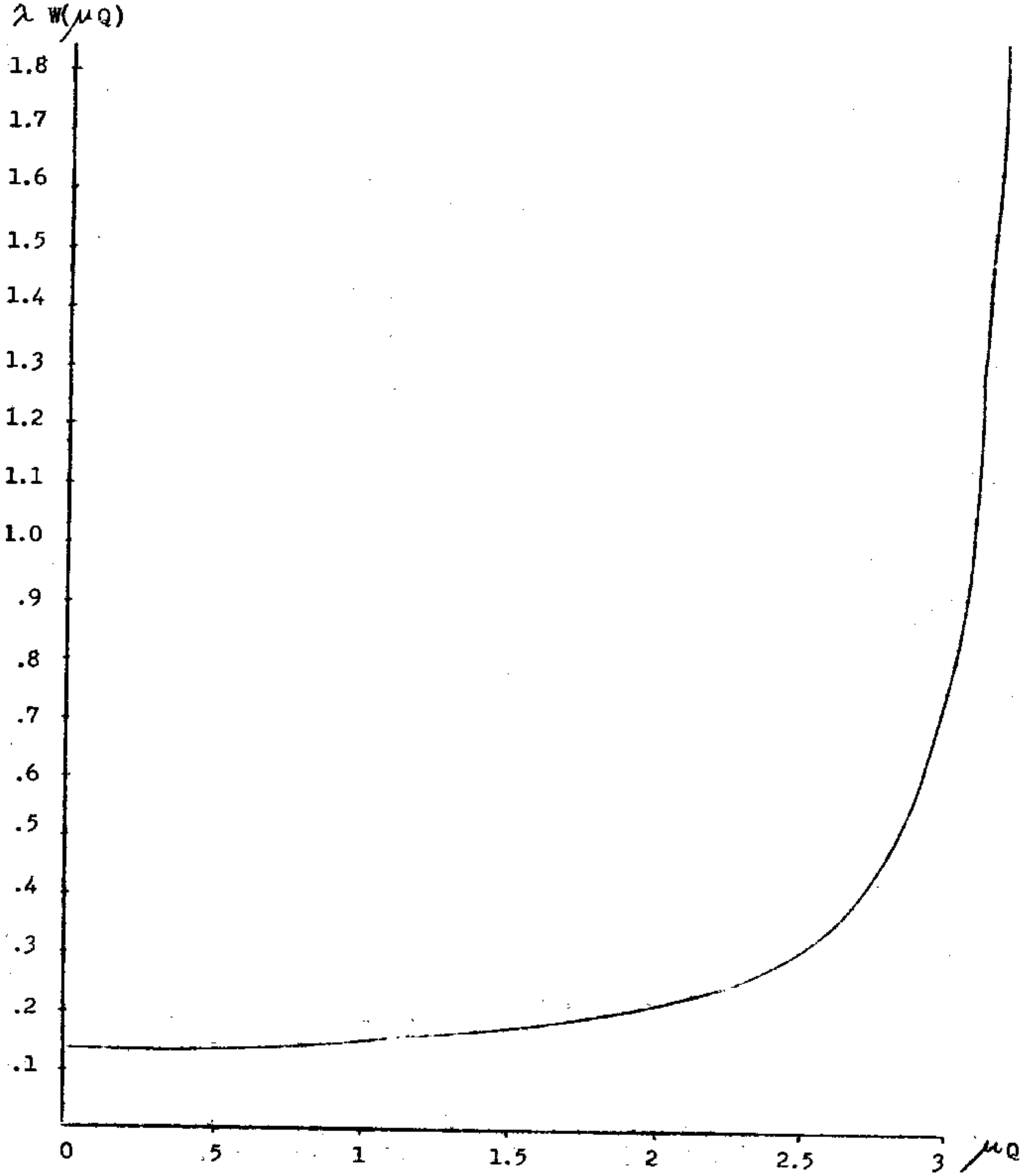
รูปที่ 24 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย ρ = 0.18



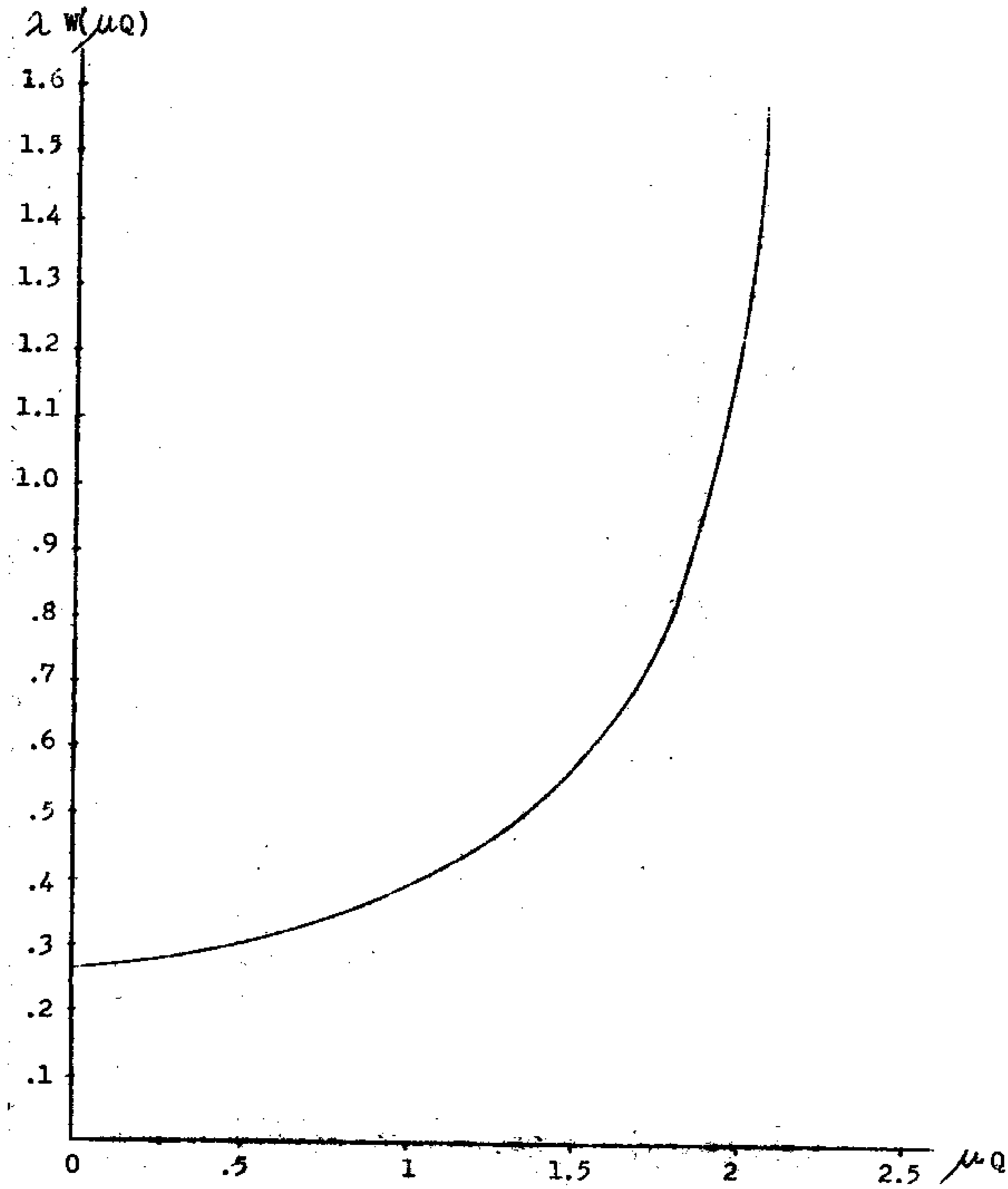
รูปที่ 25 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.19$



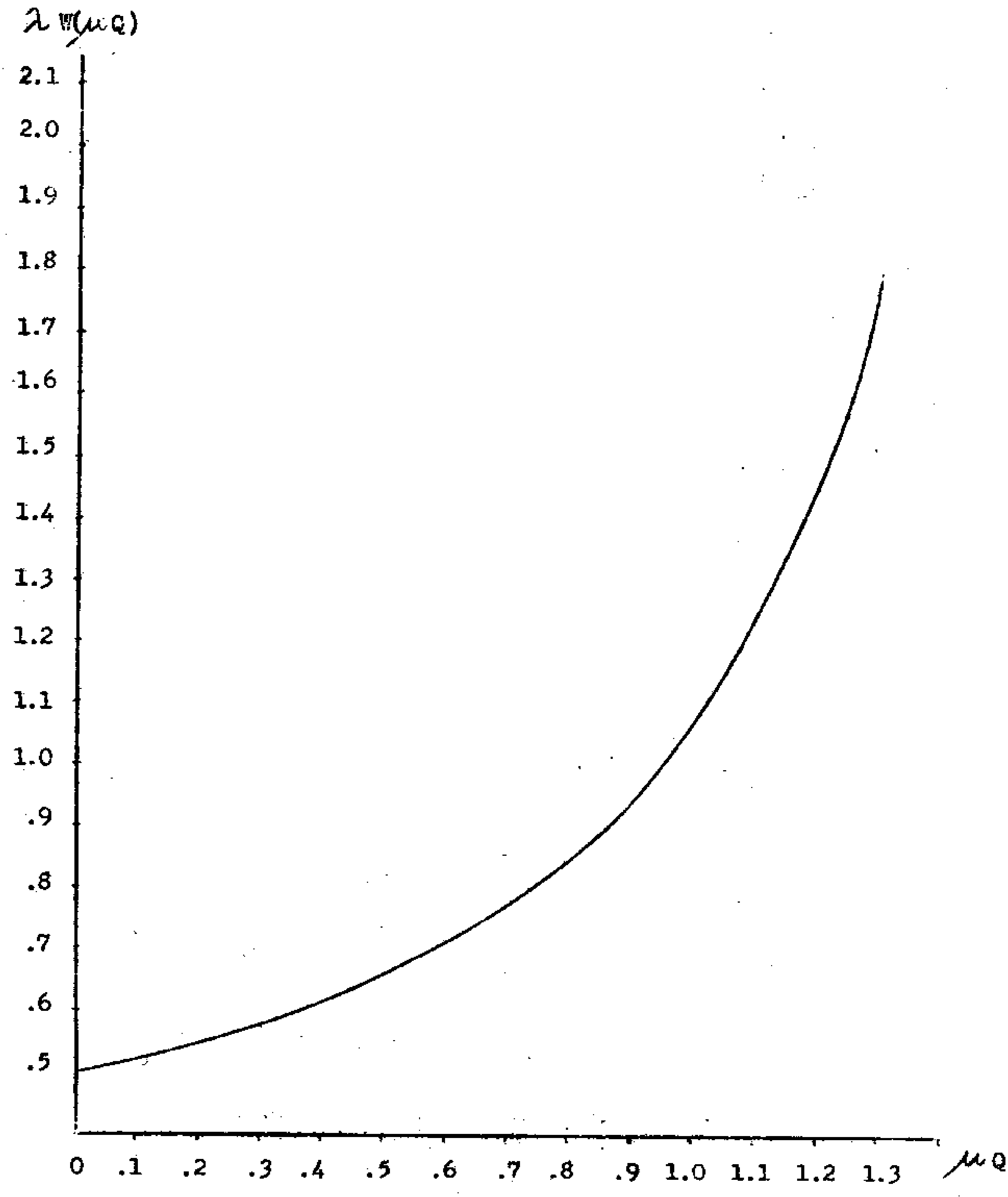
รูปที่ 26 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.2$



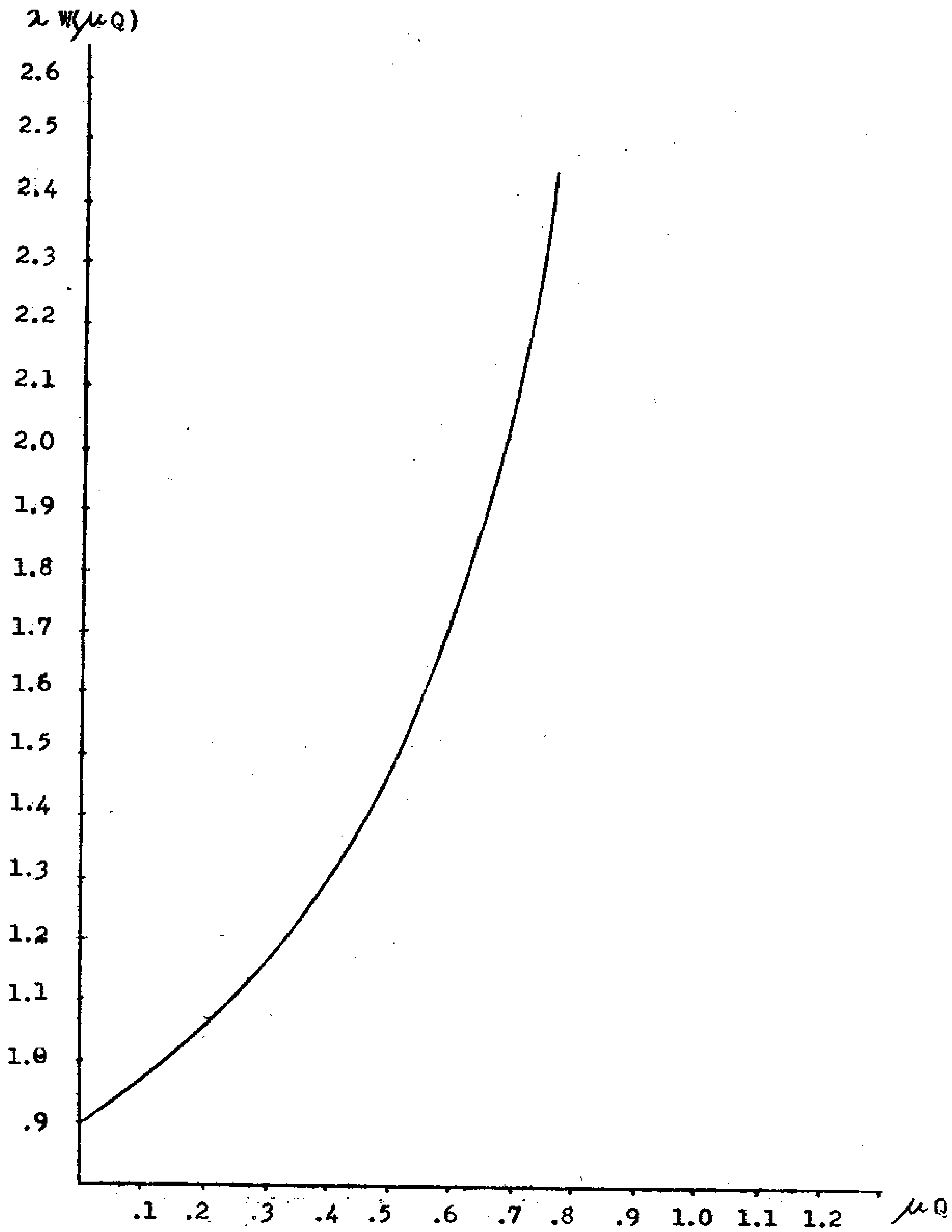
รูปที่ 27 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.3$



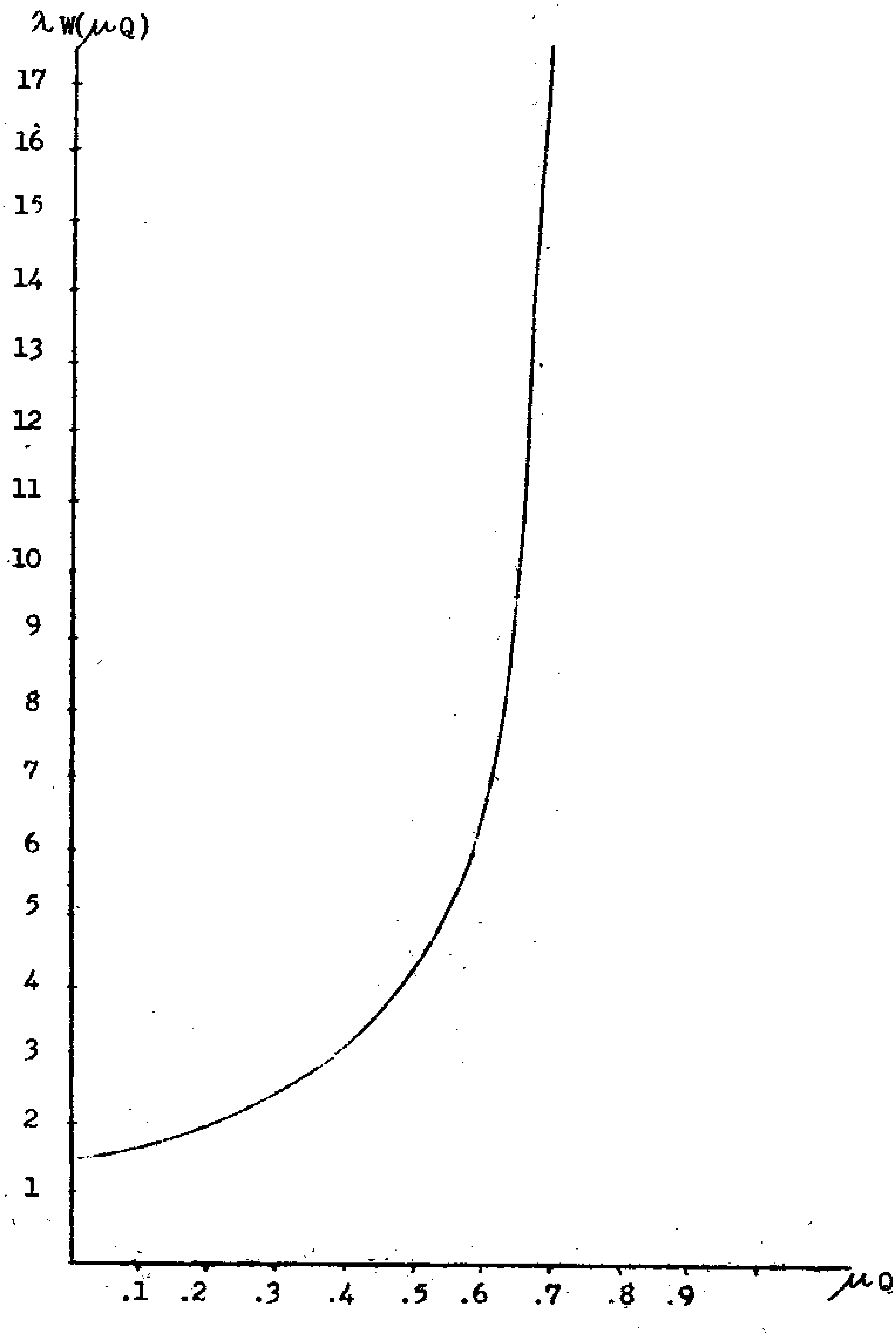
รูปที่ 28 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.4$



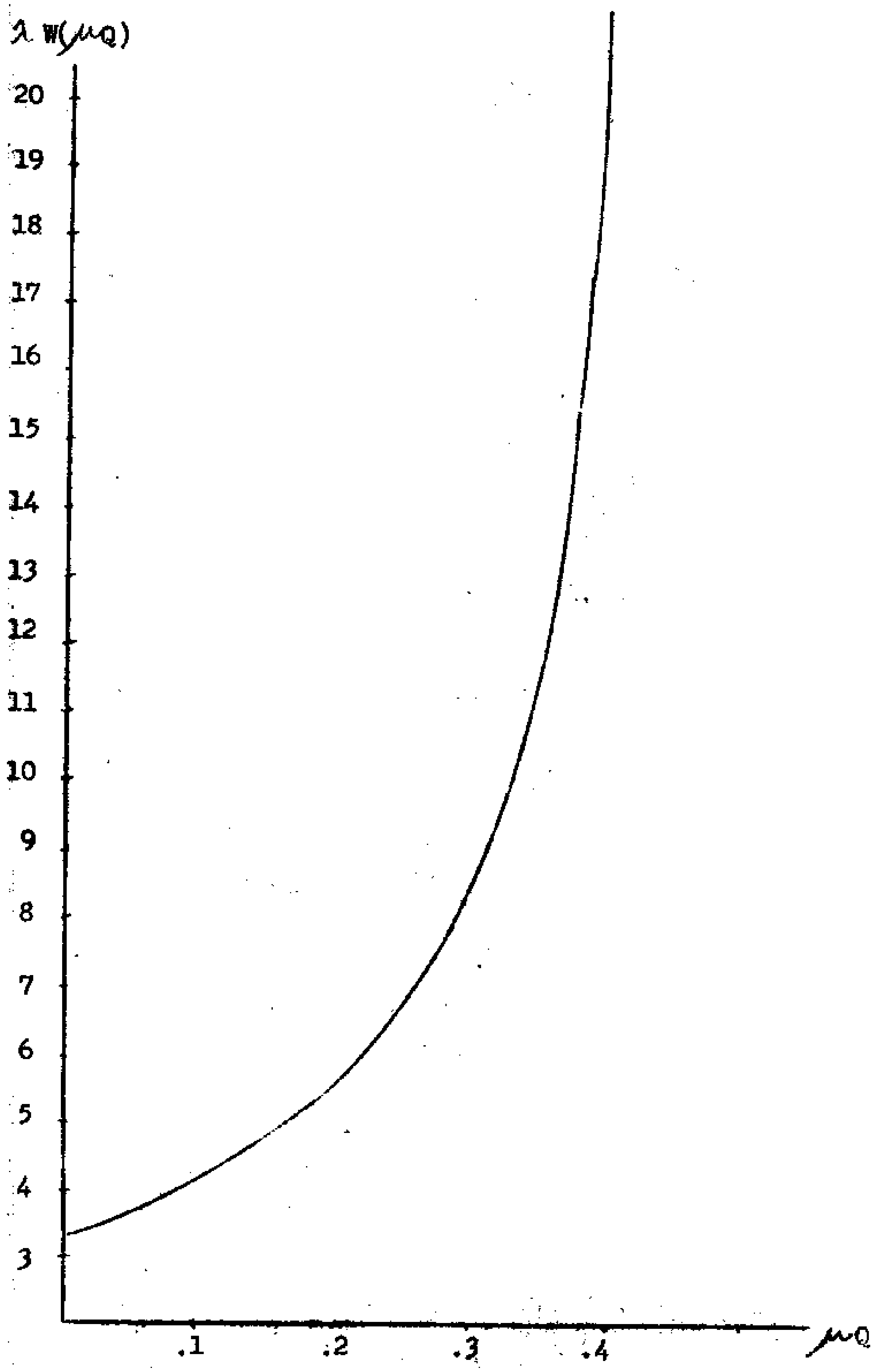
รูปที่ 29 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.5$



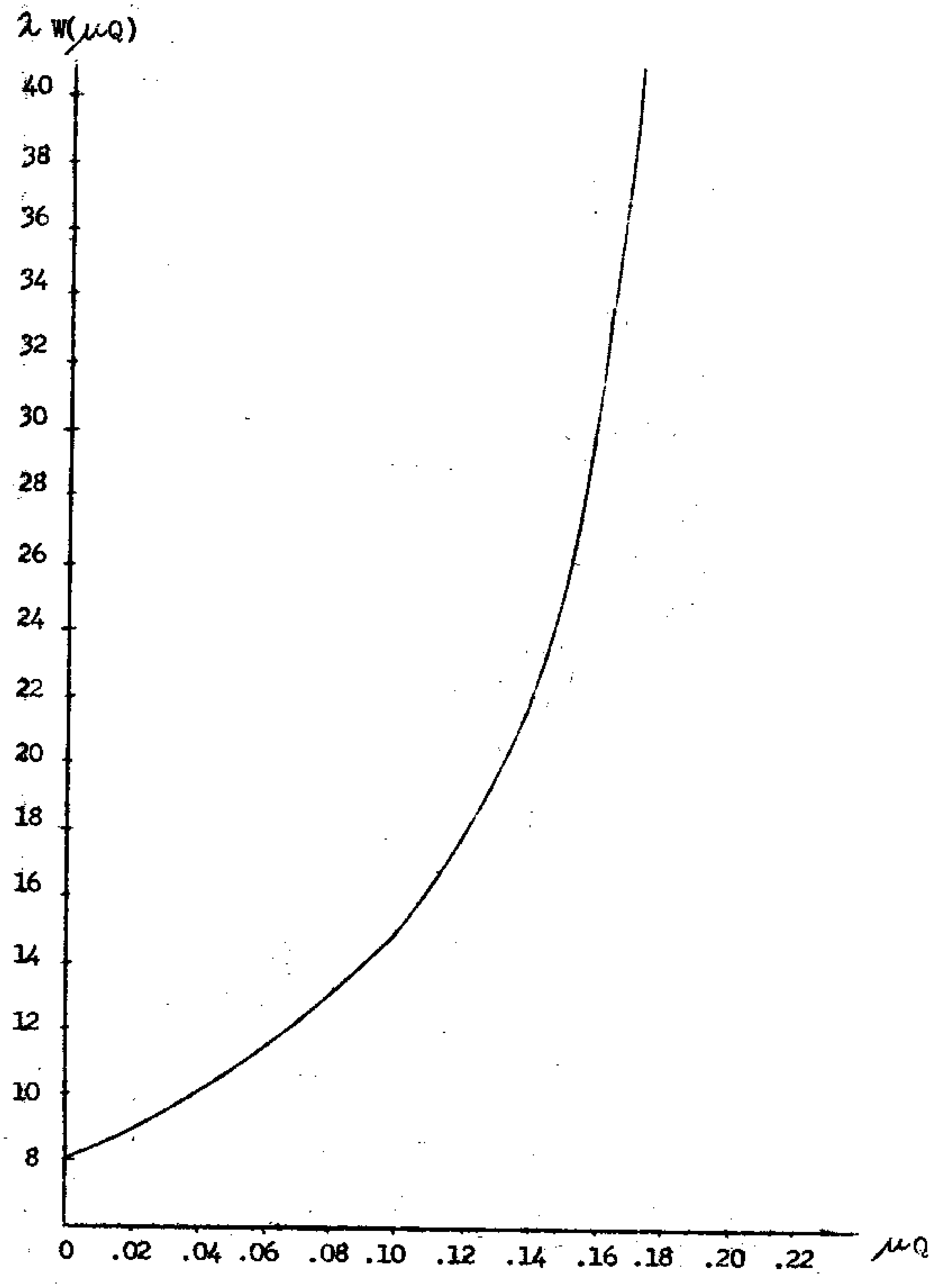
รูปที่ 30 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.6$



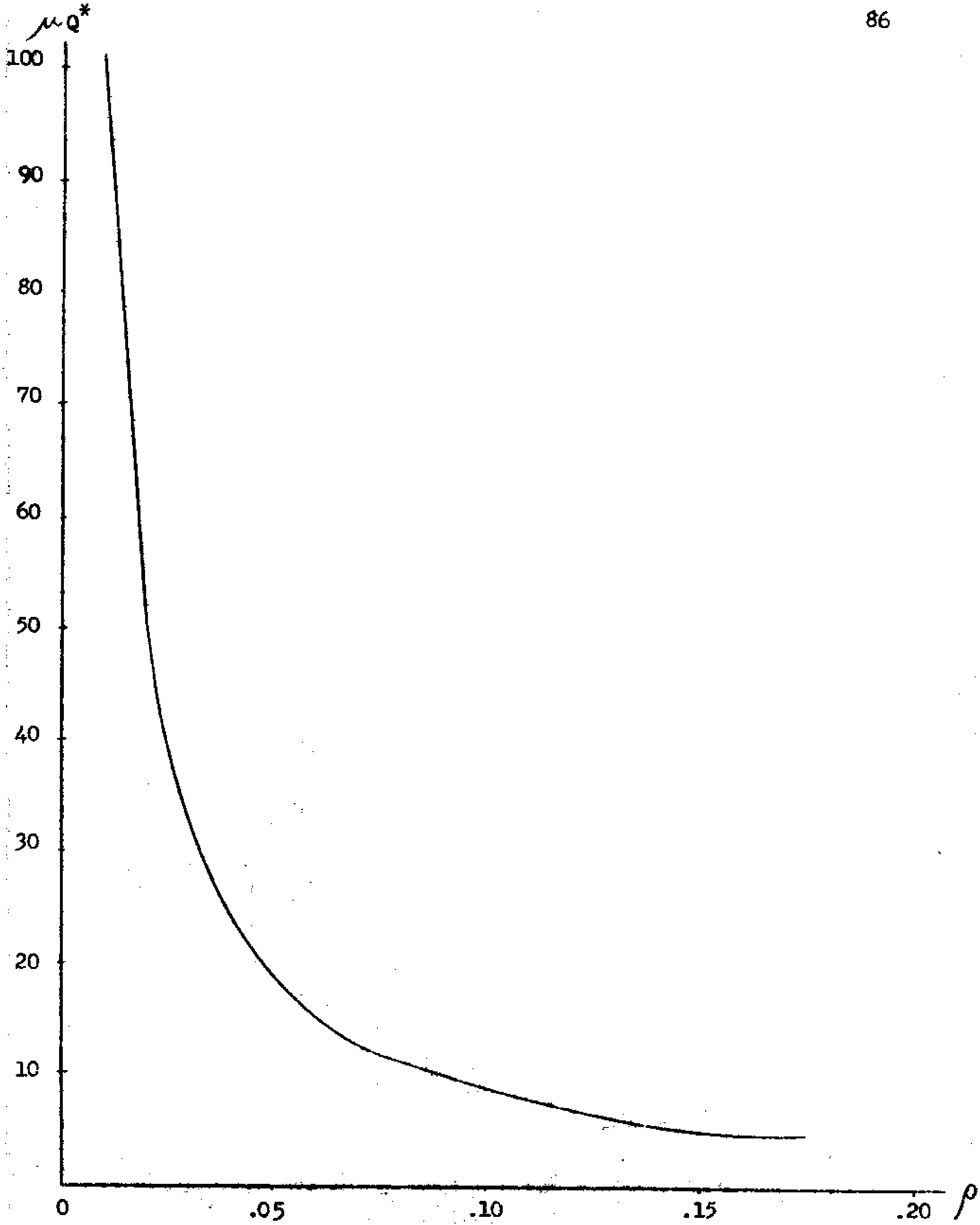
รูปที่ 31 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.7$



รูปที่ 32 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง λ W(μQ) กับ μQ โดย ρ = 0.8



รูปที่ 33 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\lambda W(\mu Q)$ กับ μQ โดย $\rho = 0.9$



รูปที่ 34 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่า μQ^* กับ ρ

ผลของการค้นหาค่าจุดต่ำสุดของ $\lambda W(x)$ ด้วยวิธีการ Fibonacci ได้แสดงไว้ในตาราง 5.4 ด้วยความถูกต้องดีกว่า 0.01 และความสัมพันธ์ของ μQ^* กับ ρ ก็ได้แสดงไว้ในรูปที่ 34 โดย Q^* เป็นเวลาที่ดีที่สุดที่แหล่งให้บริการจะให้แก่หน่วยรับบริการในแต่ละรอบ จะเห็นว่าเมื่อ ρ มีค่าน้อย μQ^* จะต้องมีค่ามาก และเมื่อ ρ มีค่ามาก μQ^* จะต้องมีค่าน้อย

เวลารอคอยเฉลี่ยที่ต่ำสุดในระบบ RR นี้จะเปรียบเทียบกับเวลารอคอยเฉลี่ยในระบบ FCFS เมื่อการมาของหน่วยรับบริการมีการแจกแจงแบบ Poisson และเวลาที่ต้องการบริการมีการแจกแจงแบบ Exponential ในระบบ FCFS ดังกล่าวนี้ ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยของหน่วยรับบริการอาจพิสูจน์ได้ว่ามีค่าเท่ากับ 21/

$$W^{FCFS} = \frac{1}{\mu}\frac{\rho}{1-\rho}$$

หรือ

$$\lambda W^{FCFS} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (5.24)$$

ซึ่งเป็นค่าของ $\lambda W(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ดังนั้น ค่าต่ำสุดของ $\lambda W(x)$ จึงมีค่าไม่มากกว่า λW^{FCFS} ในสมการ (5.24) การเปรียบเทียบได้แสดงไว้ในตาราง 5.5 จะเห็นว่าเมื่อ ρ มีค่าน้อยมาก ค่าต่ำสุดของ $\lambda W(x)$ มีค่าน้อยกว่า λW^{FCFS} ในกรณีที่ λ มีค่าคงตัว การที่ ρ มีค่าน้อยมากจึงแสดงว่า μ มีค่ามากเมื่อเทียบกับ λ นั่นคือ อัตราในการเข้าสู่ระบบของหน่วยรับบริการช้ากว่าอัตราในการให้บริการมาก ดังนั้น ในระบบ RR เมื่ออัตราในการเข้าสู่ระบบของหน่วยรับบริการช้ากว่าอัตราในการให้บริการมาก จึงอาจปรับค่า Q เพื่อให้เวลารอคอยโดยเฉลี่ยของหน่วยรับบริการมีค่าต่ำกว่า W^{FCFS} ได้ เมื่อ ρ มีค่ามากขึ้น ในกรณีที่ λ มีค่าคงตัว จะหมายความว่าอัตราในการให้บริการจะช้าลง ปรากฏว่าค่าต่ำสุดของ

21/ Frederick S. Hillier & Gerald J. Lieberman, Introduction to Operations Research, Holden-day, Inc., 1970, p.300.

ตารางที่ 5.4 แสดงช่วงของค่า x ที่จะใช้ในวิธีการ Fibonacci

ρ	ช่วงของค่า x
.01	5 - 99.5
.02	3 - 49.6
.03	3 - 33.3
.04	3 - 24.9
.05	2 - 19.8
.06	2 - 16.6
.07	2 - 14.2
.08	2 - 12.4
.09	2 - 11.0
.10	2 - 9.9
.11	2 - 9.0
.12	2 - 8.0
.13	2 - 7.0
.14	2 - 6.5
.15	2 - 6.0
.16	2 - 5.5
.17	2 - 5
.18	2 - 5
.19	2 - 4.5

ตารางที่ 5.5 แสดงค่า μQ^* ที่ทำให้ค่าของฟังก์ชั่น $\lambda W(\mu Q) = \dfrac{\rho^2 \mu^2 Q^2 e^{-\mu Q}}{(-e^{-\mu Q})(1-e^{-\mu Q}-\rho\mu Q)}$ มีค่าน้อยที่สุด

ρ	μQ^*	$\lambda W(\mu Q^*)$	$\frac{\rho^2}{1-\rho}$
.01	98.98	$.99089 \times 10^{-41}$	.000101
.02	48.96	$.25155 \times 10^{-19}$	.000408
.03	32.27	$.28403 \times 10^{-12}$	.000928
.04	23.91	$.86658 \times 10^{-9}$	.001667
.05	18.88	$.10053 \times 10^{-6}$	.002632
.06	15.52	$.22922 \times 10^{-5}$	.003830
.07	13.10	$.20721 \times 10^{-4}$	.005269
.08	11.28	$.10533 \times 10^{-3}$	.006957
.09	9.86	$.36541 \times 10^{-3}$	.008901
.10	8.70	$.97132 \times 10^{-3}$	.011111
.11	7.74	$.21295 \times 10^{-2}$	.013595
.12	6.93	$.40437 \times 10^{-2}$	.016364
.13	6.23	$.68803 \times 10^{-2}$	.019425
.14	5.61	$.10745 \times 10^{-1}$	.022791
.15	5.06	$.15678 \times 10^{-1}$	.026470
.16	4.55	$.21651 \times 10^{-1}$	.030476
.17	4.07	$.28580 \times 10^{-1}$	.034819
.18	3.61	$.36330 \times 10^{-1}$	.039512
.19	0	.042222	.042222
.20	0	.050000	.050000
.30	0	.128571	.128571
.40	0	.266667	.266667
.50	0	.500000	.500000
.60	0	.900000	.900000
.70	0	1.633333	1.633333
.80	0	3.200000	3.200000
.90	0	8.100000	8.100000

$\lambda W(x)$ เกิดขึ้น ณ จุด Q มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ นั่นคือระบบแบ่งเวลาในการรับบริการจะกลายเป็นระบบแบ่งแหล่งให้บริการแก่หน่วยรับบริการหลาย ๆ หน่วยในขณะเดียวกัน (Shared Processor System) ในระบบ RR กรณีเวลาสับเปลี่ยนเท่ากับศูนย์นี้ปรากฏว่าเมื่อ ρ มีค่าต่ำกว่า 0.18 ค่าต่ำสุดของ $\lambda W(x)$ มีค่าน้อยกว่า λW^{FCES} และเมื่อ ρ มีค่าเกินกว่า 0.19 ค่าทั้งสองนี้มีค่าเท่ากัน

ในกรณีที่ μ มีค่าคงตัว การวิเคราะห์อาจกระทำได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ λ มีค่าคงตัวโดยดัดแปลงสมการ (5.14) ดังนี้

$$\lambda W(\lambda Q) = \frac{\lambda Q^2 e^{-\lambda Q/\rho}}{(1-e^{-\lambda Q/\rho})(1-e^{-\lambda Q/\rho}-\lambda Q)}$$

$$= \frac{y^2 e^{-y/\rho}}{(1-e^{-y/\rho})(1-e^{-y/\rho}-y)} \qquad (5.25)$$

โดย $y = \lambda Q$ จะเห็นว่าสมการ (5.25) ยังคงมีลักษณะเหมือนกับสมการ (5.14) ค่าต่ำสุดของสมการ (5.25) ยังคงอยู่ ณ จุดเดิม และได้แสดงในตาราง 5.6

<u>การวิเคราะห์เวลารอคอยในกรณีเวลาสับเปลี่ยนมีค่าไม่เท่ากับศูนย์</u>

กรณีเวลาสับเปลี่ยนมีค่าไม่เท่ากับศูนย์หมายถึงเวลาในการนำเอาหน่วยรับบริการที่รออยู่ในคิวเข้าสู่แหล่งให้บริการและเวลาที่นำเอาหน่วยรับบริการที่อยู่ในแหล่งให้บริการออกจากแหล่งให้บริการเมื่อครบเวลาที่กำหนดให้ แต่ยังไม่เสร็จสิ้นการรับบริการไปต่อท้ายคิว จะต้องนำมาพิจารณาในการวิเคราะห์เวลารอคอย เวลารอคอยโดยเฉลี่ยในกรณีเวลาสับเปลี่ยนมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ย่อมจะยาวนานกว่าในกรณีเวลาสับเปลี่ยนมีค่าเท่ากับศูนย์

จึงควรจะศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างเวลารอคอยโดยเฉลี่ยและเวลาที่แหล่งให้บริการจะให้แก่หน่วยรับบริการในแต่ละรอบ ถ้าในแต่ละรอบแหล่งให้บริการให้เวลาแก่หน่วยรับบริการน้อยเกินไป จำนวนรอบที่หน่วยรับบริการจะเข้าออกแหล่งให้บริการก็มาก ทำให้ผลรวมของเวลาสับเปลี่ยน

มีค่ามากขึ้น ยังผลให้เวลารอคอยโดยเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นจากเดิม (คือเพิ่มขึ้นจากเวลารอคอยโดยเฉลี่ยของกรณีเวลาสับเปลี่ยนมีค่าเท่ากับศูนย์) ของหน่วยรับบริการมีค่าสูงขึ้น แต่ถ้าในแต่ละรอบแหล่งให้บริการให้เวลาแก่หน่วยรับบริการมากเกินไป จำนวนรอบที่หน่วยรับบริการจะเข้าออกแหล่งให้บริการก็น้อยลง จึงเป็นผลให้เวลารอคอยที่เพิ่มขึ้นจากเดิมมีค่าน้อยลง ดังนั้นจึงอาจสรุปได้ว่าเวลารอคอยที่เพิ่มขึ้นนี้ควร เป็นฟังค์ชั่นที่ลดลงของเวลาที่แหล่งให้บริการให้แก่หน่วยรับบริการในแต่ละรอบ

เพื่อความสะดวกการวิเคราะห์เวลารอคอยในกรณีเวลาสับเปลี่ยนมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ จะแบ่งพิจารณาออกเป็น 2 กรณีคือ

1. กรณีที่เวลารอคอยโดยเฉลี่ยเมื่อเวลาสับเปลี่ยนมีค่าเท่ากับศูนย์ ไม่เป็นฟังค์ชั่นที่เพิ่มขึ้นของเวลาที่แหล่งให้บริการให้แก่หน่วยรับบริการในแต่ละรอบ

2. กรณีที่เวลารอคอยโดยเฉลี่ยเมื่อเวลาสับเปลี่ยนมีค่าเท่ากับศูนย์เป็นฟังค์ชั่นที่เพิ่มขึ้นของเวลาที่แหล่งให้บริการให้แก่หน่วยรับบริการในแต่ละรอบ

ในกรณีแรก จากการศึกษาที่ผ่านมาพบว่าเกิดขึ้นเมื่อ ρ มีค่าน้อย เมื่อนำข้อสังเกตนี้ไปใช้กับสมการ (3.7) กับ (3.11) จะเห็นว่าจำนวนเฉลี่ยที่หน่วยรับบริการอยู่ในระบบจะมีค่าน้อยและโดยประมาณจะเท่ากับ

$$E^{\ell} \simeq \frac{\lambda Q}{1-\lambda Q} \tag{5.26}$$

$$E^{c} \simeq \lambda Q \tag{5.27}$$

และหน่วยรับบริการส่วนใหญ่จะต้องการจำนวนรอบที่จะรับบริการน้อย ตัวอย่างเช่น

$\lambda \quad = 5$ หน่วยต่อวินาที

$\mu \quad = 100$ หน่วยต่อวินาที

นั่นคือ $\rho \quad = .05$

จากตารางที่ 5.5 จะได้ว่า $\mu Q^* = 18.88$ ดังนั้น $Q^* = .1888$ ความน่าจะเป็นที่หน่วยรับบริการได้รับบริการแล้วจะกลับเข้าต่อท้ายคิวอีกเท่ากับ $.6317 \times 10^{-8}$ และ

ตารางที่ 5.6 แสดงค่า λQ^* ที่ทำให้ค่าของฟังก์ชั่น $\lambda \Psi_{(\lambda Q)} = \dfrac{\rho^2 Q^2 e^{-\lambda Q/\rho}}{(1-e^{-\lambda Q/\rho})(1-e^{-\lambda Q/\rho}-\lambda Q)}$ มีค่าน้อยที่สุด สำหรับแต่ละค่าของ ρ

ρ	λQ^*	$\lambda \Psi_{(\lambda Q)}$
.01	0.98980	$.99089 \times 10^{-41}$
.02	0.97914	$.25155 \times 10^{-19}$
.03	0.96801	$.28403 \times 10^{-12}$
.04	0.95635	$.86658 \times 10^{-9}$
.05	0.94408	$.10053 \times 10^{-6}$
.06	0.93112	$.22922 \times 10^{-5}$
.07	0.91739	$.20721 \times 10^{-4}$
.08	0.90277	$.10533 \times 10^{-3}$
.09	0.88711	$.36541 \times 10^{-3}$
.10	0.87024	$.97132 \times 10^{-3}$
.11	0.85194	$.21295 \times 10^{-2}$
.12	0.83197	$.40437 \times 10^{-2}$
.13	0.81802	$.68803 \times 10^{-2}$
.14	0.78570	$.10745 \times 10^{-1}$
.15	0.75851	$.15678 \times 10^{-1}$
.16	0.72773	$.21651 \times 10^{-1}$
.17	0.69227	$.28580 \times 10^{-1}$
.18	0.65027	$.36330 \times 10^{-1}$
.19	0.0	.04222
.20	0.0	.05000
.30	0.0	.21857
.40	0.0	.26667
.50	0.0	.50000
.60	0.0	.90000
.70	0.0	1.63333
.80	0.0	3.2
.90	0.0	8.1

ค่าเฉลี่ยของจำนวนรอบที่หน่วยรับบริการต้องการรับบริการมีค่าประมาณ 1 รอบ ดังนั้น จะได้ค่าเฉลี่ยของจำนวนหน่วยรับบริการที่อยู่ในระบบเท่ากับ .9440 หน่วย ความน่าจะเป็นที่จะมีหน่วยรับบริการต้องการรับบริการ n รอบ โดย n = 1, 2, ..., 8 มีค่าเท่ากับ

$$S_1 = .99999 \qquad S_5 = .15925 \times 10^{-32}$$
$$S_2 = .63171 \times 10^{-8} \qquad S_6 = .10060 \times 10^{-40}$$
$$S_3 = .39906 \times 10^{-16} \qquad S_7 = .63551 \times 10^{-49}$$
$$S_4 = .25209 \times 10^{-24} \qquad S_8 = .40146 \times 10^{-57}$$

จะเห็นว่าโอกาสที่หน่วยที่เข้ารับบริการต้องการรับบริการมากกว่า 1 รอบ เกือบจะไม่มีเลย เพราะ S_2, S_3 ; .... มีค่าน้อยมากเกือบเข้าใกล้ 0

จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของ $\rho = .05$; $\lambda = 5$, $\mu = 100$ เวลาสับเปลี่ยน = 0 จะได้ $Q^* = .1888$ และ $\lambda\Psi(18.88) = .10052 \times 10^{-6}$ ค่าคาดหมายของเวลารอคอยเท่ากับ $.20104 \times 10^{-7}$ วินาที

เปรียบเทียบกับการจำลองโดยใช้เครื่องจักรคำนวณโดยหาค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยของหน่วยที่เสร็จสิ้นการรับบริการออกจากระบบ 1000 หน่วย โดยสภาวะเริ่มต้นให้ไม่มีหน่วยใดอยู่ในระบบเลย จากการจำลองนี้จะพบว่าหน่วยที่เข้ารับบริการทั้งหมดต้องการรับบริการเพียง 1 รอบเท่านั้น ไม่มีหน่วยใดต้องการรับบริการมากกว่า 1 รอบเลย และค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยเท่ากับ 0 หลังจากที่มี 1000 หน่วยนี้ออกจากระบบแล้วก็ไม่มีหน่วยใดอยู่ในระบบเลย

ดังนั้น จะเห็นว่าเวลาสับเปลี่ยนจะมีอิทธิพลต่อเวลารอคอยของหน่วยรับบริการน้อยมาก จึงไม่เป็นที่น่าสนใจสำหรับการศึกษาเมื่อเวลาสับเปลี่ยนมีค่าไม่เท่ากับศูนย์

ส่วนกรณีที่ 2 จะเป็นกรณีที่น่าสนใจเพราะเวลารอคอยโดยเฉลี่ยเมื่อเวลาสับเปลี่ยนมีค่าเท่ากับศูนย์เป็นฟังค์ชันที่เพิ่มขึ้นของเวลาที่แหล่งให้บริการให้บริการให้แก่หน่วยรับบริการในแต่ละรอบ แต่เวลารอคอยที่เพิ่มขึ้นเนื่องจากเวลาสับเปลี่ยนมีค่าไม่เท่ากับศูนย์เป็นฟังค์ชันที่ลดลงของเวลาที่แหล่งให้บริการให้แก่หน่วยรับบริการในแต่ละรอบ ดังนั้น เวลารอคอยโดยเฉลี่ยของหน่วยรับบริการ เมื่อเวลาสับเปลี่ยนมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ จึงมีค่าต่ำสุด การศึกษาในกรณีที่ 2 นี้ จะแยกพิจารณาออกไปอีก 2 กรณีคือ

2.1 กรณีที่ไม่ยอมให้มีหน่วยรับบริการเกิดขึ้นในช่วงเวลาสับเปลี่ยน

2.2 กรณีที่ยอมให้มีหน่วยรับบริการเกิดขึ้นในช่วงเวลาสับเปลี่ยน

กรณีที่ 2.1 นี้ จะใช้ตัวอย่างเกี่ยวกับที่กล่าวมาแล้วในกรณีที่เวลาสับเปลี่ยนมีค่าเท่ากับศูนย์ในการศึกษาด้วยตัวแบบจำลอง โดยให้ λ เท่ากับ 1 หน่วยต่อวินาที μ เท่ากับ 2 หน่วยต่อวินาที ดังนั้น $\rho = 0.5$ กำหนดให้ $Q = 0.2$ วินาที และสภาวะเริ่มต้นก็เหมือนในกรณีเวลาสับเปลี่ยนมีค่าเท่ากับศูนย์ เวลาสับเปลี่ยนให้มีการแจกแจงตามสมการ (4.9) โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0.02333 วินาที หลังจากจำลองไปจนมีจำนวนหน่วยรับบริการออกจากระบบ 4,000 หน่วยแล้ว ปรากฏว่าค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยมีค่าเท่ากับ 0.9077 วินาที โดยมีค่าแปรปรวนเท่ากับ 2.1449 พิสัยความเชื่อมั่น 99% ในกรณีนี้คือ (.8481, .9673) รายละเอียดของเวลารอคอยโดยเฉลี่ยเมื่อจำแนกออกตามจำนวนรอบที่ต้องการรับบริการได้แสดงไว้ในตาราง 5.7

ค่าคาดหมายของเวลารอคอยของหน่วยรับบริการในกรณีนี้อาจคำนวณได้จากสมการ (3.22) รวมกับสมการ (3.30) ซึ่งคือ $W + \Delta^e$ และปรากฏว่ามีค่าเท่ากับ 0.8675 วินาที ซึ่งก็อยู่ในพิสัยความเชื่อมั่น 99% ดังได้กล่าวมาแล้ว

เวลารอคอยโดยเฉลี่ยเมื่อจำแนกตามจำนวนรอบที่หน่วยรับบริการต้องการจากแหล่งให้บริการอาจคำนวณได้จาก $W_n^e + \Delta_n^e$ ซึ่งคำนวณได้จากสมการ (3.20) และ (3.29) ผลการคำนวณโดย n มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง 8 ได้แสดงไว้ในสดมภ์ที่ 2 ในตาราง 5.8 พิสัยความเชื่อมั่น 99% ของเวลารอคอยเมื่อคำนวณจากข้อมูลในตาราง 5.7 ได้แสดงไว้ในสดมภ์สุดท้ายในตาราง 5.8 จะเห็นว่าค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยเมื่อจำแนกตามจำนวนรอบที่หน่วยรับบริการต้องการจากแหล่งให้บริการซึ่งคำนวณจากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และตัวแบบจำลองมีค่าใกล้เคียงกันมาก และค่าคาดหมายจากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ก็อยู่ในพิสัยความเชื่อมั่น 99% ด้วย

ตารางที่ 5.7 แสดงค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยของหน่วยที่เข้ารับบริการที่ต้องการรับบริการเป็นจำนวนรอบต่าง ๆ กัน โดยจำนวนของหน่วยที่ออกจากแหล่งให้บริการ 4000 หน่วย λ = 1 หน่วยต่อวินาที, μ = 2 หน่วยต่อวินาที, Q = 0.2 วินาที, ค่าเฉลี่ยของเวลาสับเปลี่ยน = .02333 วินาที โดยไม่ให้หน่วยที่เข้ารับบริการใหม่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยน

จำนวนรอบที่ต้องการรับบริการ	จำนวนหน่วย	ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอย	ค่าความแปรปรวน
1	1337	0.1937	0.0952
2	872	0.5222	0.3610
3	572	0.893	0.8975
4	404	1.1723	1.5244
5	264	1.4906	1.8563
6	168	1.8325	3.1161
7	117	2.0790	3.2963
8	82	2.5358	4.9759
9	58	3.2876	7.2292
10	49	3.7131	7.6489
11	26	4.6166	15.9202
12	16	4.1536	10.3130
13	8	4.6961	4.9682
14	6	6.1245	2.5546
15	8	7.5851	32.0867
16	7	7.4074	31.7791
17	2	1.7579	1.4962
18	1	6.5665	0.0
19	1	3.5153	0.0
20	-	-	
21	-	-	
22	1	10.4666	0.0
23	1	8.9918	0.0

ตารางที่ 5.8 แสดงการเปรียบเทียบค่าคาดหมายที่ได้จากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์กับค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยที่ได้จากการจำลองโดยเครื่องจักรคำนวณสำหรับหน่วยที่ต้องการรับบริการ nQ วินาที n = 1, 2,..., 8 โดยใช้จำนวนตัวอย่าง 4000 หน่วย และให้ λ = 1 หน่วยต่อวินาที μ = 2 หน่วยต่อวินาที Q = 0.2 วินาที, ค่าเฉลี่ยของเวลาสับเปลี่ยน = .02333 วินาที โดยไม่ให้หน่วยที่เข้ารับบริการใหม่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยน

จำนวนรอบที่ต้องการรับบริการ	ค่าคาดหมายของเวลารอคอยจากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์	ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยจากการจำลองโดยเครื่องจักรคำนวณ	ค่าแปรปรวน	พิสัยความเชื่อมั่น 99%
1	0.1733	0.1937	0.0952	(0.1720, 0.2154)
2	0.4953	0.5222	0.3610	(0.4698, 0.5746)
3	0.8222	0.8938	0.8975	(0.7738, 0.9958)
4	1.1740	1.1723	1.5244	(1.0141, 1.3305)
5	1.5284	1.4906	1.8563	(1.2746, 1.7066)
6	1.8896	1.8325	3.1161	(1.4817, 2.1833)
7	2.2583	2.0790	3.2963	(1.6466, 2.5114)
8	2.6330	2.5358	4.9759	(1.9013, 3.1703)

ตารางที่ 5.9 แสดงค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยของหน่วยที่เข้ารับบริการที่ต้องการรับบริการเป็นจำนวนรอบต่าง ๆ กัน โดยจำนวนหน่วยที่ออกจากแหล่งให้บริการ 4000 หน่วย λ = 1 หน่วยต่อวินาที μ = 2 หน่วยต่อวินาที Q = 0.22 วินาที ค่าเฉลี่ยของเวลาสับเปลี่ยน = .02333 วินาที โดยไม่ให้หน่วยที่เข้ารับบริการใหม่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยน

จำนวนรอบที่ต้องการรับบริการ	จำนวนหน่วย	ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอย	ค่าความแปรปรวน
1	1441	.2091	.1110
2	884	.5385	.3794
3	584	.9354	.9682
4	584	1.2499	1.6470
5	243	1.6313	2.3992
6	160	1.9196	3.0815
7	104	2.2050	4.1545
8	67	3.0118	5.5898
9	48	3.9673	8.8228
10	33	3.8239	11.4595
11	19	4.0738	10.8574
12	8	4.6943	4.8052
13	8	6.0894	14.6781
14	7	5.4613	10.8017
15	5	5.1069	47.9233
16	-	-	-
17	2	3.9946	1.6988
18	1	3.4551	0.0
19	-	-	-
20	1	11.4018	0.0
21	1	8.0067	0.0

การหาเวลาที่แหล่งให้บริการจะให้แก่หน่วยรับบริการในแต่ละรอบเพื่อให้เวลารอคอยโดยเฉลี่ยแล้วมีค่าน้อยที่สุดจะกระทำด้วยวิธี Fibonacci ในช่วง (0.1, 0.6) ด้วยความถูกต้องที่ดีกว่า .01 ปรากฏว่าได้ค่าเวลาที่ดีที่สุดที่แหล่งให้บริการจะให้แก่หน่วยรับบริการในแต่ละรอบ Q^* 22/ อยู่ระหว่าง 0.21812 และ 0.22728 ดังนั้น จึงให้ค่า Q เท่ากับ 0.22 ในการจำลองหารายละเอียดของเวลารอคอยโดยใช้ตัวอย่าง 4000 หน่วย แต่ปรากฏว่าค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยของหน่วยรับบริการจะเท่ากับ 0.8782 วินาที โดยมีค่าแปรปรวนเท่ากับ 2.0572 พิสัยความเชื่อมั่น 99% จึงเขียนได้เป็น (0.8189, 0.9366) รายละเอียดจำแนกตามจำนวนรอบที่ต้องการรับบริการได้แสดงไว้ในตาราง 5.9

ค่าคาดหมายของเวลารอคอยของหน่วยรับบริการซึ่งคำนวณจากผลการวิเคราะห์ในสมการ (3.22) รวมกับสมการ (3.30) ในกรณีนี้ปรากฏว่ามีค่าเท่ากับ 0.8641 วินาที ซึ่งก็อยู่ในพิสัยความเชื่อมั่น 99% ดังได้กล่าวมาแล้ว

กรณีที่ 2.2 เป็นกรณีที่ยอมให้หน่วยรับบริการเกิดขึ้นในช่วงเวลาสับเปลี่ยนส่วนค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ยังคงเหมือนในกรณี 2.1 โดยให้ Q เท่ากับ 0.2 วินาที การจำลองยังคงใช้จำนวน 4000 ตัวอย่างของหน่วยรับบริการที่ออกจากระบบ ผลการวิเคราะห์ข้อมูลของการจำลองนี้ปรากฏว่าค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยของหน่วยรับบริการมีค่าเท่ากับ 1.4307 วินาที โดยมีค่าแปรปรวนเท่ากับ 4.8682 และพิสัยความเชื่อมั่น 99% ในกรณีนี้เท่ากับ (1.3408, 1.5206) รายละเอียดจำแนกตามจำนวนรอบที่ต้องการรับบริการได้แสดงไว้ในตาราง 5.10 จำนวนหน่วยรับบริการเมื่อจำแนกออกตามจำนวนรอบที่ต้องการรับบริการจากการจำลองครั้งนี้ จะเปรียบเทียบกับค่าคาดหมายตามการแจกแจง Geometric โดย δ มีค่าเท่ากับ 0.67 ซึ่งแสดงไว้ในตาราง 5.11 และ χ^2 ในการเปรียบเทียบนี้มีค่าเท่ากับ 10.52 ซึ่งน้อยกว่าค่าวิกฤต 30.58 โดยองศาแห่งเสรีภาพเท่ากับ 15 และ α เท่ากับ .01

22/ ดูการหาค่า Q^* ที่ภาคผนวก ค-1.

ตารางที่ 5.10 แสดงค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยของหน่วยที่ต้องการรับบริการเป็นจำนวนรอบต่าง ๆ กัน โดยจำนวนของหน่วยที่ออกจากแหล่งให้บริการเท่ากับ 4000 หน่วย λ = 1 หน่วยต่อวินาที, μ = 2 หน่วยต่อวินาที, Q = .20 วินาที, ค่าเฉลี่ยของเวลาสับเปลี่ยน = .02333 วินาที โดยให้หน่วยที่เข้ารับบริการใหม่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยน

จำนวนรอบที่ต้องการรับบริการ	จำนวนหน่วย	ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอย	ค่าความแปรปรวน
1	1336	0.3478	0.2395
2	853	0.8603	0.8528
3	580	1.1397	2.1428
4	410	1.1771	2.8506
5	257	2.3136	4.6185
6	174	2.9705	6.9774
7	129	3.2243	8.6384
8	80	3.9864	8.7176
9	56	5.1478	11.1108
10	48	5.9218	23.5017
11	27	6.1332	23.2825
12	18	6.3794	32.0623
13	8	8.4190	13.3407
14	5	6.8145	4.0932
15	7	8.8045	47.8615
16	5	12.8814	41.7131
17	2	1.8317	1.3126
18	2	10.9156	9.0702
19	1	3.4943	0.0
20	-	-	-
21	-	-	-
22	1	1.1487	0.0
23	1	16.6402	0.0

ตารางที่ 5.11 แสดงการเปรียบเทียบการกระจายของจำนวนรอบที่หน่วยรับบริการต้องการรับบริการจากแหล่งให้บริการที่จำลองได้ กับค่าคาดหมายที่มีการแจกแจงแบบ Geometric

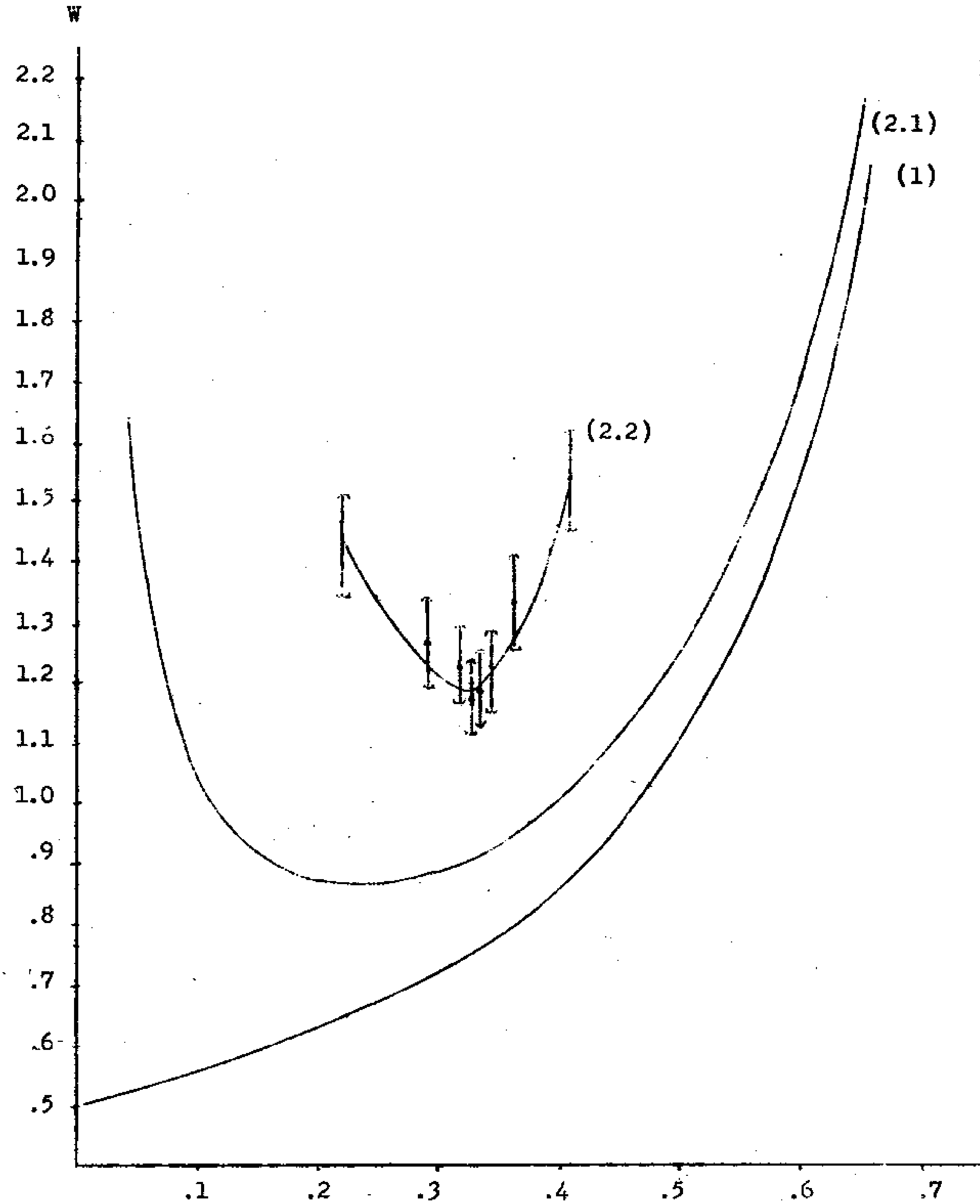
จำนวนรอบที่ต้องการรับบริการ	จำนวนหน่วยที่ได้จากการจำลอง	ค่าคาดหมายของจำนวนหน่วย
1	1336	1320
2	853	884
3	580	593
4	410	397
5	257	266
6	174	178
7	129	119
8	80	80
9	56	54
10	48	36
11	27	24
12	18	16
13	8	11
14	5	7
15	7	5
ตั้งแต่ 16 รอบขึ้นไป	12	10

การหาเวลาที่ดีที่สุดที่แหล่งให้บริการจะให้แก่หน่วยรับบริการในแต่ละรอบ ยังคงใช้วิธีการ Fibonacci[23] และปรากฏว่าได้ค่า Q ที่ดีที่สุดอยู่ระหว่าง 0.31818 และ 0.32727 เมื่อกำหนดให้ Q มีค่าเท่ากับ 0.32727 ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยมีค่าเท่ากับ 1.1636 วินาที โดยมีค่าแปรปรวนเท่ากับ 3.6419 พิสัยความเชื่อมั่น 99% ในกรณีนี้คือ (1.0859, 1.2413) และเมื่อกำหนดให้ Q มีค่าเท่ากับ 0.31818 ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยมีค่าเท่ากับ 1.2270 วินาที โดยค่าแปรปรวนมีค่าเท่ากับ 3.7662 และพิสัยความเชื่อมั่น 99% เท่ากับ (1.1477, 1.3063)

การหาเวลาที่ดีที่สุดที่แหล่งให้บริการจะให้แก่หน่วยรับบริการในแต่ละรอบสำหรับกรณีเวลาสับเปลี่ยนไม่เท่ากับศูนย์และให้มีหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยนได้แสดงไว้ในรูป 35 โดยแสดงช่วงของความเชื่อมั่น 99% ของเวลารอคอยที่ค่า Q ต่าง ๆ ซึ่งหาจากวิธีการ Fibonacci และได้แสดงผลการจำลองไว้ในตาราง 5.12 ถึง 5.20 นอกจากนี้ยังได้แสดงเวลารอคอยซึ่งกำหนดเวลาในการให้บริการในแต่ละรอบต่าง ๆ กัน สำหรับกรณีที่ไม่ให้มีหน่วยรับบริการใหม่เกิดขึ้นในระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยน และในกรณีที่เวลาสับเปลี่ยนเท่ากับศูนย์ไว้ในรูปที่ 35 ด้วย เพื่อสะดวกต่อการเปรียบเทียบค่าต่ำสุดของเวลารอคอย

---

[23] ดูการหาค่า Q^* ที่ภาคผนวก ค-2.



รูปที่ 35 แสดงเวลารอคอยซึ่งกำหนดค่าคงที่ในการให้บริการต่าง ๆ กัน ให้ $\rho = .5$ $\lambda = 1$ หน่วยต่อวินาที, $\mu = 2$ หน่วยต่อวินาที โค้งแสดงทั้ง 3 กรณีคือ

(1) เวลาสับเปลี่ยน = 0

(2) เวลาสับเปลี่ยน $\neq 0$ โดยให้ค่าเฉลี่ยของเวลาสับเปลี่ยน 0.02333 วินาที

(2.1) ไม่ให้มีหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยน

(2.2) ให้มีหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยน

ตารางที่ 5.12 แสดงค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยของหน่วยที่ต้องการรับบริการเป็นจำนวนรอบต่าง ๆ กัน โดยจำนวนหน่วยที่ออกจากแหล่งให้บริการเท่ากับ 4000 หน่วย λ = 1 หน่วยต่อวินาที, μ = 2 หน่วยต่อวินาที, σ = 0.29091 วินาที ค่าเฉลี่ยของเวลาสับเปลี่ยน = .02333 วินาที โดยให้หน่วยที่เข้ารับบริการใหม่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยนด้วย

จำนวนรอบที่ต้องการเข้ารับบริการ	จำนวนหน่วย	ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอย	ค่าความแปรปรวน
1	1755	0.4122	0.3475
2	974	1.0192	1.2492
3	547	1.7235	2.9384
4	298	2.3094	4.1274
5	185	2.7238	7.8681
6	100	3.6384	8.2350
7	63	5.1628	18.5522
8	33	3.6544	8.2620
9	18	4.3788	11.1872
10	10	9.4219	39.4110
11	8	11.0564	65.0174
12	1	12.9344	-
13	4	5.6163	22.5127
14	1	5.4251	-
15	3	13.4795	52.3446

ตารางที่ 5.13 แสดงค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยของหน่วยที่ต้องการรับบริการเป็นจำนวนรอบต่าง ๆ กัน โดยจำนวนหน่วยที่ออกจากแหล่งให้บริการเท่ากับ 4000 หน่วย λ = 1 หน่วยต่อวินาที, μ = 2 หน่วยต่อวินาที, σ = 0.40999 วินาที, ค่าเฉลี่ยของเวลาสับเปลี่ยน = .02333 วินาที โดยให้หน่วยที่เข้ารับบริการใหม่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยนด้วย

จำนวนรอบที่ต้องการเข้ารับบริการ	จำนวนหน่วย	ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอย	ค่าความแปรปรวน
1	2236.	0.6723	0.7546
2	943	1.6275	2.8985
3	417	2.7314	5.9989
4	220	3.7159	10.1767
5	106	5.7930	21.8777
6	39	4.4807	10.1469
7	18	6.1472	16.0890
8	12	13.0912	106.0322
9	3	7.4667	15.4467
10	2	3.2996	0.8616
11	4	13.8517	87.1041

ตารางที่ 5.14 แสดงค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยของหน่วยที่ต้องการรับบริการเป็นจำนวนรอบต่าง ๆ กัน โดยจำนวนหน่วยที่ออกจากแหล่งให้บริการเท่ากับ 4000 หน่วย λ = 1 หน่วยต่อวินาที, μ = 2 หน่วยต่อวินาที; Q = 0.21818 วินาที, ค่าเฉลี่ยของเวลาสับเปลี่ยน = 0.02333 วินาที, โดยให้หน่วยที่เข้ารับบริการใหม่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยนด้วย

จำนวนรอบที่ต้องการเข้ารับบริการ	จำนวนหน่วย	ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอย	ค่าความแปรปรวน
1	1425	0.3814	0.3120
2	890	0.8979	1.0957
3	592	1.4858	2.7602
4	380	1.8729	3.5205
5	245	2.8679	9.3976
6	157	3.0622	8.9182
7	105	3.3524	12.4130
8	69	4.9170	14.1785
9	45	6.1967	28.0298
10	34	4.9089	19.6542
11	18	6.7132	54.4687
12	12	6.2721	16.9095
13	6	7.4046	15.1828
14	7	6.7777	27.5066
15	8	11.7604	103.7938
16	-	-	-
17	3	10.3558	41.9458
18	2	2.9589	37.0419
19	-	-	-
20	1	12.8712	-
21	-	-	-
22	1	14.8245	-

ตารางที่ 5.15 แสดงค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยของหน่วยที่ต้องการรับบริการเป็นจำนวนรอบต่าง ๆ กัน โดยจำนวนหน่วยที่ออกจากแหล่งให้บริการเท่ากับ 4000 หน่วย, λ = 1 หน่วยต่อวินาที, μ = 2 หน่วยต่อวินาที, Q = 0.33636 วินาที ค่าเฉลี่ยของเวลาสับเปลี่ยน = 0.02333 วินาที โดยให้หน่วยที่เข้ารับบริการใหม่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยนด้วย

จำนวนรอบที่ต้องการเข้ารับบริการ	จำนวนหน่วย	ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอย	ค่าความแปรปรวน
1	1968	0.4637	0.4126
2	994	1.1269	1.4877
3	488	1.8606	3.0766
4	246	2.7489	6.2381
5	148	3.0628	6.8104
6	75	4.6835	11.9928
7	39	3.9965	10.8581
8	17	4.9902	13.0231
9	10	5.9282	8.3042
10	7	12.0735	5.2171
11	3	5.2297	10.0032
12	2	4.3936	3.2543
13	3	14.8147	127.1004

ตารางที่ 5.16 แสดงค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยของหน่วยที่ต้องการรับบริการ เป็นจำนวนรอบต่าง ๆ กัน โดยจำนวนหน่วยที่ออกจากแหล่งให้บริการเท่ากับ 4000 หน่วย λ = 1 หน่วยต่อวินาที , μ = 2 หน่วยต่อวินาที, Q = 0.36364 วินาที ค่าเฉลี่ยของเวลาสับเปลี่ยน = .02333 วินาที โดยให้หน่วยที่เข้ารับบริการใหม่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยนด้วย

จำนวนรอบที่ต้องการเข้ารับบริการ	จำนวนหน่วย	ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอย	ค่าความแปรปรวน
1	2092	0.5322	0.4835
2	966	1.3223	1.8823
3	454	2.1332	4.0394
4	244	3.0327	7.7754
5	118	3.8731	9.5703
6	64	5.3288	13.6455
7	28	4.9768	12.9978
8	15	5.4302	14.9803
9	10	12.6953	59.4208
10	3	6.1313	1.7959
11	2	3.8821	3.8242
12	3	15.3419	95.8549
13	1	11.8474	-

ตารางที่ 5.17 แสดงค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยของหน่วยที่ต้องการเข้ารับบริการเป็นจำนวนรอบต่าง ๆ กัน โดยจำนวนหน่วยที่ออกจากแหล่งให้บริการเท่ากับ 4000 หน่วย λ = 1 หน่วยต่อวินาที, μ = 2 หน่วยต่อวินาที, Q = 0.31818 วินาที ค่าเฉลี่ยของเวลาสับเปลี่ยน = 0.02333 วินาที โดยให้หน่วยที่เข้ารับบริการใหม่เข้าสู่ระบบใน ในช่วงเวลาสับเปลี่ยนด้วย

จำนวนรอบที่ต้องการเข้ารับบริการ	จำนวนหน่วย	ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอย	ค่าความแปรปรวน
1	1872	0.4436	0.3872
2	997	1.0650	1.2806
3	530	1.8289	3.1888
4	245	2.6186	5.9099
5	167	2.5677	6.3338
6	82	4.3740	7.7025
7	46	4.6820	19.4301
8	27	3.6941	10.3430
9	13	6.9010	21.4331
10	10	11.1587	72.8467
11	2	8.7101	104.0269
12	5	5.3023	3.1408
13	-	-	-
14	4	14.2616	72.2377

ตารางที่ 5.18 แสดงค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยของหน่วยที่ต้องการรับบริการ เป็นจำนวนรอบต่าง ๆ กัน โดยจำนวนหน่วยที่ออกจากแหล่งให้บริการเท่ากับ 4000 หน่วย λ = 1 หน่วยต่อวินาที, μ = 2 หน่วยต่อวินาที, Q = 0.34546 วินาที ค่าเฉลี่ยของเวลาสับเปลี่ยน = 0.02333 วินาที โดยให้หน่วยที่เข้ารับบริการใหม่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยนด้วย

จำนวนรอบที่ต้องการเข้ารับบริการ	จำนวนหน่วย	ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอย	ค่าความแปรปรวน
1	2007	0.5052	0.4934
2	980	1.2155	1.7181
3	480	2.0274	3.6392
4	245	2.8531	7.5662
5	144	3.4217	9.2305
6	70	5.6366	17.8246
7	35	4.1681	13.0457
8	15	5.8003	16.3530
9	11	7.8245	17.2763
10	4	12.8655	57.2249
11	5	5.5798	6.1156
12	-	-	-
13	4	16.2166	153.8143

ตารางที่ 5.19 แสดงค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยของหน่วยที่ต้องการรับบริการเป็นจำนวนรอบต่าง ๆ กัน โดยจำนวนหน่วยที่ออกจากแหล่งให้บริการเท่ากับ 4000 หน่วย λ = 1 หน่วยต่อวินาที, μ = 2 หน่วยต่อวินาที, Q = 0.32727 วินาที ค่าเฉลี่ยของเวลาสับเปลี่ยน = .02333 วินาที โดยให้หน่วยที่เข้ารับบริการใหม่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยนด้วย

จำนวนรอบที่ต้องการเข้ารับบริการ	จำนวนหน่วย	ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอย	ค่าความแปรปรวน
1	1905	0.4316	0.4013
2	1012	1.0707	1.5138
3	508	1.6591	2.8459
4	244	2.4389	5.7490
5	152	2.7684	6.9637
6	85	4.7626	15.4063
7	45	3.8009	14.1493
8	20	3.0692	7.0779
9	13	6.9225	13.8651
10	8	12.0925	66.5739
11	3	4.4770	5.3709
12	2	4.3123	3.0519
13	2	8.0991	16.0726
14	1	27.7092	-

ตารางที่ 5.20 แสดงค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยของหน่วยที่ต้องการรับบริการเป็นจำนวนรอบต่าง ๆ กัน โดยจำนวนหน่วยที่ออกจากแหล่งให้บริการเท่ากับ 4000 หน่วย, λ = 1 หน่วยต่อวินาที, μ = 2 หน่วยต่อวินาที, Q = 0.32827 วินาที ค่าเฉลี่ยของเวลาสับเปลี่ยน = .02333 วินาที โดยให้หน่วยที่เข้ารับบริการใหม่เข้าสู่ระบบในช่วงเวลาสับเปลี่ยนด้วย

จำนวนรอบที่ต้องการเข้ารับบริการ	จำนวนหน่วย	ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอย	ค่าความแปรปรวน
1	1912	0.4439	0.4186
2	1011	1.0837	1.3884
3	504	1.7458	2.8450
4	245	2.4968	5.8371
5	153	2.9168	7.4009
6	85	4.3023	10.9335
7	42	4.0698	14.9803
8	18	3.4935	7.7233
9	13	7.3238	14.3404
10	8	11.5390	46.8567
11	3	4.4841	3.3159
12	2	4.3126	2.724
13	2	9.6745	4.3742
14	2	23.6419	178.9863

บทที่ 6

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

สรุปผลทั่วไป

การศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้ได้จำแนกออกเป็น 2 ขั้นตอนคือ การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์และการสร้างตัวแบบจำลองเพื่อศึกษาเวลารอคอยของหน่วยรับบริการทั้งในกรณีเวลาสับเปลี่ยนมีค่าเท่ากับศูนย์และมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ การหาเวลาที่ดีที่สุดที่แหล่งให้บริการจะให้แก่หน่วยรับบริการในแต่ละรอบกระทำด้วยวิธีการ Fibonacci คำว่า "ดีที่สุด" ในการศึกษานี้หมายถึงเวลารอคอยโดยเฉลี่ยของหน่วยรับบริการมีค่าน้อยที่สุด

เมื่อกำหนดค่าพารามิเตอร์ของระบบคือค่าเฉลี่ยของจำนวนหน่วยรับบริการเข้าสู่ระบบต่อหน่วยเวลาซึ่งคือ λ และค่าเฉลี่ยของอัตราให้บริการต่อหน่วยเวลาซึ่งคือ μ แล้ว เวลาที่แหล่งให้บริการจะให้แก่หน่วยรับบริการในแต่ละรอบเพื่อให้เวลารอคอยโดยเฉลี่ยมีค่าน้อยที่สุดสำหรับกรณีเวลาสับเปลี่ยนมีค่าเท่ากับศูนย์ และ ρ มีค่าน้อยได้แสดงความสัมพันธ์กับค่า ρ ไว้ แต่ถ้า ρ มีค่ามาก เวลาที่ดีที่สุดที่แหล่งให้บริการจะให้แก่หน่วยรับบริการ เป็นเวลาที่น้อยมากคือ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ซึ่งหมายความว่าหน่วยที่เข้ารับบริการจะอยู่ในแหล่งให้บริการตลอดเวลาและอยู่พร้อมกันหลาย ๆ หน่วย นั่นคือ ระบบแบ่งเวลาในการรับบริการจะกลายเป็นระบบแบ่งแหล่งให้บริการให้แก่หน่วยรับบริการหลาย ๆ หน่วยในขณะเดียวกัน ดังนั้น สำหรับกรณีเวลาสับเปลี่ยนเท่ากับศูนย์ เมื่อ ρ มีค่าน้อยจึงควรใช้วิธีแบ่งเวลาในการให้บริการโดยให้เวลาในการให้บริการในแต่ละรอบเท่ากับเวลาที่ดีที่สุดดังที่ได้แสดงไว้และจะได้ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยต่ำกว่าการให้บริการทีละหน่วย แต่เมื่อ ρ มีค่ามาก ควรที่จะศึกษาวิธีการอื่นต่อไป สำหรับกรณีเวลาสับเปลี่ยนไม่เท่ากับศูนย์เมื่อกำหนดพารามิเตอร์ของระบบคือ λ และ μ แล้ว ก็สามารถใช้ตัวแบบจำลองในการค้นหาเวลาที่แหล่งให้บริการจะให้แก่หน่วยรับบริการในแต่ละรอบเพื่อให้เวลารอคอยโดยเฉลี่ยมีค่าน้อยที่สุดได้ ดังนั้น การกำหนดเวลาที่แหล่งให้บริการจะให้แก่หน่วยรับบริการในแต่ละรอบในลักษณะนี้จึงดีกว่าการกำหนดเวลาโดยไม่มีฐานในการตัดสินใจ

เวลาสับเปลี่ยนจะมีผลโดยตรงที่จะทำให้เวลารอคอยในระบบแบ่งเวลาในการให้บริการมีค่ามากหรือน้อย ถ้าเวลาสับเปลี่ยนมีค่าน้อยค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยก็จะมีค่าไม่มากนัก แต่ถ้าเวลาสับเปลี่ยนมีค่ามากขึ้นค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยก็จะมีค่าสูงขึ้นด้วย ดังนั้น การใช้ระบบแบ่งเวลาในการให้บริการจะใช้ได้ผลดีหรือไม่จึงขึ้นอยู่กับประสิทธิภาพของแหล่งให้บริการในการนำเอาหน่วยรับบริการเข้าออกแหล่งให้บริการ

ข้อเสนอแนะ

การศึกษาในอนาคตเกี่ยวกับระบบเวียนรับส่วนแบ่งในการให้บริการ (round robin model) นี้ ควรจะพยายามสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับเวลาสับเปลี่ยนมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ และยอมให้หน่วยรับบริการเกิดขึ้นในช่วงเวลาสับเปลี่ยนนี้ และควรจะสร้างความสัมพันธ์ระหว่างเวลาที่ดีที่สุดที่แหล่งให้บริการจะให้แก่หน่วยรับบริการกับ ρ ซึ่งจะมีประโยชน์มากในการนำเอาผลการศึกษาไปประยุกต์

ภาคผนวก ก.

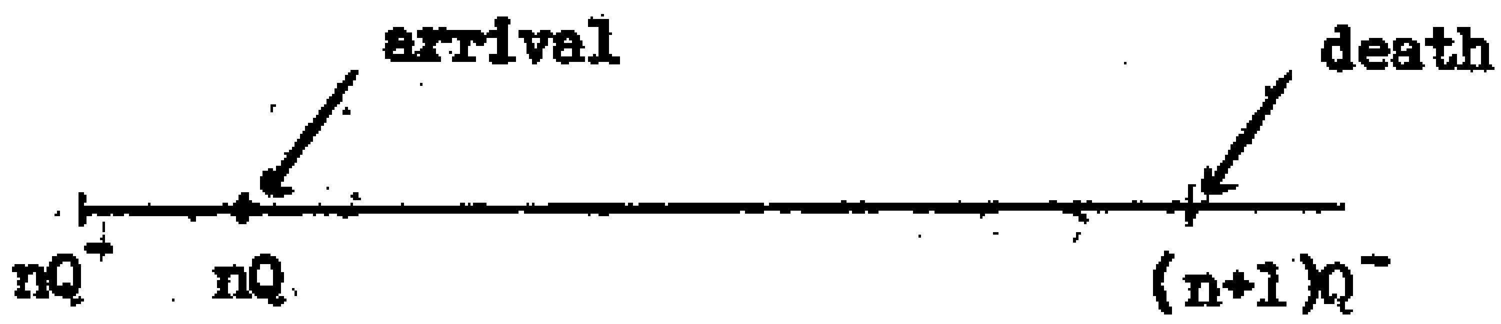
บทพิสูจน์ต่าง ๆ

ภาคผนวก ก-1

บทพิสูจน์ของผลลัพธ์ต่าง ๆ ในระบบ RRLA

ในระบบ RRLA หน่วยรับบริการที่กำลังรับบริการอยู่จะต้องหลุดออกจากแหล่งให้บริการก่อนที่เวลาที่อาจรับหน่วยรับบริการใหม่เข้าสู่ระบบ ที่เป็นเช่นนี้เพราะหน่วยที่กำลังรับบริการอยู่จะต้องกลับเข้าต่อท้ายแถวก่อนที่จะรับหน่วยใหม่เข้ามา เพื่อความสะดวกจึงให้เวลาที่หน่วยรับบริการออกจากแหล่งให้บริการ ณ จุดเวลา nQ^- และจุดเวลาที่จะรับหน่วยรับบริการใหม่คือจุดเวลา nQ

การวิเคราะห์ต่อไปนี้จะเป็นการวิเคราะห์ในลักษณะที่ความน่าจะเป็นต่าง ๆ ไม่มีการเปลี่ยนแปลงไปตามกาลเวลา หรืออีกนัยหนึ่งคือการวิเคราะห์ในสภาวะมั่นคง (Steady state)



รูป ก-1 แสดงการเข้า-ออกของหน่วยที่รับบริการในระบบ RRLA

ที่เวลา $(n+1)Q^-$ เหตุการณ์ที่ไม่มีหน่วยรับบริการอยู่ในระบบเลยจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อ

1. ไม่มีหน่วยรับบริการอยู่ในระบบที่เวลา nQ^- และไม่มีหน่วยใหม่เข้ารับบริการที่เวลา nQ

หรือ

2. ไม่มีหน่วยรับบริการอยู่ในระบบที่เวลา nQ^- และมีหน่วยใหม่เข้ารับบริการที่เวลา nQ และหน่วยนี้หลุดออกไปจากระบบที่เวลา $(n+1)Q^-$

หรือ

3. มีหน่วยรับบริการ 1 หน่วย อยู่ในระบบที่เวลา nQ^- และไม่มีหน่วยใหม่เข้ารับบริการที่เวลา nQ และมี 1 หน่วยหลุดออกไปจากระบบที่เวลา $(n+1)Q^-$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีหน่วยรับบริการอยู่ในระบบเลยเมื่อเวลา $(n+1)Q^-$ คือ $r_o[(n+1)Q^-]$ จึงเขียนได้เป็น

$$r_o[(n+1)Q^-] = r_o[nQ^-](1-\lambda Q) + r_o[nQ^-](\lambda Q)(1-\sigma) + r_1[nQ^-](1-\lambda Q)(1-\sigma) \qquad (\text{ก}-1.1)$$

แต่ความน่าจะเป็น r_o ไม่ขึ้นอยู่กับเวลา สมการ (ก-1.1) จึงกลายเป็น

$$\lambda Q\sigma r_o = (1-\lambda Q)(1-\sigma)r_1$$

หรือ

$$r_1 = \frac{\lambda Q\sigma r_o}{(1-\lambda Q)(1-\sigma)} \qquad (\text{ก}-1.2)$$

แต่จากสมการ (3.4) ปรากฏว่า

$$\rho_R = \frac{\lambda Q}{1-\sigma}$$

เพราะฉะนั้นสมการ (ก-1.2) จึงเขียนได้ดังนี้

$$r_1 = \frac{\rho_R\sigma r_o}{1-\lambda Q} \qquad (\text{ก}-1.3)$$

ให้

$$a = \frac{\rho_R\sigma}{1-\lambda Q} \qquad (\text{ก}-1.4)$$

สมการ (ก-1.3) จึงกลายเป็น

$$r_1 = a\, r_o$$

ที่ขณะเวลา $(n+1)Q^-$ เหตุการณ์ที่จะมีหน่วยรับบริการ 1 หน่วย อยู่ในระบบเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อ

1. ไม่มีหน่วยรับบริการอยู่ในระบบเมื่อเวลา nQ^- และมีหน่วยใหม่เข้ารับบริการที่เวลา nQ และหน่วยนั้นยังต้องการรับบริการอีกเมื่อเวลา $(n+1)Q^-$

หรือ

2. มีหน่วยรับบริการ 1 หน่วยอยู่ในระบบแล้วเมื่อเวลา nQ^- และไม่มีหน่วยใหม่เข้ารับบริการที่เวลา nQ และหน่วยที่กำลังรับบริการอยู่ยังไม่เสร็จจากการรับบริการที่เวลา $(n+1)Q^-$

หรือ

3. มีหน่วยรับบริการ 1 หน่วยอยู่ในระบบเมื่อเวลา nQ^- และมีหน่วยใหม่เข้ารับบริการที่เวลา nQ และหน่วยที่กำลังรับบริการอยู่รับบริการครบตามที่ต้องการที่เวลา $(n+1)Q^-$

หรือ

4. มีหน่วยรับบริการ 2 หน่วยอยู่ในระบบเมื่อเวลา nQ^- และไม่มีหน่วยใหม่เข้ารับบริการที่เวลา nQ และมีหน่วยที่กำลังรับบริการอยู่รับบริการครบตามที่ต้องการที่เวลา $(n+1)Q^-$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะมีหน่วยรับบริการ 1 หน่วยอยู่ในระบบเมื่อเวลา $(n+1)Q^-$ คือ $r_1[(n+1)Q^-]$ ซึ่งเท่ากับ

$$r_1[(n+1)Q^-] = r_o[nQ^-]\lambda Q\delta + r_1[nQ^-](1-\lambda Q)\delta + r_1[nQ^-]\lambda Q(1-\delta) + r_2[nQ^-](1-\lambda Q)(1-\delta) \qquad (ก\text{–}1.6)$$

แต่ความน่าจะเป็นไม่ขึ้นอยู่กับเวลา สมการ (ก–1.6) จึงกลายเป็น

$$((1-\delta)(1-\lambda Q)+\lambda Q\delta)r_1 = (1-\lambda Q)(1-\delta)r_2+\lambda Q\,\delta\, r_o \qquad (ก\text{–}1.7)$$

เอา $(1-\delta)(1-\lambda Q)$ หารสมการ (ก–1.7) โดยตลอด และจากความสัมพันธ์ในสมการ (ก–1.4) จะได้

$$(1+a)r_1 = r_2 + a\,r_o$$

หรือ $$r_2 = (1+a)r_1 - a\,r_o \qquad (ก\text{–}1.8)$$

โดยสมการ (ก–1.5) สมการ (ก–1.8) อาจเขียนได้เป็น

$$r_2 = a\,r_1 = a^2\,r_o \qquad (ก\text{–}1.9)$$

สมมติ $r_k = a\,r_{k-1}$

ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์สมการ (ก–1.8) จะได้ว่า r_{k+1} เท่ากับ

$$r_{k+1} = (1+a)r_k - a\, r_{k-1}$$

และถ้า r_k ที่สมมติไว้เป็นจริงจะได้ว่า

$$r_{k+1} = a\, r_k$$

โดยการเหนี่ยวนำเชิงคณิตศาสตร์จะสรุปได้ว่า

$$r_k = a\, r_{k-1}, \qquad k = 1,2,3,....... \qquad \text{(ก–1.10ก.)}$$

สมมติ $r_k = a^k r_o$

จากสมการ (ก–1.10ก.) จะได้ว่า

$$r_{k+1} = a\, r_k$$

ถ้า r_k ที่สมมติไว้เป็นจริงจะได้ว่า

$$r_{k+1} = a^{k+1} r_o$$

โดยการเหนี่ยวนำเชิงคณิตศาสตร์จะสรุปได้ว่า

$$r_k = a^k r_o, \qquad k = 1,2,3,......... \qquad \text{(ก–1.10ข.)}$$

โดยคุณสมบัติขั้นพื้นฐานของความน่าจะเป็น

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k = 1 \qquad \text{(ก–1.11)}$$

ความน่าจะเป็นที่ไม่มีหน่วยใดอยู่ในระบบเลย, r_o , จึงเขียนได้ดังนี้

$$r_o = 1-a, \qquad a < 1 \qquad \text{(ก–1.12)}$$

และความน่าจะเป็นที่มีหน่วยรับบริการ k หน่วยอยู่ในระบบ จึงเขียนได้โดยสมการ (ก-1.10ข.) และ (ก-1.12) ได้เป็น

$$r_k = (1-a)\, a^k , \qquad k = 0,1,2,\ldots\ldots . \tag{ก-1.13}$$

ดังนั้น โดยเฉลี่ยแล้ว จะมีจำนวนหน่วยรับบริการอยู่ในระบบ, E^{ℓ} , ซึ่งเขียนได้เท่ากับ

$$E^{\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} k\, r_k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\,(1-a)\, a^k$$

$$= (1-a)a \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{d}{da}\, a^k\right]$$

$$= (1-a)\, a \frac{d}{da}\ \frac{1}{1-a}$$

$$= \frac{a}{1-a} \tag{ก-1.14}$$

แทน a ด้วยสมการ (ก-1.4) ในสมการ (ก-1.14) จะได้

$$E^{\ell} = \frac{6\rho_R}{1-\rho_R} \tag{ก-1.15}$$

ให้ D_i เป็นค่าคาดหมายของเวลาตั้งแต่เสร็จจากการรับบริการในรอบที่ i-1 จนกระทั่งเสร็จการรับบริการในรอบที่ i ความหมายของรอบที่ 0 คือเวลาที่หน่วยรับบริการเริ่มเข้าสู่ระบบ ดังนั้น ค่าคาดหมายของเวลาที่หน่วยรับบริการใช้ไปทั้งหมดในระบบเมื่อต้องการเวลาในการรับบริการเท่ากับ nQ หน่วยเวลา จึงเขียนได้เป็น

$$T_n^{\ell} = \sum_{i=1}^{n} D_i \tag{ก-1.16}$$

ให้ N_i^{ℓ} เป็นค่าคาดหมายของจำนวนหน่วยรับบริการซึ่งรอรับบริการอยู่ในระบบตั้งแต่เสร็จจากการรับบริการในรอบที่ i-1 จนกระทั่งเสร็จการรับบริการในรอบที่ i ของหน่วยที่

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง N_i^{ℓ} และ D_i เขียนได้ดังนี้

$$D_i = N_i^{\ell} Q \qquad (ก-1.17)$$

ดังนั้น สมการ (ก-1.16) จึงเป็น

$$T_n^{\ell} = Q \sum_{i=1}^{n} N_i^{\ell} \qquad (ก-1.18)$$

ก่อนที่หน่วยที่พิจารณาจะเข้าสู่ระบบโดยเฉลี่ยแล้วจะมีหน่วยรับบริการอยู่ในระบบอยู่แล้วเท่ากับ E^{ℓ} และในขณะที่หน่วยรับบริการหน่วยใหม่จะเข้าสู่ระบบ แหล่งบริการจะต้องว่างเพราะระบบเป็นแบบ RRLA หน่วยที่กำลังรับบริการจะต้องหลุดออกไปจากแหล่งให้บริการก่อนที่หน่วยใหม่จะเข้ามา ดังนั้น ในรอบที่ 0 จำนวนหน่วยรับบริการที่อยู่ในแถวทั้งหมดรวมทั้งหน่วยที่กำลังพิจารณาอยู่ด้วย จึงเท่ากับ

$$N_1^{\ell} = E^{\ell} + 1 \qquad (ก-1.19)$$

หน่วยรับบริการที่อยู่หน้าหน่วยที่กำลังพิจารณาซึ่งมีอยู่ E^{ℓ} หน่วยในคิว เมื่อรับบริการจากแหล่งให้บริการแล้วจะต้องกลับเข้าไปรับบริการอีก คือต้องต่อท้ายแถวด้วยความน่าจะเป็น δ ดังนั้น N_2^{ℓ} จะเท่ากับ $\delta(N_1^{\ell}-1)$ รวมกับจำนวนหน่วยที่จะเข้ารับบริการใหม่ในช่วงเวลาที่ให้บริการ E^{ℓ} หน่วยอยู่ซึ่งเท่ากับ $\lambda Q(N_1^{\ell}-1)$ และจะต้องรวมกับหน่วยที่กำลังพิจารณาอยู่กลับไปต่อท้ายแถวอีกด้วย ดังนั้น

$$\begin{aligned} N_2^{\ell} &= \delta(N_1^{\ell}-1) + \lambda Q(N_1^{\ell}-1) + 1 \\ &= (\delta + \lambda Q) E^{\ell} + 1 \\ &= \alpha E^{\ell} + 1 \end{aligned} \qquad (ก-1.20)$$

ในการคำนวณ N_3^{ℓ} มี $N_2^{\ell}-1$ หน่วยที่จะกลับเข้าไปต่อท้ายแถวด้วยความน่าจะเป็น δ นั่นคือ N_3^{ℓ} จะเท่ากับ $\delta(N_2^{\ell}-1)$ บวกกับหน่วยที่จะเข้ารับบริการใหม่อีก $\lambda Q(N_2^{\ell}-1)$ หน่วยในช่วงเวลา $Q(N_2^{\ell}-1)$ หน่วยเวลา และหน่วยที่กำลังพิจารณาอีก 1 หน่วย และยังต้องรวมถึงหน่วย

ที่จะเข้าสู่ระบบอีก λQ หน่วย ซึ่งเกิดขึ้นในขณะที่หน่วยที่พิจารณากำลังอยู่ในแหล่งให้บริการในรอบที่ 1 แต่การบวกเข้าไปอีก λQ นี้ไม่ปรากฏในสมการ (ก–1.20) ในการคำนวณค่า N_2^{ℓ} เพราะระบบที่กำลังพิจารณาอยู่เป็นระบบ RRLA และเวลาที่อยู่ในแหล่งบริการในรอบที่ 0 ก็คือเวลาที่เข้าสู่ระบบ จึงไม่มีเทอม λQ อีกหนึ่งเทอมในสมการ (ก–1.20) แต่จะต้องบวก λQ เข้าไปในการคำนวณหา N_i^{ℓ} เมื่อ $i \geqslant 3$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} N_3^{\ell} &= \alpha(N_2^{\ell}-1) + \lambda Q(N_2^{\ell}-1) + 1 + \lambda Q \\ &= \alpha(N_2^{\ell}-1) + 1 + \lambda Q \qquad \text{(ก–1.21)} \\ &= \alpha^2 E^{\ell} + \lambda Q + 1 \end{aligned}$$

สมมติ

$$N_i^{\ell} = \alpha^{i-1} E^{\ell} + \lambda Q \sum_{j=0}^{i-3} \alpha^j + 1 \qquad \text{(ก–1.22)}$$

ในการพิสูจน์ทำนองเดียวกันกับสมการ (ก–1.21) จะได้ว่า N_{i+1}^{ℓ} เท่ากับ

$$N_{i+1}^{\ell} = \alpha(N_i^{\ell}-1) + \lambda Q + 1$$

แต่จากที่สมมติในสมการ (ก–1.22) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} N_{i+1}^{\ell} &= \alpha \left[\alpha^{i-1} E^{\ell} + \lambda Q \sum_{j=0}^{i-3} \alpha^j \right] + \lambda Q + 1 \\ &= \alpha^i E^{\ell} + \lambda Q \sum_{j=0}^{i-3} \alpha^{j+1} + \lambda Q + 1 \\ &= \alpha^i E^{\ell} + \lambda Q \sum_{j=0}^{i-2} \alpha^j + 1 \end{aligned}$$

โดยการเหนี่ยวนำเชิงคณิตศาสตร์จะสรุปได้ว่า

$$N_i^{\ell} = \alpha^{i-1} E^{\ell} + \lambda Q \sum_{j=0}^{i-3} \alpha^j + 1, \quad i = 3,4,5,\ldots,n \qquad \text{(ก–1.23)}$$

ซึ่งเขียนได้เป็น

$$N_i^{\ell} = \alpha^{i-1}E^{\ell} + \lambda Q\frac{1-\alpha^{i-2}}{1-\alpha} + 1 \ , \quad i = 3,4,5,\ldots,n \qquad (\text{ก–1.24})$$

เมื่อพิจารณาสมการ (ก–1.19), (ก–1.20) และ (ก–1.24) แล้ว จึงสรุปได้ว่า

$$N_i^{\ell} = \begin{cases} E^{\ell} + 1 & i = 1 \qquad (\text{ก–1.25ก.}) \\ \alpha^{i-1}E^{\ell} + \lambda Q\dfrac{1-\alpha^{i-2}}{1-\alpha} + 1, & i=2,3,\ldots,n \qquad (\text{ก–1.25ข.}) \end{cases}$$

แทนค่า E^{ℓ} จากสมการ (ก–1.15) ในสมการ (ก–1.25ก.) จะได้

$$\begin{aligned} N_1^{\ell} &= \frac{\rho_R\sigma}{1-\rho_R} + 1 \\ &= \frac{\rho_R\sigma + 1 - \rho_R}{1-\rho_R} \\ &= \frac{1-\rho_R(1-\sigma)}{1-\rho_R} \\ &= \frac{1-\lambda Q}{1-\rho_R} \end{aligned} \qquad (\text{ก–1.26})$$

และแทนค่า E^{ℓ} จากสมการ (ก–1.15) ในสมการ (ก–1.25ข.) จะได้

$$\begin{aligned} N_i^{\ell} &= \alpha^{i-1}\frac{\rho_R\sigma}{1-\rho_R} + \lambda Q\frac{1-\alpha^{i-2}}{1-\alpha} + 1, \quad i = 2,3,\ldots,n \\ &= \alpha\cdot\alpha^{i-2}\frac{\rho_R\sigma}{1-\rho_R} + \frac{\lambda Q}{1-\alpha} - \frac{\lambda Q\alpha^{i-2}}{1-\alpha} + 1 \\ &= \frac{\lambda Q}{1-\alpha} + 1 + \left[\frac{\alpha\rho_R\sigma}{1-\rho_R} - \frac{\lambda Q}{1-\alpha}\right]\alpha^{i-2} \\ &= \frac{\lambda Q+1-\alpha}{1-\alpha} + \left[\frac{(1-\alpha)\alpha\rho_R\sigma - \lambda Q + \rho_R\lambda Q}{(1-\rho_R)(1-\alpha)}\right]\alpha^{i-2} \\ &= \frac{\lambda Q+1-\lambda Q-\sigma}{1-\lambda Q-\sigma} + \left[\frac{(1-\alpha)\alpha\rho_R\sigma - \rho_R(1-\sigma) + \rho_R\lambda Q}{(1-\rho_R)(1-\alpha)}\right]\alpha^{i-2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1-\sigma}{1-\lambda Q-\sigma} + \rho_R \left[\frac{(1-\alpha)\alpha\sigma - 1 + \sigma + \lambda Q}{(1-\rho_R)(1-\alpha)} \right] \alpha^{i-2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1-\lambda Q-\sigma}{1-\sigma}} + \rho_R \left[\frac{(1-\alpha)\alpha\sigma - (1-\alpha)}{(1-\rho_R)(1-\alpha)} \right] \alpha^{i-2}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{\lambda Q}{1-\sigma}} - \rho_R \left[\frac{(1-\alpha)(1-\alpha\sigma)}{(1-\rho_R)(1-\alpha)} \right] \alpha^{i-2}$$

$$= \frac{1}{1-\rho_R} - \rho_R \frac{(1-\alpha\sigma)}{1-\rho_R} \alpha^{i-2}$$

$$i = 2,3,\ldots,n \qquad \text{(ก-1.27)}$$

ดังนั้น จากสมการ (ก-1.26) และสมการ (ก-1.27) จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{n} N_i^1 = \frac{1-\lambda Q}{1-\rho_R} + \sum_{i=2}^{n} \left[\frac{1}{1-\rho_R} - \frac{\rho_R(1-\sigma\alpha)}{1-\rho_R} \alpha^{i-2} \right]$$

$$= \frac{n}{1-\rho_R} - \frac{\lambda Q}{1-\rho_R} - \sum_{i=2}^{n} \frac{\rho_R(1-\sigma\alpha)\alpha^{i-2}}{1-\rho_R}$$

$$= \frac{n}{1-\rho_R} - \frac{\lambda Q}{1-\rho_R} - \frac{\rho_R(1-\sigma\alpha)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\rho_R)(1-\alpha)}$$

$$= \frac{n}{1-\rho_R} - \frac{\lambda Q}{1-\rho_R} - \frac{\rho_R(1-\sigma\alpha)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\rho_R)^2(1-\sigma)}$$

$$= \frac{n}{1-\rho_R} - \frac{\lambda Q}{1-\rho_R} - \frac{\lambda Q(1-\sigma\alpha)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\rho_R)^2(1-\sigma)^2}$$

$$= \frac{n}{1-\rho_R} - \frac{\lambda Q}{1-\rho_R} \left[1 + \frac{(1-\sigma\alpha)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\rho_R)(1-\sigma)^2} \right] \qquad \text{(ก-1.28)}$$

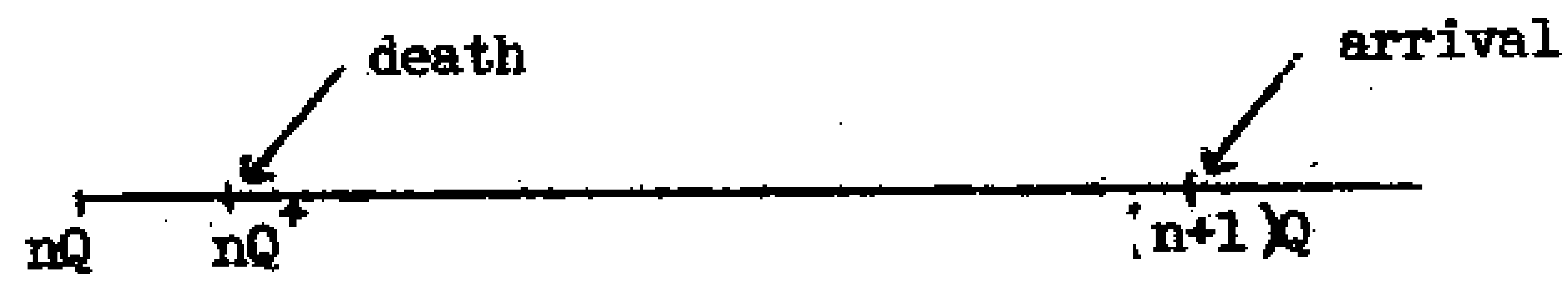
ดังนั้น ค่าคาดหมายของเวลาที่หน่วยรับบริการใช้ไปทั้งหมดในระบบ เมื่อต้องการเวลาในการรับบริการเท่ากับ nQ หน่วยเวลาจากสมการ (ก–1.18) จะเขียนได้เป็น

$$T_n^{\prime} = \frac{nQ}{1-\rho_R} - \frac{\lambda Q^2}{1-\rho_R}\left[1 + \frac{(1-\delta\alpha)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\rho_R)(1-\delta)^2}\right] \qquad (ก–1.29)$$

ภาคผนวก ก-2

บทพิสูจน์ของผลลัพธ์ต่าง ๆ ในระบบ RREA

ในระบบ RREA หน่วยรับบริการที่จะเข้าสู่ระบบ ณ เวลา nQ จะต้องเข้าสู่ระบบก่อนที่หน่วยที่กำลังรับบริการอยู่จะออกจากแหล่งบริการ เพื่อกลับมาต่อท้ายแถวหรือออกไปจากระบบเมื่อบริการที่ต้องการรับได้เสร็จสิ้นสมบูรณ์แล้ว เพราะฉะนั้น เพื่อความสะดวกต่อการเข้าใจ จึงให้หน่วยรับบริการเข้าสู่ระบบ ณ เวลา nQ และหน่วยรับบริการหลุดจากแหล่งบริการ ณ เวลา nQ^+



รูป ก-2.1 แสดงถึงการเข้า-ออกของหน่วยงานในระบบ RREA

ที่เวลา $(n+1)Q$ เหตุการณ์ที่ไม่มีหน่วยรับบริการอยู่ในระบบเลย จะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อ

1. ไม่มีหน่วยรับบริการอยู่ในระบบที่เวลา nQ และไม่มีหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบที่เวลา $(n+1)Q$

หรือ

2. มีหน่วยรับบริการ 1 หน่วยอยู่ในระบบที่เวลา nQ และหน่วยรับบริการหน่วยนี้หลุดออกไปจากระบบที่เวลา nQ^+ และไม่มีหน่วยรับบริการใหม่เข้าสู่ระบบที่เวลา $(n+1)Q$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีหน่วยรับบริการอยู่ในระบบเลยเมื่อเวลา $(n+1)Q$ จึงเขียนได้เป็น

$$r_o\left[(n+1)Q\right] = r_o\left[nQ\right](1-\lambda Q) + r_1\left[nQ\right](1-\delta)(1-\lambda Q) \qquad (ก\text{-}2.1)$$

ในสภาวะมั่นคง (steady state) ความน่าจะเป็นไม่ขึ้นกับเวลา สมการ (ก-2.1) จึงกลายเป็น

$$r_1 = \frac{\lambda Q}{(1-\delta)(1-\lambda Q)} r_o$$

$$= \frac{\rho_R (1-\delta)}{(1-\delta)(1-\lambda Q)} r_o$$

$$= \frac{a}{\delta} r_o \qquad (ก-2.2)$$

ที่เวลา $(n+1)Q$ เหตุการณ์ที่จะมีหน่วยรับบริการ 1 หน่วยอยู่ในระบบจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อ

1. ไม่มีหน่วยรับบริการอยู่ในระบบเมื่อเวลา nQ และมีหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบที่เวลา $(n+1)Q$

2. มีหน่วยรับบริการ 1 หน่วยอยู่ในระบบเมื่อเวลา nQ และหน่วยรับบริการหน่วยนี้ยังไม่เสร็จการรับบริการเมื่อเวลา nQ^+ และไม่มีหน่วยรับบริการหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบที่เวลา $(n+1)Q$

3. มีหน่วยรับบริการ 1 หน่วยอยู่ในระบบเมื่อเวลา nQ และหน่วยรับบริการหน่วยนั้นเสร็จสิ้นการรับบริการแล้วหลุดออกไปจากระบบที่เวลา nQ^+ และมีหน่วยใหม่ 1 หน่วยเข้าสู่ระบบที่เวลา $(n+1)Q$

4. มีหน่วยรับบริการ 2 หน่วยอยู่ในระบบเมื่อเวลา nQ และหน่วยที่อยู่ในแหล่งให้บริการเสร็จสิ้นการรับบริการแล้วหลุดออกไปจากระบบที่เวลา nQ^+ และไม่มีหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบที่เวลา $(n+1)Q$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะมีหน่วยรับบริการ 1 หน่วยอยู่ในระบบเมื่อเวลา $(n+1)Q$ คือ $r_1[(n+1)Q]$ ซึ่งเท่ากับ

$$r_1[(n+1)Q] = r_o[nQ]\,\lambda Q + r_1[nQ]\,\delta(1-\lambda Q) + r_1[nQ](1-\delta)\,\lambda Q$$
$$+ r_2[nQ]\,(1-\delta)(1-\lambda Q) \qquad (ก-2.3)$$

แต่ความน่าจะเป็นไม่ขึ้นอยู่กับเวลา สมการ (ก-2.3) จึงกลายเป็น

$$((1-\delta)(1-\lambda Q)+\lambda Q\delta)r_1 = \lambda Q\, r_o + (1-\delta)(1-\lambda Q)r_2 \qquad (ก-2.4)$$

เอา $(1-\delta)(1-\lambda Q)$ หารสมการ (ก–2.4) ตลอด และด้วยความสัมพันธ์ (ก–1.4) จะได้ว่า

$$r_2 = (1+a)r_1 - \frac{a\,r_o}{\delta} \qquad (ก–2.5)$$

ให้ความสัมพันธ์ (ก–2.2) สมการ (ก–2.5) เขียนได้เป็น

$$r_2 = a\,r_1 \qquad (ก–2.6)$$

$$= \frac{a^2\,r_o}{\delta} \qquad (ก–2.7)$$

ที่เวลา $(n+1)Q$ เหตุการณ์ที่จะมีหน่วยรับบริการ 2 หน่วยอยู่ในระบบจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อ

1. มีหน่วยรับบริการ 1 หน่วยอยู่ในระบบเมื่อเวลา nQ และหน่วยรับบริการหน่วยนั้นยังไม่เสร็จสิ้นการรับบริการเมื่อเวลา nQ^+ และมีหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบที่เวลา $(n+1)Q$

2. มีหน่วยรับบริการ 2 หน่วยอยู่ในระบบเมื่อเวลา nQ และหน่วยที่อยู่ในแหล่งให้บริการยังไม่เสร็จการรับบริการเมื่อเวลา nQ^+ และไม่มีหน่วยรับบริการใหม่เข้าสู่ระบบที่เวลา $(n+1)Q$

3. มีหน่วยรับบริการ 2 หน่วยอยู่ในระบบเมื่อเวลา nQ และหน่วยที่อยู่ในแหล่งให้บริการเสร็จการรับบริการแล้วหลุดไปจากระบบที่เวลา nQ^+ และมีหน่วยรับบริการใหม่ 1 หน่วยเข้าสู่ระบบที่เวลา $(n+1)Q$

4. มีหน่วยรับบริการ 3 หน่วยอยู่ในระบบเมื่อเวลา nQ และหน่วยที่อยู่ในแหล่งให้บริการเสร็จการรับบริการแล้วหลุดไปจากระบบที่เวลา nQ และไม่มีหน่วยใหม่เข้าสู่ระบบที่เวลา $(n+1)Q$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะมีหน่วยรับบริการ 2 หน่วยอยู่ในระบบเมื่อเวลา $(n+1)Q$ คือ $r_2\left[(n+1)Q\right]$ ซึ่งเท่ากับ

$$r_2\left[(n+1)Q\right] = r_1\left[nQ\right]\delta\lambda Q + r_2\left[nQ\right]\delta(1-\lambda Q) + r_2\left[nQ\right](1-\delta)\lambda Q + r_3\left[nQ\right](1-\delta)(1-\lambda Q) \qquad (ก–2.8)$$

แต่ความน่าจะเป็นไม่ขึ้นอยู่กับเวลา และให้ความสัมพันธ์ (ก–1.4) สมการ (ก–2.8) จะเขียนได้เป็น

$$r_3 = (1+a)\, r_2 - a\, r_1 \qquad \text{(ก–2.9)}$$

จากความสัมพันธ์ในสมการ (ก–2.6) จะได้

$$r_3 = a\, r_2 \qquad \text{(ก–2.10)}$$

และจากความสัมพันธ์ในสมการ (ก–2.7) จะได้

$$r_3 = \frac{a^3\, r_o}{\delta} \qquad \text{(ก–2.11)}$$

สมมติ $r_k = ar_{k-1}$

พิสูจน์จาก r_{k+1} ทำนองเดียวกับสมการ (ก–2.9) จะได้ว่า

$$r_{k+1} = (1+a)r_k - ar_{k-1}$$

จากที่สมมติไว้ จะได้ว่า

$$r_{k+1} = ar_k$$

นั่นคือ โดยการเหนี่ยวนำเชิงคณิตศาสตร์จะสรุปได้ว่า

$$r_k = ar_{k-1} \quad , \quad k = 2,3,\ldots\ldots \qquad \text{(ก–2.12)}$$

สมมติ $r_k = \dfrac{a^k\, r_o}{\delta}$

จากสมการ (ก–2.12) จะได้ว่า

$$r_{k+1} = a\, r_k$$

และจากที่สมมติไว้จะได้ว่า

$$r_{k+1} = \frac{a^{k+1}\, r_o}{\delta}$$

นั่นคือ โดยการเหนี่ยวนำเชิงคณิตศาสตร์จะสรุปได้ว่า

$$r_k = \frac{a^k}{\sigma} r_o , \qquad k = 2,3,\ldots\ldots \qquad (\text{ก}-2.13)$$

จากสมการ (ก-2.2) และ (ก-2.13) จะสรุปได้ว่า

$$r_k = \frac{a^k r_o}{\sigma} , \qquad k = 1,2,3,\ldots\ldots \qquad (\text{ก}-2.14)$$

โดยคุณสมบัติขั้นพื้นฐานของความน่าจะเป็น

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k = 1$$

ความน่าจะเป็นที่ไม่มีหน่วยใดอยู่ในระบบเลย, r_o , จึงเขียนได้เป็น

$$r_o = \frac{\sigma(1-a)}{a+\sigma-a\sigma}$$

จากความสัมพันธ์ในสมการ (3.4) และ สมการ (ก-1.4) จะได้ว่า

$$r_o = 1 - \rho_R \qquad (\text{ก}-2.15)$$

ดังนั้น จากสมการ (ก-2.14) และ (ก-2.15) จะได้ว่า

$$r_k = \frac{(1-\rho_R)}{\sigma} a^k \qquad k = 1,2,\ldots,n \qquad (\text{ก}-2.16)$$

ดังนั้น โดยเฉลี่ยแล้วจะมีหน่วยรับบริการอยู่ในระบบ, E^e , ซึ่งเขียนได้เท่ากับ

$$\begin{aligned} E^e &= \sum_{k=0}^{\infty} k\, r_k \\ &= \frac{(1-\rho_R)}{\sigma} a \sum_{k=0}^{\infty} k\, a^{k-1} \\ &= \frac{(1-\rho_R)}{\sigma} a \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{d}{da} a^k \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{(1-\rho_R)}{\delta} \; a \; \frac{d}{da} \left[\frac{1}{1-a} \right]$$

$$= \frac{(1-\rho_R)}{\delta(1-a)^2} \; a \qquad (ก-2.17)$$

แทน a ด้วยสมการ (ก-1.4) ในสมการ (ก-2.17) จะได้ว่า

$$E^e = \frac{\rho_R}{1-\rho_R}(1-\lambda Q) \qquad (ก-2.18)$$

ให้ T_n^e, D_i, N_i^e มีความหมายทำนองเดียวกันกับ T_n^l, D_i และ N_i^l ในการพิสูจน์ระบบ RRLA ดังนั้น

$$T_n^e = Q \sum_{i=1}^{n} N_i^e \qquad (ก-2.19)$$

ก่อนที่หน่วยพิจารณาจะเข้าสู่ระบบโดยเฉลี่ยแล้วจะมี E^e หน่วยอยู่ในระบบอยู่ก่อนแล้ว เนื่องจากระบบเป็น RREA ถ้าระบบไม่ว่างก็จะต้องมีหน่วยรับบริการอยู่ในแหล่งให้บริการ ซึ่งค่าคาดหมายของหน่วยที่จะอยู่ในแหล่งให้บริการเท่ากับ ρ_R หน่วย และ ρ_R หน่วยนี้จะหลุดออกจากระบบทันทีที่เริ่มให้บริการ ดังนั้น จำนวนหน่วยที่จะเข้าสู่แหล่งให้บริการตั้งแต่หน่วยที่พิจารณาเข้าสู่ระบบ จนกระทั่งหน่วยที่พิจารณานี้ได้รับบริการในรอบที่ 1 จึงเท่ากับ

$$N_1^e = E^e - \rho_R + 1 \qquad (ก-2.20)$$

ρ_R หน่วยที่หลุดออกจากแหล่งให้บริการในทันทีที่เริ่มพิจารณาจะกลับเข้าต่อท้ายแถวด้วยความน่าจะเป็น δ ดังนั้น ก่อนที่หน่วยพิจารณาจะกลับต่อท้ายแถวเพื่อรับบริการในรอบที่ 2 ก็จะมีหน่วยรับบริการซึ่งอยู่ในระบบอยู่ก่อนแล้ว $\rho_R\delta$ หน่วย รวมกับหน่วยที่จะต้องกลับมาต่อท้ายแถวอีก $\delta(N_1^e -1)$ หน่วย และหน่วยใหม่ที่จะเข้ารับบริการในขณะที่ N_1^e หน่วยกำลังรับบริการอยู่ ซึ่งเท่ากับ $\lambda Q N_1^e$ หน่วย ดังนั้น จำนวนหน่วยที่จะเข้าสู่แหล่งให้บริการตั้งแต่หน่วยที่พิจารณารับบริการในรอบที่ 1 แล้ว จนกระทั่งหน่วยที่พิจารณานี้ได้รับบริการในรอบที่ 2 จึงเท่ากับ

$$N_2^e = \lambda Q N_1^e + \sigma(N_1^e-1) + \sigma\rho_R + 1 \qquad \text{(ก-2.21)}$$

ในการคำนวณ N_3^e ก็พิจารณาทำนองเดียวกันกับ N_2^e แต่จะตัดเทอม $\sigma\rho_R$ ออก เพราะคิดรวมอยู่ใน $\sigma(N_2^e-1)$ หน่วยอยู่แล้ว ดังนั้น

$$N_3^e = \lambda Q N_2^e + \sigma(N_2^e-1) + 1 \qquad \text{(ก-2.22)}$$

สมมติ

$$N_i^e = \alpha^{i-1} E^e + \alpha^{i-2}\lambda Q(1-\rho_R) + \lambda Q \sum_{j=0}^{i-3} {}^{j} + 1 \qquad \text{(ก-2.23)}$$

N_{i+1}^e จะหาได้ในทำนองเดียวกันกับการหา N_3^e ในสมการ (ก-2.22) ดังนั้น

$$\begin{aligned} N_{i+1}^e &= \lambda Q N_i^e + \sigma(N_i^e-1) + 1 \\ &= \alpha N_i^e + 1 - \sigma \end{aligned}$$

ถ้าที่สมมติไว้ในสมการ (ก-2.23) เป็นจริง จะได้ว่า

$$\begin{aligned} N_{i+1}^e &= \alpha\left[\alpha^{i-1} E^e + \alpha^{i-2}\lambda Q(1-\rho_R) + \lambda Q \sum_{j=0}^{i-3} \alpha^j + 1\right] + 1 - \sigma \\ &= \alpha^i E^e + \alpha^{i-1}\lambda Q(1-\rho_R) + \lambda Q \sum_{j=1}^{i-2} \alpha^j + \alpha + 1 - \sigma \\ &= \alpha^i E^e + \alpha^{i-1}\lambda Q(1-\rho_R) + \lambda Q \sum_{j=1}^{i-2} \alpha^j + \lambda Q + \sigma + 1 - \sigma \\ &= \alpha^i E^e + \alpha^{i-1}\lambda Q(1-\rho_R) + \lambda Q \sum_{j=0}^{i-2} \alpha^j + 1 \qquad \text{(ก-2.24)} \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยการเหนี่ยวนำเชิงคณิตศาสตร์จะสรุปได้ว่า

$$N_i^2 = \alpha^{i-1} E^e + \alpha^{i-2}\lambda Q(1-\rho_R) + \lambda Q \sum_{j=0}^{i-3} \alpha^j + 1, \quad i=3,4,\ldots,n$$

(ก-2.25)

เมื่อพิจารณาสมการ (ก-2.20), (ก-2.21) และ (ก-2.25) แล้ว จึงสรุปได้ว่า

$$N_i^e = \begin{cases} E^e + 1 - \rho_R , & i = 1 \qquad (ก\text{-}2.26ก) \\ \alpha^{i-1}E^e + \alpha^{i-2}\lambda Q(1-\rho_R) + \lambda Q \sum_{j=0}^{i-3} \alpha^j + 1 & i=2,3,\ldots n \qquad (ก\text{-}2.26ข) \end{cases}$$

แทนความสัมพันธ์ E^e จากสมการ (ก-2.18) ในสมการ (ก-2.26 ก) จะได้

$$N_1^e = \frac{\rho_R}{1-\rho_R}(1-\lambda Q) + 1 - \rho_R \qquad (ก\text{-}2.27)$$

และแทน E^e จากสมการ (ก-2.18) ในสมการ (ก-2.26 ข) จะได้

$$N_i = \alpha^{i-1}\frac{\rho_R}{1-\rho_R}(1-\lambda Q) + \alpha^{i-2}\lambda Q(1-\rho_R) + \lambda Q\sum_{j=0}^{i-3}\alpha^j + 1$$

$$= \alpha^{i-1}\frac{\rho_R}{1-\rho_R}(1-\lambda Q) + \alpha^{i-2}\lambda Q(1-\rho_R) + \lambda Q\frac{1-\alpha^{i-2}}{1-\alpha} + 1$$

$$= \left[\frac{\alpha\rho_R}{1-\rho_R}(1-\lambda Q) + \lambda Q(1-\rho_R) - \frac{\lambda Q}{1-\alpha}\right]\alpha^{i-2} + 1 + \frac{\lambda Q}{1-\alpha}$$

$$= \left[\frac{\alpha\rho_R(1-\lambda Q)(1-\alpha) + \lambda Q(1-\rho_R)^2(1-\alpha) - \lambda Q(1-\rho_R)}{(1-\rho_R)(1-\alpha)}\right]\alpha^{i-2}$$

$$+ \frac{1-\lambda Q-\delta+\lambda Q}{1-\alpha}$$

$$= \frac{(1-\alpha)\left[\alpha\rho_R(1-\lambda Q) + \lambda Q(1-\rho_R)^2 - \rho_R\right]}{(1-\rho_R)(1-\alpha)}\alpha^{i-2} + \frac{1-\delta}{1-\lambda Q-\delta}$$

$$= \frac{\left[\alpha\rho_R(1-\rho_R(1-\delta)) - \rho_R(1-\delta)(1-\rho_R)^2 - \rho_R\right]}{1-\rho_R}\alpha^{i-2} + \frac{1}{\frac{1-\lambda Q-\delta}{1-\delta}}$$

$$= \left[\frac{\alpha\rho_R(1-\rho_R+\rho_R\delta) + \rho_R(1-2\rho_R-\rho_R^2-\delta+2\rho_R\delta+\rho_R^2\delta) - \rho_R}{1-\rho_R}\right]\alpha^{i-2}$$

$$+ \frac{1}{1-\rho_R}$$

$$= \left[\frac{\sigma\rho_R+(1-\sigma)\rho_R^2-\alpha\rho_R^2\ \rho_R^2\alpha\sigma+\rho_R-2\rho_R^2+\rho_R^3-\rho_R\sigma+2\rho_R^2\sigma-\rho_R^3\sigma-\rho_R}{1-\rho_R}\right]\alpha^{i-}$$

$$+\frac{1}{1-\rho_R}$$

$$= \frac{\rho_R^2\ \left[(1-\sigma)-\alpha+\alpha\sigma-2+\rho_R+2\sigma-\rho_R\sigma\right]}{1-\rho_R}\ \alpha^{i-2}+\frac{1}{1-\rho_R}$$

$$= \frac{\rho_R^2\ \left[(1-\sigma)-\alpha(1-\sigma)-2(1-\sigma)+\rho_R(1-\sigma)\right]}{1-\rho_R}\ \alpha^{i-2}+\frac{1}{1-\rho_R}$$

$$= \rho_R^2\ \left[(1-\sigma)(1-\alpha-2+\frac{\lambda Q}{1-\sigma})\right]\frac{\alpha^{i-2}}{1-\rho_R}+\frac{1}{1-\rho_R}$$

$$= \rho_R^2\ \left[\frac{(1-\sigma)(\lambda Q-1+\sigma-\alpha+\alpha\sigma)}{(1-\rho_R)(1-\sigma)}\right]\alpha^{i-2}+\frac{1}{1-\rho_R}$$

$$= \frac{1}{1-\rho_R}-\frac{\rho_R^2(1-\alpha\sigma)}{1-\rho_R}\ \alpha^{i-2} \qquad (ก–2.28)$$

ดังนั้นจากสมการ (ก–2.27) และ (ก–2.28) จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{n} N_i^e = \left[\frac{\rho_R}{1-\rho_R}(1-\lambda Q)+1-\rho_R+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{1-\rho_R}-\frac{\rho_R^2(1-\sigma\alpha)\alpha^{i-2}}{1-\rho_R}\right]\right]$$

$$= \left[\frac{\rho_R}{1-\rho_R}(1-\lambda Q)-\rho+1+\frac{n-1}{1-\rho_R}-\frac{\rho_R^2(1-\alpha\sigma)}{1-\rho_R}\ \sum_{i=2}^{n}\ \alpha^{i-2}\right]$$

$$= \left[\frac{\rho_R}{1-\rho_R}(1-\lambda Q)-\rho_R+1+\frac{n-1}{1-\rho_R}-\rho_R^2\ \frac{(1-\alpha\sigma)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\rho)(1-\alpha)}\right]$$

$$= \frac{1}{1-\rho_R} - \frac{\rho_R \lambda Q}{1-\rho_R} - \rho_R + \frac{n-1}{1-\rho_R} - \frac{\rho_R^2 (1-\alpha\sigma)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\rho_R)(1-\alpha)}$$

$$= \frac{n}{1-\rho_R} - \rho_R - \frac{\rho_R \lambda Q}{1-\rho_R} - \frac{\rho_R \lambda Q(1-\alpha\sigma)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\rho_R)^2(1-\sigma)^2}$$

$$= \frac{n}{1-\rho_R} - \rho_R - \frac{\rho_R \lambda Q}{1-\rho_R}\left[1 + \frac{(1-\alpha\sigma)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\rho_R)(1-\sigma)^2}\right] \quad \text{(ก-2.29)}$$

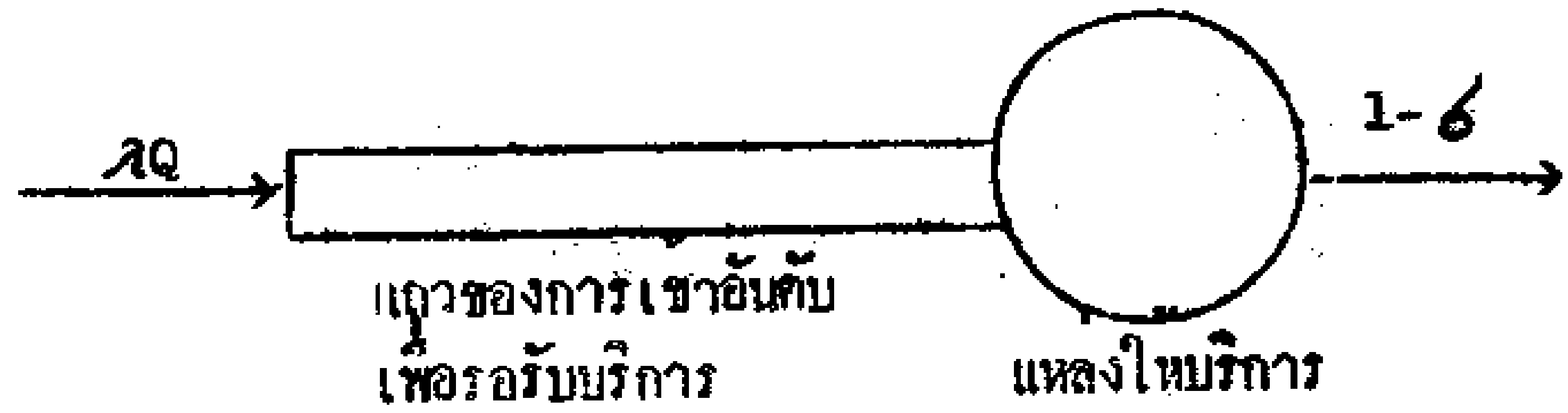
ดังนั้น ค่าคาดหมายของเวลาที่หน่วยรับบริการใช้ไปทั้งหมดในระบบเมื่อต้องการเวลาในการรับบริการเท่ากับ nQ หน่วยเวลา จากสมการ (ก-2.19) จะเขียนได้เป็น

$$T_n^e = \frac{nQ}{1-\rho_R} - \rho_R Q - \frac{\rho_R \lambda Q^2}{1-\rho_R}\left[1 + \frac{(1-\alpha\sigma)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\rho_R)(1-\sigma)^2}\right] \quad \text{(ก-2.30)}$$

ภาคผนวก ก-3

บทพิสูจน์ของผลลัพธ์ในระบบ FCFS

ในระบบ FCFS นี้ หน่วยใดมาก่อนจะได้รับบริการจากแหล่งให้บริการก่อนจนแล้วเสร็จ แล้วหน่วยต่อไปจึงเข้ารับบริการต่อไปได้



รูป ก-3.1 แสดงถึงระบบการรอคอยแบบ FCFS

หน่วยรับบริการจะเข้าหรือออกจากระบบได้ทุก ๆ เวลา Q หน่วยเวลา และความน่าจะเป็นที่จะมีหน่วยรับบริการหนึ่งหน่วยเข้ามาสู่ระบบเมื่อหมดเวลา Q หน่วยเวลาเท่ากับ λQ และเวลาที่หน่วยรับบริการต้องการบริการมีการแจกแจงแบบ geometric ตามสมการ (3.1) Saaty[1] ได้พิสูจน์เวลารอคอยในคิวในระบบ FCFS ที่การเข้าสู่ระบบของหน่วยรับบริการมีการกระจายแบบ binomial และเวลาที่ใช้ในการบริการมีการกระจายใด ๆ มีค่าเท่ากับ

$$W = \frac{\lambda Q^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)S_n}{2(1-\rho_R)} \qquad (ก\text{-}3.1)$$

โดย S_n คือการแจกแจงของจำนวนเท่าของ Q ที่หน่วยรับบริการต้องการตามสมการ (3.1) ดังนั้น

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)S_n = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(1-\sigma)\sigma^{n-1}$$

[1] Saaty ; "Elements of Queueing Theory, P.181.

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(1-\sigma)\sigma^{n-1}$$

$$= (1-\sigma) \sum_{n=2}^{\infty} (n^2-n)\,\sigma^{n-1}$$

$$= (1-\sigma) \sum_{n=2}^{\infty} n^2\sigma^{n-1} - n\sigma^{n-1}$$

$$= (1-\sigma)\left[\frac{4\sigma-3\sigma^2+\sigma^3}{(1-\sigma)^3} - \frac{2\sigma-\sigma^2}{(1-\sigma)^2}\right]$$

$$= \frac{2\sigma}{(1-\sigma)^2} \qquad \text{(ก-3.2)}$$

โดยสมการ (ก-3.1) และ (ก-3.2) เวลาเฉลี่ยที่หน่วยรับบริการจะต้องรอในคิวก่อนที่จะรับบริการจึงเขียนได้เท่ากับ

$$W^b = \frac{\lambda Q^2\sigma}{(1-\rho_R)(1-\sigma)^2}$$

$$= \frac{Q\rho_R\sigma}{(1-\rho_R)(1-\sigma)} \qquad \text{(ก-3.3)}$$

เวลาที่ใช้ในระบบเมื่อหน่วยรับบริการต้องการเวลาบริการ nQ จึงเท่ากับ

$$T_n^b = \frac{Q\rho_R\sigma}{(1-\rho_R)(1-\sigma)} + nQ \qquad \text{(ก-3.4)}$$

ภาคผนวกที่ ก-4

เวลาเฉลี่ยในการรอคอย

ในระบบ RRLA เวลาเฉลี่ยที่หน่วยรับบริการจะต้องคอยคือ

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n W_n^{l}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(1-\sigma)\sigma^{n-1}\left[\frac{nQ}{1-\rho_R} - \frac{\lambda Q^2}{1-\rho_R}\left[1+\frac{(1-\sigma\alpha)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\sigma)^2(1-\rho_R)}\right] - nQ\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(1-\sigma)\sigma^{n-1}\frac{nQ}{1-\rho_R} - \sum_{n=1}^{\infty}(1-\sigma)\sigma^{n-1}\frac{\lambda Q^2}{1-\rho_R}$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\sigma)\sigma^{n-1}\lambda Q^2(1-\sigma\alpha)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\sigma)^2(1-\rho_R)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}(1-\sigma)\sigma^{n-1}\, nQ$$

$$= \frac{Q}{(1-\sigma)(1-\rho_R)} - \frac{\lambda Q^2}{1-\rho_R} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\sigma)\sigma^{n-1}\lambda Q^2(1-\sigma\alpha-\alpha^{n-1}+\alpha^n)}{(1-\rho_R)^2(1-\sigma)^2}$$

$$- \frac{Q}{1-\sigma}$$

$$= \frac{Q}{(1-\sigma)(1-\rho_R)} - \frac{\lambda Q^2}{1-\rho_R} - \frac{\lambda Q^2(1-\sigma(\sigma+\lambda Q))}{(1-\rho_R)^2(1-\sigma)^2}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda Q^2(\alpha^{n-1}\sigma^{n-1}-\sigma^n\alpha^n)}{(1-\rho_R)^2(1-\sigma)} - \frac{Q}{1-\sigma}$$

$$= \frac{Q}{(1-\sigma)(1-\rho_R)} - \frac{\lambda Q^2}{(1-\rho_R)} - \frac{\lambda Q^2(1-\sigma^2-\lambda Q)}{(1-\rho_R)^2(1-\sigma)^2} + \frac{\lambda Q^2}{(1-\rho_R)^2(1-\sigma)} - \frac{Q}{1-\sigma}$$

$$= \frac{Q(\rho_R\sigma-\sigma\rho_R^2)}{(1-\sigma)(1-\rho_R)^2}$$

$$= \frac{Q\rho_R\sigma(1-\rho_R)}{(1-\sigma)(1-\rho_R)^2}$$

$$= \frac{Q\rho_R\sigma}{(1-\sigma)(1-\rho_R)} \qquad (ก-4.1)$$

ในระบบ RREA เวลาเฉลี่ยที่หน่วยรับบริการจะต้องคอยคือ

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n W_n^{e}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (1-\sigma)\sigma^{n-1}\left[\frac{nQ}{1-\rho_R} - \rho_R Q - \frac{\lambda Q^2 \rho_R}{1-\rho_R}\left[1 + \frac{(1-\sigma\alpha)(1-\alpha^{n-1})}{(1-\sigma)^2(1-\rho_R)^2}\right] - nQ\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (1-\sigma)\sigma^{n-1} \frac{nQ}{1-\rho_R} - \sum_{n=1}^{\infty} \rho_R (1-\sigma)\sigma^{n-1} Q$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda Q^2 \rho_R}{1-\rho_R} (1-\sigma)\sigma^{n-1}$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\sigma)\sigma^{n-1} \lambda Q^2 \rho_R (1-\alpha\sigma-\alpha^{n-1}+\sigma\alpha^{n})}{(1-\rho_R)^2(1-\sigma)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} nQ(1-\sigma)\sigma^{n-1}$$

$$= \frac{Q}{(1-\rho_R)(1-\sigma)} - \rho_R Q - \frac{\lambda Q^2 \rho_R}{1-\rho_R} - \frac{\lambda Q^2 \rho_R (1-\alpha\sigma)}{(1-\rho_R)^2(1-\sigma)^2}$$

$$+ \frac{\rho_R^2 Q}{(1-\rho_R)^2} - \frac{Q}{1-\sigma}$$

$$= \frac{\rho_R \sigma Q(1-\rho_R)}{(1-\rho_R)^2(1-\sigma)}$$

$$= \frac{\rho_R \sigma Q}{(1-\rho_R)(1-\sigma)} \qquad (ก-4.2)$$

ภาคผนวก ข.

ทดสอบเลขสุ่ม

เมื่อทำการกำเนิดเลขสุ่มคล้ายโดยวิธี Multiplicative Congruential แล้ว จะนำเอาเลขสุ่มคล้ายนี้ไปใช้ประมาณ 6 หลักในการจำลอง ดังนั้น จึงจะทำการทดสอบเลขสุ่มคล้ายทั้ง 6 หลักนี้ว่าเป็นเลขที่มีการกระจายสม่ำเสมอและมีความเป็นอิสระต่อกันดังที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 4

เลขชุดที่ 1

$$x_n = 527,898,597\ x_{n-1} \qquad (\text{mod } 2,147,483,648)$$

โดย $x_o = 1$

นำ x_n มาหารด้วย 4 เพื่อให้เป็นเลขสุ่มที่มีค่าระหว่าง 0 ถึง 536,270,911 แล้วหารด้วย 536,370,911 จะได้เลขสุ่มที่มีการแจกแจงสม่ำเสมอในพิสัย [0, 1] ทำให้เป็นเลขจำนวนเต็ม แล้วตัดมาทดสอบ 6 หลัก เลขสุ่มชุดนี้ต้องการนำไปใช้ประมาณ 14000 ตัว

$$E_i = 14000/10$$

$$E_{ij} = (14000-1)/100$$

เลขชุดที่ 2

$$x_n = 637,085\ x_{n-1} \qquad (\text{mod } 4,194,304)$$

โดย $x_o = 1$

นำ x_n มาหารด้วย 4 เพื่อให้เป็นเลขสุ่มที่มีค่าระหว่าง 0 ถึง 1,048,575 แล้วหารด้วย 1,048,575 จะได้เลขสุ่มที่มีการแจกแจงสม่ำเสมอในพิสัย [0, 1] ทำให้เป็นเลขจำนวนเต็ม แล้วตัดมาทดสอบ 6 หลัก เลขสุ่มชุดนี้ต้องการนำไปใช้ประมาณ 10000 ตัว

$$E_i = 10000/10$$

$$E_{ij} = (10000-1)/100$$

องศาแห่งเสรีภาพที่ใช้ในการทดสอบ chi-square ในสมการ (4.4)

$= 10-1 = 9$

องศาแห่งเสรีภาพที่ใช้ในการทดสอบ chi-square ในสมการ (4.5)

$= 10^2 - 10 = 90$

และ $\chi^2_{9,\alpha=.01} = 21.67$

$\chi^2_{90,\alpha=.01} = 117.63$

การทดสอบเลขสุ่มชุดที่ 1

ทดสอบเลขหลักที่ 1

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	1425	1353	1378	1428	1392	1406	1425	1406	1399	1388

$$\chi^2 = 3.577 < \chi^2_{9,\alpha=.01}$$

j \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	145	128	138	150	144	146	143	156	127	148
1	165	128	146	119	135	137	131	114	152	126
2	150	120	134	157	123	141	135	135	151	132
3	144	128	123	129	161	142	156	137	148	160
4	140	125	127	164	156	130	132	126	142	149
5	149	141	139	146	130	133	154	142	140	132
6	130	138	142	144	132	152	138	146	143	160
7	145	143	156	128	145	132	152	156	125	124
8	135	131	131	155	140	143	152	155	133	124
9	122	171	141	136	126	150	132	139	138	133

$$\chi^2 = 94.179 < \chi^2_{90,\alpha=.01}$$

ซึ่งเป็นการแสดงว่าเลขหลักที่ 1 มีการกระจายสม่ำเสมอ และมีความเป็นอิสระต่อกัน

ทดสอบเลขหลักที่ 2

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	1409	1359	1412	1423	1376	1388	1477	1438	1357	1361

$$\chi^2 = 9.927 < \chi^2_{9,\alpha=.01}$$

j \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	150	139	138	128	138	163	151	143	134	125
1	145	142	137	136	125	138	126	133	134	142
2	164	145	133	146	164	119	148	139	119	135
3	133	132	171	123	129	133	170	144	140	148
4	138	116	140	141	119	159	141	144	128	150
5	124	142	147	131	134	133	145	155	143	134
6	146	148	133	155	158	126	157	167	156	131
7	138	131	132	162	140	162	156	144	136	137
8	139	143	143	132	132	118	144	133	140	133
9	132	121	138	169	136	137	139	136	127	126

$$\chi^2 = 98.526 < \chi^2_{90,\alpha=.01}$$

ซึ่งเป็นการแสดงว่าเลขหลักที่ 2 นี้มีการกระจายสม่ำเสมอและเป็นอิสระต่อกัน

ทดสอบเลขสุ่มหลักที่ 3

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	1432	1352	1412	1411	1393	1360	1420	1459	1401	1360

$$\chi^2 = 7.660 < \chi^2_{9,\alpha=.01}$$

j \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	152	134	142	153	143	139	133	136	148	152
1	130	137	141	129	150	125	143	136	134	127
2	171	126	133	147	134	127	148	141	136	148
3	138	119	141	167	129	145	136	153	152	131
4	140	134	138	150	125	136	139	150	145	136
5	128	148	137	147	138	126	138	138	139	121
6	139	142	141	126	157	122	158	152	150	133
7	136	150	141	130	152	163	141	161	146	139
8	145	125	161	130	136	146	157	142	121	139
9	153	137	137	132	129	131	127	150	130	134

$$\chi^2 = 74.079 < \chi^2_{90,\alpha=.01}$$

ซึ่งเป็นการแสดงว่าเลขหลักที่ 3 มีการกระจายสม่ำเสมอและเป็นอิสระต่อกัน

ทดสอบเลขสุ่มหลักที่ 4

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
j	1410	1437	1381	1383	1380	1301	1436	1409	1423	1440

$$x^2 = 11.304 < x^2_{9,\alpha=.01}$$

j \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	144	139	122	144	137	151	145	139	141	148
1	147	156	134	142	151	145	135	142	156	129
2	150	139	131	137	130	135	137	140	131	151
3	149	137	152	128	120	111	147	139	144	156
4	139	147	139	139	139	123	155	146	117	136
5	119	123	128	118	132	125	148	124	145	139
6	143	127	145	139	122	129	153	159	159	160
7	151	157	134	147	140	120	138	136	141	145
8	136	151	152	159	149	126	135	137	143	134
9	132	161	144	130	160	136	143	147	145	142

$$x^2 = 76.376 < x^2_{90,\alpha=.01}$$

ซึ่งเป็นการแสดงว่าเลขหลักที่ 4 มีการกระจายสม่ำเสมอและเป็นอิสระต่อกัน

ทดสอบเลขสุ่มหลักที่ 5

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
j	1364	1411	1323	1403	1405	1374	1447	1423	1428	1422

$$\chi^2 = 8.616 < \chi^2_{9,\alpha=.01}$$

j \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	143	129	135	127	124	134	152	147	152	121
1	148	140	136	133	145	136	158	128	141	146
2	112	151	111	131	126	127	127	134	147	157
3	132	118	121	156	148	156	139	146	146	140
4	125	140	138	152	151	139	140	139	134	147
5	136	155	124	112	144	135	130	139	154	145
6	154	139	146	129	161	126	148	161	138	145
7	134	165	140	169	130	140	142	135	144	124
8	140	137	135	146	133	141	173	149	135	139
9	140	137	136	148	143	140	138	145	137	158

$$\chi^2 = 90.721 < \chi^2_{90,\alpha=.01}$$

ซึ่งเป็นการแสดงว่าเลขหลักที่ 5 มีการกระจายสม่ำเสมอและมีความเป็นอิสระต่อกัน

ทดสอบเลขสุ่มหลักที่ 6

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
j	1451	1456	1359	1384	1359	1416	1409	1400	1392	1374

$$\chi^2 = 7.451 < \chi^2_{9,\alpha=.01}$$

j \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	152	142	141	139	147	135	168	156	142	129
1	164	158	150	157	141	132	132	148	141	132
2	146	158	126	131	134	134	135	135	125	135
3	144	133	142	135	131	146	136	149	138	130
4	146	129	142	134	132	134	109	143	167	123
5	170	155	122	139	134	145	150	146	131	124
6	135	138	140	155	142	154	143	132	141	129
7	125	149	141	146	148	128	131	142	138	152
8	129	144	131	110	134	153	157	130	141	163
9	140	149	124	138	116	155	148	119	128	157

$$\chi^2 = 96.782 < \chi^2_{90,\alpha=.01}$$

ซึ่งเป็นการแสดงว่าเลขหลักที่ 6 มีการกระจายสม่ำเสมอและมีความเป็นอิสระต่อกัน

จากการทดสอบทั้ง 6 หลัก แสดงว่าเลขชุดที่ 1 ที่ทำเนิดขึ้นมีสมบัติเป็นเลขสุ่ม

การทดสอบเลขสุ่มชุดที่ 2

การทดสอบเลขสุ่มหลักที่ 1

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	1024	992	1010	1013	955	999	1033	1009	977	988

$$\chi^2 = 4.778 < \chi^2_{9,\alpha=.01}$$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	103	82	96	103	101	107	117	114	90	111
1	119	108	106	93	94	87	97	98	93	97
2	97	96	111	105	111	93	92	105	101	94
3	104	100	96	104	100	104	108	98	107	92
4	81	106	84	111	96	111	89	85	93	99
5	104	99	94	109	86	95	104	96	106	106
6	99	111	121	101	107	92	106	115	91	90
7	106	99	102	102	73	95	113	97	104	118
8	100	98	96	97	96	99	111	97	101	81
9	111	92	104	88	91	111	96	104	91	100

$$\chi^2 = 76.627 < \chi^2_{90,\alpha=.01}$$

ซึ่งเป็นการแสดงว่าเลขหลักที่ 1 มีการกระจายสม่ำเสมอและมีความเป็นอิสระต่อกัน

การทดสอบเลขสุ่มหลักที่ 2

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	987	929	1052	1014	993	1055	964	989	1032	985

$$\chi^2 = 13.850 < \chi^2_{9,\alpha=.01}$$

j \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	103	94	87	102	108	110	91	88	106	98
1	79	83	93	109	94	95	85	92	109	90
2	105	115	103	95	108	94	101	109	108	114
3	89	104	92	108	99	114	93	110	103	102
4	111	97	128	91	90	110	78	103	98	86
5	110	85	108	126	101	106	107	101	112	99
6	105	82	106	89	100	106	95	96	78	107
7	96	77	116	101	94	125	101	86	104	89
8	105	85	106	109	98	97	114	105	114	99
9	84	107	113	84	101	97	99	99	100	101

$$\chi^2 = 98.487 < \chi^2_{90,\alpha=.01}$$

ซึ่งเป็นการแสดงว่าเลขหลักที่ 2 มีการกระจายสม่ำเสมอและมีความเป็นอิสระต่อกัน

การทดสอบเลขสุ่มหลักที่ 3

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	1031	1003	1083	1007	982	983	982	960	971	998

$$\chi^2 = 11.290 < \chi^2_{9,\alpha=.01}$$

j \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	101	112	114	98	104	115	95	103	90	99
1	101	103	90	120	90	98	93	96	105	107
2	113	105	119	96	125	112	105	88	108	112
3	95	107	126	105	81	101	110	90	102	90
4	87	109	103	84	96	102	97	97	104	103
5	102	99	105	112	88	89	80	108	105	94
6	108	87	103	88	94	100	101	93	105	103
7	123	91	110	94	93	79	100	82	78	110
8	101	108	101	115	105	93	96	89	84	79
9	100	81	112	95	106	94	105	114	90	101

$$\chi^2 = 100.221 < \chi^2_{90,\alpha=.01}$$

ซึ่งเป็นการแสดงว่าเลขหลักที่ 3 มีการกระจายสม่ำเสมอและมีความเป็นอิสระต่อกัน

การทดสอบเลขสุ่มหลักที่ 4

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	997	1014	971	1021	1013	1009	1029	962	979	1005

$$\chi^2 = 4.488 < \chi^2_{9,\alpha=.01}$$

j \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	89	107	109	95	107	104	87	89	93	117
1	123	89	97	101	94	110	101	94	109	96
2	105	107	87	103	101	100	95	89	91	93
3	84	88	106	109	115	102	110	107	90	110
4	114	103	79	98	107	86	116	103	101	106
5	106	97	89	105	107	96	117	101	99	92
6	91	100	97	96	106	116	121	90	107	104
7	89	114	94	107	92	107	89	78	97	95
8	88	111	110	114	110	95	89	90	85	87
9	108	98	103	93	74	93	104	121	106	105

$$\chi^2 = 99.163 < \chi^2_{90,\alpha=.01}$$

ซึ่งเป็นการแสดงว่าเลขหลักที่ 4 มีการกระจายสม่ำเสมอและมีความเป็นอิสระต่อกัน

การทดสอบเลขหลักที่ 5

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	985	980	1027	1008	1062	1016	934	1012	975	1001

$$\chi^2 = 10.644 < \chi^2_{9,\alpha=.01}$$

j \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	98	94	117	93	96	103	101	87	97	99
1	99	91	104	99	109	92	91	113	86	96
2	83	103	107	97	115	99	109	106	103	105
3	87	113	108	105	107	105	107	82	98	96
4	102	103	113	112	110	110	95	106	107	104
5	110	104	105	106	102	110	82	105	90	102
6	112	81	82	104	108	88	86	96	90	87
7	86	94	103	99	116	114	90	103	104	102
8	94	89	101	94	112	97	75	101	106	106
9	114	108	87	99	87	98	98	113	94	103

$$\chi^2 = 76.461 < \chi^2_{90,\alpha=.01}$$

ซึ่งเป็นการแสดงว่าเลขหลักที่ 5 มีการกระจายสม่ำเสมอและมีความเป็นอิสระต่อกัน

ทดสอบเลขสุ่มหลักที่ 6

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	1016	1019	1015	1019	982	1033	1005	966	958	987

$$\chi^2 = 5.730 < \chi^2_{9,\alpha=.01}$$

j \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	94	89	123	103	103	95	93	95	106	115
1	104	108	112	103	106	97	108	85	109	87
2	96	109	101	114	96	108	96	93	90	112
3	117	95	96	98	107	76	109	116	105	100
4	84	121	83	124	83	107	96	95	102	87
5	108	99	100	106	102	109	106	99	91	112
6	116	110	104	91	99	114	108	95	86	82
7	98	101	109	94	103	100	93	90	77	101
8	104	90	87	96	80	107	100	102	105	87
9	95	97	99	90	103	120	96	96	87	104

$$\chi^2 = 98.594 < \chi^2_{99,\alpha=.01}$$

ซึ่งเป็นการแสดงว่าเลขหลักที่ 6 มีการกระจายสม่ำเสมอและมีความเป็นอิสระต่อกัน

จากการทดสอบทั้ง 6 หลัก แสดงว่าเลขชุดที่ 2 ที่กำเนิดขึ้นนี้มีสมบัติเป็นเลขสุ่ม

ภาคผนวก ค.

การคำนวณหาเวลาคงที่ในการให้บริการในแต่ละรอบ ที่ทำให้ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยมีค่าน้อยที่สุด

<u>ภาคผนวก ก-1</u>

การใช้ Fibonacci Search เพื่อหา Q ที่ทำให้ระยะเวลารอคอยในสมการ (3.22) รวมกับ (3.30) คือ $W + \Delta^e$ มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งก็คือแบบจำลองชนิดที่เวลาสับเปลี่ยนไม่เท่ากับศูนย์ และไม่ให้มีหน่วยรับบริการใหม่เกิดขึ้นในช่วงเวลาสับเปลี่ยน โดยให้ $\lambda = 1$ หน่วยต่อวินาที $\mu = 2$ หน่วยต่อวินาที ดังนั้น $\rho = .5$ ค่าเฉลี่ยของเวลาสับเปลี่ยนมีค่าเท่ากับ 0.02333 วินาที ให้พิสัยที่ต้องการหาค่าต่ำสุดคือ (.1, .6) และต้องการความคลาดเคลื่อน $\varepsilon = .01$ ดังนั้น จะต้องการหาค่าทั้งหมด k = 9 ครั้ง โดย $\frac{.6 - .1}{F_9} < .01$

$$n = 1,\ b^1 = .1,\ u^1 = .6$$

$$x_1^1 = \frac{F_7}{F_9}(u^1 - b^1) + b^1 = .29091, \quad W = 0.88549$$

$$x_2^1 = \frac{F_8}{F_9}(u^1 - b^1) + b^1 = .40909, \quad W = 1.01567$$

$$W(x_1^1) < W(x_2^1)$$

$$n = 2,\ b^2 = .1,\ u^2 = .40909,\ x_2^2 = .29091$$

$$x_1^2 = \frac{F_6}{F_8}(u^2 - b^2) + b^2 = .21818, \quad W = .86421$$

$$W(x_1^2) < W(x_2^2)$$

$$n = 3,\ b^3 = .1,\ u^3 = .29091,\ x_2^3 = .21818$$

$$x_1^3 = \frac{F_5}{F_7}(u^3 - b^3) + b^3 = .17273, \quad W = .88182$$

$$W(x_1^3) > W(x_2^3)$$

$n = 4,\ b^4 = .17273,\ u^4 = .29091,\ x_1^4 = .21818$

$$x_2^4 = \frac{F_5}{F_6}(u^4-b^4) + b^4 = .24546, \quad W = .86636$$

$W(x_1^4) < W(x_2^4)$

$n = 5,\ b^5 = .17273,\ u^5 = .24546,\ x_2^5 = .21818$

$$x_1^5 = \frac{F_3}{F_5}(u^5-b^5) + b^5 = .20000, \quad W = .86756$$

$W(x_1^5) > W(x_2^5)$

$n = 6,\ b^6 = .2,\ u^6 = .24546,\ x_1^6 = .21818$

$$x_2^6 = \frac{F_3}{F_4}(u^6-b^5) + b^6 = .22728, \quad W = .86404$$

$W(x_1^6) > W(x_2^6)$

$n = 7,\ b^7 = .21818,\ u^7 = .24546,\ x_1^7 = .22728$

$$x_2^7 = \frac{F_2}{F_3}(u^7-b^7) + b^7 = .23637, \quad W = .86478$$

$W(x_1^7) < W(x_2^7)$

$n = 8 = k-1,\ b^8 = .21818,\ u^8 = .23637$

$$\frac{b^8+u^8}{2} = \frac{.21818 + .23637}{2} = .22728$$

$$\frac{b^8+u^8}{2} + .001 = .22828, \quad W = .86408$$

$W(.22728) < W(.22828)$

ดังนั้น Q ที่ทำให้ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยมีค่าต่ำสุดอยู่ระหว่าง 0.21818 กับ 0.22728 วินาที ซึ่งจะให้ค่าระยะเวลารอคอยเท่ากับ .86421 กับ .86404 วินาที ตามลำดับ

ภาคผนวก ค-2

การใช้ **Fibonacci Search** เพื่อหา Q ที่ทำให้ระยะเวลารอคอยมีค่าน้อยที่สุดในแบบจำลองชนิดที่เวลาสับเปลี่ยนไม่เท่ากับศูนย์ และให้มีหน่วยใหม่เข้ารับบริการในช่วงเวลาสับเปลี่ยนได้ โดยให้ $\lambda = 1$ หน่วยต่อวินาที, $\mu = 2$ หน่วยต่อวินาที ดังนั้น $\rho = .5$ ค่าเฉลี่ยของเวลาสับเปลี่ยน $= .02333$ วินาที ให้พิสัยที่ต้องการหาค่าต่ำสุดคือ (.1, .6) และต้องการความคลาดเคลื่อน $\epsilon = .01$ ดังนั้น จะต้องการหาค่าทั้งหมด $k = 9$ ครั้ง โดย $\frac{.6-.1}{F_9} < .01$

$$n = 1,\ b^1 = .1,\ u^1 = .6$$

$$x_1^1 = \frac{F_7}{F_9}(u^1-b^1)+b^1 = .29091$$

$$W(x_1^1) = 1.25084,\ \text{Var} = 3.91749,\ \delta = 0.08062$$

$$x_2^1 = \frac{F_8}{F_9}(u^1-b^1)+b^1 = .40909$$

$$W(x_2^1) = 1.53386,\ \text{Var} = 5.46044,\ \delta = 0.09642$$

$$W(x_1^1) < W(x_2^1)$$

$$n = 2,\ b^2 = .1,\ u^2 = .40909,\ x_2^2 = .29091$$

$$x_1^2 = \frac{F_6}{F_8}(u^2-b^2)+b^2 = .21818$$

$$W(x_1^2) = 1.42529,\ \text{Var} = 5.61532,\ \delta = 0.09652$$

$$W(x_1^2) > W(x_2^2)$$

$n = 3,\ b^3 = .21818,\ u^3 = .40909,\ x_1^3 = .29091$

$$x_2^3 = \frac{F_6}{F_7}(u^3 - b^3) + b^3 = .33636$$

$W(x_2^3) = 1.21875$, Var $= 3.50417$, $\delta = 0.07665$

$W(x_1^3) > W(x_2^3)$

$n = 4,\ b^4 = .29091,\ u^4 = .40909,\ x_1^4 = .33636$

$$x_2^4 = \frac{F_5}{F_6}(u^4 - b^4) + b^4 = .36364$$

$W(x_2^4) = 1.33225$, Var $= 4.15904$, $\delta = 0.08298$

$W(x_1^4) < W(x_2^4)$

$n = 5,\ b^5 = .29091,\ u^5 = .36364,\ x_2^5 = .33636$

$$x_1^5 = \frac{F_3}{F_5}(u^5 - b^5) + b^5 = .31818$$

$W(x_1^5) = 1.22696$, Var $= 3.78618$, $\delta = 0.07925$

$W(x_1^5) > W(x_2^5)$

$n = 6,\ b^6 = .31818,\ u^6 = .36364,\ x_1^6 = .33636$

$$x_2^6 = \frac{F_3}{F_4}(u^6 - b^6) + b^6 = .34546$$

$W(x_2^6) = 1.30693$, Var = 4.24529, $\delta = 0.08392$

$W(x_1^6) < W(x_2^6)$

$n = 7$, $b^7 = .31818$, $u^7 = .34546$, $x_2^7 = .33636$

$$x_1^7 = \frac{F_1}{F_3}(u^7-b^7) + b^7 = .32727$$

$W(x_1^7) = 1.16365$, Var = 3.64195, $\delta = 0.07773$

$W(x_1^7) < W(x_2^7)$

$n = 8 = k-1$, $b^8 = .31818$, $u^8 = .33636$

$$\frac{b^8+u^8}{2} = .32727$$

$$\frac{b^8+u^8}{2} + .001 = .32827$$

$W(.32827) = 1.18947$, Var = 3.61660, $\delta = 0.07746$

$W(.32727) < W(.32827)$

นั่นคือ Q ที่ทำให้ค่าเฉลี่ยของเวลารอคอยมีค่าต่ำสุดจะอยู่ระหว่าง .31818 กับ .32727 ซึ่งจะให้ค่าระยะเวลารอคอยเท่ากับ 1.2270 และ 1.1636 วินาที ตามลำดับ

บรรณานุกรม

Edward G. Coffman and Leonard Kleinrock, "Feed back Queueing Models for Time-Shared System, " Journal of the Association for Computing Machinery, Vol.15, No.4, October, 1968.

Edward G. Coffman, JR, R.R.Munty and H. Trotter, "Waiting Time Distribution for Processor-Shared Systems," Journal of the Association for Computing Machinery, Vol.17, No.1, January, 1970.

Frederick S. Hillier and Gerald J. Lieberman, Introduction to Operation Research, Holden-day, Inc. 1970.

Jack E. Shemer, "Some Mathematical Considerations of Time-Sharing Scheduling Algorithms," Journal of the Association for Computing Machinery, Vol.14, No.2, April, 1967.

Jackson, J.R., "Some Problems in Queueing with Dynamic Priorities," Naval Research Logistics Quarterly, 7, 1960.

James R. Emshoff and Roger L. Sisson, Computer Simulation Models, The Macmillan Company, 1970.

Leonard Klienrock, "Analysis of a Time-Shared Processor," Noval Research Logistics Quarterly, 11, March, 1964.

Leonard Klienrock, "Time-Shared System - A Theoretical Treatment," Journal of Association for Computing Machinery, Vol.14, No.2, April, 1967.

Saaty, Element of Queueing Theory.

W.B. Davepert Jr. and W.L. Root, An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise, McGraw-Hill, New York, 1958

ดร.วิชิต หล่อจีระชุณห์กุล, คำบรรยายวิชา สป.743 การโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์.

ประวัติผู้เขียนเรียง

น.ส.พัชรศิริ สัจจพันธุ์ เกิดที่ตำบลรองเมือง อำเภอป้อมปราบฯ กรุงเทพมหานคร เมื่อวันที่ 8 พฤษภาคม 2495

<u>การศึกษา</u>

พ.ศ.2512 สำเร็จการศึกษาประโยคมัธยมศึกษาตอนปลายจากโรงเรียนราชินีบน

พ.ศ.2516 สำเร็จการศึกษาวิทยาศาสตร์บัณฑิต จากคณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ.2516 ศึกษาต่อที่คณะสถิติประยุกต์ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์