

การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและผลการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์  
ตามโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky เรื่อง ลำดับและอนุกรมอนันต์  
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

The Study of Mathematical Misconceptions and Effects of Using  
the Concept Formation Model of Lasley & Matczynski  
on Infinite Sequences and Series of Mathayomsuksa Six Students

เอกพล กมลเพชร\* ชนิศวรา เลิศอมรพงษ์ และ ทรงชัย อักษรคิด  
Akekapol Kamolpachara\* Chanisvar Lertamornpong and Songchai Ugsornkid

ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์  
Department of Education, Faculty of Education, Kasetsart University  
\*Corresponding author, E-mail: [akekapol.k@ku.th](mailto:akekapol.k@ku.th), โทร. 082-6245954  
วันที่ส่งบทความ 19 สิงหาคม 2564 วันที่แก้ไขครั้งสุดท้าย 8 ตุลาคม 2564  
วันที่ตอบรับบทความ 14 ตุลาคม 2564 วันที่เผยแพร่ออนไลน์ 1 กรกฎาคม 2566

#### บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ และผลการสร้างมโนทัศน์ตามโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky เรื่อง ลำดับและอนุกรมอนันต์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 6 กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้มีจำนวน 2 กลุ่ม ได้แก่ 1) กลุ่มเป้าหมายเพื่อการศึกษา มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ปีการศึกษา 2562 จำนวน 45 คน และ 2) กลุ่มเป้าหมายเพื่อศึกษาผลการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ปีการศึกษา 2563 จำนวน 32 คน ของโรงเรียนขนาดใหญ่แห่งหนึ่งในกรุงเทพมหานคร เครื่องมือที่ใช้ประกอบด้วย 1) แบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับและอนุกรมอนันต์ 2) แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ลำดับและอนุกรมอนันต์ โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky จำนวน 14 คาบเรียน และ 3) แบบบันทึกการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณใช้ความถี่ ร้อยละ และค่าเฉลี่ย การวิเคราะห์ข้อมูล เชิงคุณภาพใช้การวิเคราะห์เนื้อหา

ผลการวิจัยจากกลุ่มเป้าหมายแรกพบว่า ประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่มีความถี่จากมากไปน้อย ดังนี้ 1) การมีมโนทัศน์ที่จำกัด 2) ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ 3) การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข และ 4) การตีความผิด และผลการวิจัยจากกลุ่มเป้าหมายที่สองพบว่า หลังจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ในแต่ละขั้นตอนของโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky พบประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ในความถี่ที่ลดลง และเกิดขึ้นเพียง 2 ประเภท ดังนี้ 1) การมีมโนทัศน์ที่จำกัด และ 2) ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์

**คำสำคัญ:** มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ โมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynski

## Abstract

This study aimed to study mathematical misconceptions and effects of using the concept formation model of Lasley & Matczynski of Matthayomsuksa Six students on infinite sequences and series. There were 2 target groups in this study: 1) the target group for the study of mathematical misconceptions were 45 students from a large school in Bangkok in Academic Year 2019, and 2) the target group for studying the effects of using the concept formation model of Lasley & Matczynski were 32 students in the Academic Year 2020. The instruments of this study were 1) mathematical concepts of infinite sequences and series tests 2) 14-period lesson plans using the concept formation model of Lasley & Matczynski on infinite sequences and series and 3) learning observation forms to record the mathematical concepts The quantitative data were analyzed by using frequency, percentage, and mean. The qualitative data were analyzed by content analysis.

The study results from the first target group found that the types of mathematical misconceptions in descending order were 1) Limited Conceptions 2) Defective understanding of mathematical facts 3) Overgeneralization, and 4) Misinterpretation. Results from the second target group found that after using the concept formation model of Lasley & Matczynski, only 2 types of mathematical misconceptions were found in a decreasing number: 1) limited conceptions and 2) defective understanding of mathematical facts.

**Keywords:** *Mathematical misconceptions, Concept formation model of Lasley & Matczynski*

## บทนำ

การเปลี่ยนแปลงในด้านต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในโลกในยุคปัจจุบันไม่ว่าจะเป็นด้านสังคม ด้านเศรษฐกิจ และโดยเฉพาะอย่างยิ่งในด้านการพัฒนาของวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่เป็นไปอย่างรวดเร็ว ก่อให้เกิดนวัตกรรมใหม่สภาพแวดล้อมที่เปลี่ยนแปลงไปและความท้าทายต่าง ๆ ล้วนแล้วส่งผลต่อการดำเนินชีวิต ทำให้มนุษย์จำเป็นต้องมีการปรับตัวและพัฒนาศักยภาพของตนเอง เกิดการแข่งขัน มีการบูรณาการของความรู้เพื่อนำไปใช้ในการสร้างสรรค์ สิ่งต่าง ๆ รวมถึงนำความรู้ที่ได้ไปใช้ในการแก้ปัญหาเมื่อต้องเผชิญกับสถานการณ์ต่าง ๆ ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ถือได้ว่าเป็นความรู้พื้นฐาน แม้ว่าเนื้อหาคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่จะมีลักษณะของความเป็นนามธรรมที่มีกกล่าวถึงนิยาม ทฤษฎีบท หรือกฎมากมาย แต่เมื่อพิจารณาอย่างถี่ถ้วนแล้วคณิตศาสตร์นั้นมีความใกล้ชิดกับการดำเนินชีวิตในประจำวัน เป็นเครื่องมือที่จำเป็นและมีความสำคัญมีความเกี่ยวข้องในความรู้ของศาสตร์อื่น ๆ ทำให้มนุษย์เกิดทักษะ มีความคิดที่เป็นระบบ มีเหตุผล มีหลักการ และแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ การศึกษาคณิตศาสตร์ในเรื่องใดเรื่องหนึ่งนั้น จึงต้องมีความเข้าใจที่ถูกต้อง ครบถ้วน และลึกซึ้ง โดยอาจเรียกความเข้าใจดังกล่าวว่าการมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง ผู้ที่มีมโนทัศน์ที่ถูกต้องก็จะสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ให้เกิดประโยชน์ สามารถประยุกต์และพัฒนาต่อยอดได้อย่างไม่สิ้นสุด และในทางตรงกันข้ามหากมีความรู้ทางคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้องหรือการมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนไป ย่อมส่งผลกระทบต่อวัตถุประสงค์หรือเป้าหมายที่ต้องการ เป็นอุปสรรคต่อการพัฒนาความรู้ความเข้าใจ และไม่สามารถที่จะเรียนรู้หรือศึกษาในเนื้อหาที่มีความซับซ้อนต่อไป (Chambers, 2008; Jordaan, 2005) และอาจส่งผลกระทบต่อการดำเนินชีวิต เช่น การแก้ปัญหา การตัดสินใจ และการวางแผน ดังนั้นการมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ จึงต้องได้รับการแก้ไขเพราะ

เมื่อหากเกิดขึ้นกับบุคคลใดแล้ว บุคคลนั้นจะไม่ทราบว่ามันมีความเข้าใจที่ไม่ถูกต้อง ทำให้เกิดความผิดพลาด  
อย่างเป็นระบบเกิดขึ้นอย่างสม่ำเสมอ และส่งผลให้มโนทัศน์ที่เกี่ยวข้องมีความคลาดเคลื่อนเช่นกัน

การศึกษาเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์จะทำให้ได้ข้อสังเกตลักษณะและสาเหตุของ  
ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท., 2552) กล่าวถึงมโนทัศน์  
ที่ครูและนักเรียนมักเข้าใจคลาดเคลื่อนทั้งหมด 4 ประเด็น ได้แก่ 1) มโนทัศน์ที่เข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับเนื้อหา  
คณิตศาสตร์ ทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม ข้อเท็จจริง และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ 2) มโนทัศน์ที่  
คลาดเคลื่อนที่เกิดจากการสื่อสาร การนำเสนอ และการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ 3) มโนทัศน์ที่  
คลาดเคลื่อนที่เกี่ยวกับความหมายของคำที่ใช้ในคณิตศาสตร์ และ 4) มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในลักษณะอื่น ๆ ที่  
ไม่อยู่ใน 3 ประเด็นที่กล่าวไว้ข้างต้น แต่อาจเป็นอุปสรรคต่อการเรียนรู้หรือแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ นักการศึกษาใน  
ต่างประเทศอย่าง Graeber (1992) ได้ศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่สังเกตได้จากนักเรียนในระดับมัธยมศึกษา  
และได้แยกประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนออกเป็น 4 ประเภท ได้แก่ 1) การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข  
(Overgeneralizations) 2) การตีกรอบแนวคิดที่มากเกินไป (Overspecializing) 3) การตีความผิด (Mistranslation)  
และ 4) การมีมโนทัศน์ที่จำกัด (Limited Conceptions) นอกจากนี้ Schnepfer and McCoy (2013) ได้ศึกษา  
เกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ โดยเรียกว่าความผิดพลาด พบว่าความผิดพลาด  
ที่พบในชั้นเรียนนั้นสามารถแบ่งออกเป็น 5 ลักษณะ ดังนี้

- 1) การให้คำตอบที่ไม่สมบูรณ์ (Incomplete Answer)
- 2) การใช้ข้อมูลที่ผิด (Misuse Data)
- 3) ข้อผิดพลาดทางเทคนิค (Technical Error)
- 4) ข้อผิดพลาดที่มาจากมโนทัศน์หรือความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน  
เกิดจากการเรียนรู้ที่ผ่านมา (Error Originating from Misconceptions of Previously Learned Material)
- และ 5) การบิดเบือนนิยาม (Distorted Definition)

การพัฒนาามโนทัศน์นั้นเป็นไปได้ทั้งในรูปแบบของการสร้างมโนทัศน์และในรูปแบบของการแก้ไข หรือ  
ปรับปรุงมโนทัศน์ นักการศึกษาหลายท่านได้พยายามคิดค้นพัฒนารูปแบบของการจัดการเรียนการสอนเพื่อให้ผู้เรียน  
เกิดมโนทัศน์ ซึ่งมีทั้งแนวคิด หลักการ รูปแบบหรือโมเดลต่าง ๆ ทิศนา ขัมมณี (2556) ได้กล่าวถึงรูปแบบ  
การสอน มโนทัศน์ของ Joyce and Weil (2000) ที่พัฒนามาจากแนวคิดของ Bruner, Goodnew & Austin  
ว่าการเรียนรู้มโนทัศน์ของสิ่งหนึ่งสิ่งใดนั้นสามารถทำได้โดยการหาคุณสมบัติเฉพาะที่สำคัญของสิ่งนั้น เพื่อใช้เป็น  
เกณฑ์ในการจำแนกสิ่งที่ใช่และสิ่งที่ไม่ใช่ออกจากกัน สอดคล้องกับโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley and  
Matczynski (2002) ที่ได้จากการจัดระบบข้อมูล โดยมีขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้แบบเป็นลำดับขั้น ดังนี้  
1) ขั้นการผลิตข้อมูล (Data Generating) 2) ขั้นการจัดกลุ่มข้อมูล (Data Grouping) 3) ขั้นขยายประเภทของ  
ข้อมูล (Expanding the Category) และ 4) ขั้นการสรุป (Closure) และมีการนำไปปรับใช้สำหรับการจัด  
การเรียนการสอนอย่างแพร่หลาย

ด้วยความสำคัญของการมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง สิ่งที่พบหรือข้อสังเกตจากการศึกษามโนทัศน์  
ที่คลาดเคลื่อน แนวคิดหรือรูปแบบในการจัดการเรียนรู้เพื่อให้ผู้เรียนเกิดการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์  
จากนักการศึกษาหลายท่าน พบว่าในเนื้อหาเรื่อง ลำดับและอนุกรมอนันต์ สำหรับนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษา  
ปีที่ 6 เป็นหน่วยความรู้ที่มีความสำคัญและจำเป็นสำหรับการเรียนรู้ในหลายสาขา ซึ่งเป็นรอยต่อจากระดับ  
มัธยมศึกษาไปสู่ระดับอุดมศึกษา การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและการพัฒนามโนทัศน์ จึงเป็นการตรวจ  
สอบและเตรียมความพร้อมหากนักเรียนมีมโนทัศน์พื้นฐานที่ถูกต้องแล้วการเรียนรู้ในมโนทัศน์ที่สูงขึ้น การนำไป  
ใช้สำหรับบูรณาการกับความรู้อื่นๆ ก็จะเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ รวมถึงอุปสรรคในการเรียนรู้ก็จะถูกกำจัด  
หรือลดน้อยลง ผู้วิจัยจึงมีความสนใจแนวคิด หลักการต่าง ๆ มาเพื่อเป็นแนวทางในการศึกษามโนทัศน์ที่คลาด  
เคลื่อนทางคณิตศาสตร์ในเรื่อง ลำดับและอนุกรมอนันต์ ที่เกิดขึ้นกับนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เพื่อให้

เข้าใจถึงลักษณะ ที่มาของความผิดพลาดที่เกิดขึ้น และพัฒนาให้นักเรียนมีมโนทัศน์ที่ถูกต้อง จึงได้พัฒนาสื่อและกิจกรรมการเรียนรู้ในรูปแบบที่ส่งเสริมให้เกิดการสร้างมโนทัศน์ โดยเน้นการสำรวจ การเปรียบเทียบการเชื่อมโยง การคาดการณ์ การตั้งสมมติฐาน และการตรวจสอบ จากการจัดระบบข้อมูลตามรูปแบบโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley and Matczynski

### วัตถุประสงค์ในการวิจัย

1. ศึกษาโมทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
2. ศึกษาผลการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับและอนุกรมอนันต์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 6 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky

### นิยามคำศัพท์เฉพาะ

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดหรือความเข้าใจที่ไม่ถูกต้อง แตกต่างไปจากความเป็นจริงบางส่วนหรือทั้งหมด โดยเกิดขึ้นอย่างเป็นระบบอันเนื่องมาจากประสบการณ์และพื้นฐานของความรู้เดิมที่ไม่สมบูรณ์ ในการวิจัยครั้งนี้ได้จำแนกมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Graeber (1992) Schnepfer and McCoy (2013) ที่ได้ศึกษาโดย พรธิดา สุขกรม (2557) แบ่งออกเป็น 4 ประเภท ดังนี้

1. การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข (Overgeneralizations) เป็นลักษณะของการนำหลักการแนวคิด กระบวนการหรือขั้นตอนที่เป็นจริงภายใต้เงื่อนไขหนึ่งไปใช้ในกรณีที่นอกเหนือจากเงื่อนไข

2. ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ (Defective understanding about mathematics truths) เป็นความเข้าใจที่มีพื้นฐานมาจากสัญชาตญาณเพียงอย่างเดียวหรือจากการให้เหตุผลที่ผิด

3. การตีความผิด (Mistranslation) เป็นลักษณะของการแปลความหมายของข้อมูลในรูปแบบหนึ่งไปอีกรูปแบบหนึ่งที่ไม่มีความสอดคล้องกัน

4. การมีมโนทัศน์ที่จำกัด (Limited Conceptions) คือนักเรียนมีความเข้าใจในหลักการ แนวคิด ขั้นตอน และกระบวนการที่จำกัด มีส่วนของมโนทัศน์ที่ขาดหาย นำความรู้มาใช้เพียงส่วนหนึ่ง

2. โมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky หมายถึง โมเดลการสอนของ Lasley and Matczynski ที่พัฒนาจากการสอนตามทักษะการจัดระบบ (Reorganizing) เพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนสร้างมโนทัศน์จากการจัดระบบข้อมูล เชื่อมโยงข้อมูล สร้างและทดสอบสมมติฐาน จากการเปรียบเทียบ การจำแนกความแตกต่าง การจัดประเภท การประยุกต์ใช้ การวิเคราะห์และการสังเคราะห์ข้อมูล โดยประกอบด้วยขั้นตอนทั้งหมด 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 การผลิตข้อมูล (Data Generation) เป็นขั้นการผลิตและรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่จะสร้าง ข้อมูลอาจมาจากผู้เรียน ผู้สอน หรือจากทั้งผู้เรียนและผู้สอน ในขั้นนี้ผู้สอนต้องทำหน้าที่กลั่นกรองว่าข้อมูลที่ได้เป็นสิ่งที่จะนำไปสู่มโนทัศน์หรือไม่ และเพียงพอหรือยัง

ขั้นที่ 2 การจัดการกลุ่มข้อมูล (Data Grouping) ในขั้นนี้ ผู้เรียนจะเป็นผู้จัดข้อมูลที่มีลักษณะคล้ายคลึงกันทางมโนทัศน์เข้าด้วยกันตามการรับรู้ของตนเอง ผู้สอนกระตุ้นให้ผู้เรียนอธิบายให้ได้ว่า ใช้เกณฑ์หรือหลักการใดในการจัดกลุ่มข้อมูลแต่ละกลุ่ม

ขั้นที่ 3 การขยายความประเภของข้อมูล (Expanding the Category) จากกลุ่มข้อมูลที่ผู้เรียนได้ในขั้นตอนที่ 2 โดยผู้สอนจะทำการตรวจสอบว่าผู้เรียนคิดอย่างไรในกระบวนการจำแนก ให้ผู้เรียนได้อธิบายวิธีการคิด

ขั้นที่ 4 การสรุปปิด (Closure) ในขั้นนี้ผู้เรียนแสดงข้อสรุปทั่วไป ความสัมพันธ์ต่าง ๆ หรือการสรุปความหมาย

## วิธีดำเนินการวิจัย

### กลุ่มเป้าหมาย

การวิจัยครั้งนี้กำหนดกลุ่มเป้าหมายโดยใช้หลักเกณฑ์การเลือกจากกลุ่มนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 ในรูปแบบเดียวกัน และความสามารถ จำนวน 2 กลุ่ม ดังนี้

1. กลุ่มเป้าหมายเพื่อศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 45 คน ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 ของโรงเรียนขนาดใหญ่แห่งหนึ่งในกรุงเทพมหานคร

2. กลุ่มเป้าหมายเพื่อศึกษาผลการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 32 คน ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2563 ของโรงเรียนขนาดใหญ่แห่งหนึ่งในกรุงเทพมหานคร

### เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. **แบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์** ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ผู้วิจัย ได้ศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหา เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ และจากการศึกษาแบบวัดมโนทัศน์ ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง โดยแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นมีรูปแบบข้อสอบแบบเขียนตอบซึ่งประกอบด้วยคำถามทั้งหมด 7 คำถาม โดยครอบคลุมเนื้อหาทั้งหมด 7 หัวข้อ ได้แก่ 1) นิยามของลำดับอนันต์ 2) ลักษณะการเข้าสู่ของลำดับ 3) เงื่อนไขการเข้าสู่ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต 4) ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการเข้าสู่ของลำดับ 5) ผลบวกย่อยและการเข้าสู่ของอนุกรม 6) อนุกรมเลขคณิตเรขาคณิต และ 7) ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการเข้าสู่ของอนุกรม โดยแบบวัดมโนทัศน์ได้ผ่านการตรวจสอบและการให้ข้อเสนอแนะจากผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 คน ประกอบด้วยผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ศึกษา ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ และผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์ ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และได้รับการประเมินคุณภาพของข้อสอบจากผู้เชี่ยวชาญในการพิจารณาค่าความสอดคล้องของข้อสอบเท่ากับ 1.00 จำนวน 6 ข้อ และ 0.67 จำนวน 1 ข้อ ซึ่งผู้วิจัยได้ปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญ ดังนี้ 1) ปรับคำถามให้นักเรียนสามารถเขียนอธิบายเหตุผลหรือการยกตัวอย่างเพื่อสนับสนุนคำตอบของตนเองเพิ่มเติม 2) ลดความซับซ้อนของคำถามโดยให้แยกออกเป็นคำถามย่อยและมีความชัดเจน

2. **แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์** โดยนำรูปแบบของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้จากโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky จำนวน 7 แผน 14 คาบเรียน โดยการนำข้อมูลที่ได้จากการสำรวจมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจากแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ แต่ละแผนการจัดการเรียนรู้จะประกอบด้วยขั้นตอนทั้งหมด 4 ขั้นตอน คือ 1) ขั้นเตรียมการและขั้นนำ 2) ขั้นการสำรวจการสร้างมโนทัศน์ 3) ขั้นการตรวจสอบมโนทัศน์ และ 4) ขั้นการปรับปรุง แก้ไข หรือพัฒนามโนทัศน์ ซึ่งเป็นการจัดรูปแบบของกิจกรรมการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky ที่ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน คือ 1) ขั้นการผลิตข้อมูล 2) ขั้นการจัดกลุ่มข้อมูล 3) ขั้นขยายประเภทของข้อมูล และ 4) ขั้นการสรุป โดยในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ได้รับการตรวจสอบและการให้ข้อเสนอแนะจากผู้เชี่ยวชาญในด้านคณิตศาสตร์ศึกษา ด้านเนื้อหา และด้านการสอนคณิตศาสตร์ โดยผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหา ความสอดคล้องของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้กับโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky และการนำข้อมูลที่ได้จากแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับและอนุกรมอนันต์มาใช้ในแผนการจัดการเรียนรู้ ซึ่งผู้วิจัยได้ปรับปรุงแผนการจัดการเรียนรู้ ดังนี้ 1) ตรวจสอบและแก้ไขสัญลักษณ์หรือตัวแปรในบทนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ ให้เป็นไปตามหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560 และเนื้อหาของตัวอย่างให้เข้ากับสถานการณ์ปัจจุบัน 2) ปรับสัดส่วนของระยะเวลาในการดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในแต่ละแผนการจัดการเรียน

รู้ให้มีความเหมาะสมเพื่อส่งเสริมการสร้างมโนทัศน์ของนักเรียน ให้เป็นไปตามขั้นของการสร้างมโนทัศน์ตามโมเดลของ Lasley & Matczynsky มากที่สุด 3) เพิ่มเติมการเตรียมความพร้อมของผู้เรียนหรือการตรวจสอบความรู้เดิมของผู้เรียนก่อนในบางแผนการจัดการเรียนรู้ เพื่อหลีกเลี่ยงการเกิดมโนทัศน์ที่ไม่ถูกต้องที่มีอยู่ก่อนหน้าของผู้เรียนที่จะเป็นอุปสรรคต่อการเรียนรู้

3. แบบบันทึกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โดยบันทึกข้อมูลที่แสดงออกทางพฤติกรรม ชิ้นงาน ข้อสังเกตที่แสดงออกถึงการสร้างมโนทัศน์ที่เกิดขึ้นในระหว่างการดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ และปรับปรุงแก้ไขแบบบันทึกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์จากคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ โดยการเพิ่มเติมในส่วนของการให้ข้อมูลย้อนกลับของนักเรียนเมื่อได้รับข้อคำถามหรือการสัมภาษณ์แบบไม่เป็นทางการ

#### **การเก็บรวบรวมข้อมูล**

ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ผู้วิจัยได้ดำเนินการเก็บข้อมูลออกเป็น 2 ส่วน ดังนี้

การเก็บรวบรวมข้อมูลในส่วนที่ 1 เพื่อศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ เป็นการเก็บข้อมูลจากกลุ่มเป้าหมายแรก โดยมีขั้นตอนการเก็บข้อมูลดังนี้

1. ผู้วิจัยดำเนินการสอบ โดยนำแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ มาทดสอบกับกลุ่มเป้าหมายแรก เมื่อผู้เรียนได้เรียนเนื้อหา เรื่อง ลำดับและอนุกรมอนันต์ ครบทุกหัวข้อ

2. ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้อาวิเคราะห์ผลแล้วบันทึกเป็นค่าความถี่ของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ที่พบในเรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์

การเก็บรวบรวมข้อมูลในส่วนที่ 2 เพื่อศึกษาผลสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ โดยเก็บข้อมูลกับกลุ่มเป้าหมายที่สอง โดยมีขั้นตอนการเก็บรวบรวมข้อมูลดังนี้

1. ผู้วิจัยดำเนินการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ โดยการจัดการกิจกรรมการเรียนรู้ตามแบบโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsk

2. ผู้วิจัยบันทึกแบบบันทึกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ จากการสังเกตการให้ความร่วมมือ หรือพฤติกรรมผลงานหรือชิ้นงาน และสิ่งที่สังเกตได้จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ตามแบบโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsk ตลอดระยะเวลาในการดำเนินตามแผนจัดการเรียนรู้

3. เมื่อสอนเนื้อหาครบตามแผนการจัดการเรียนรู้ ผู้วิจัยนำแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ มาทดสอบกับกลุ่มเป้าหมายที่สอง

4. ผู้วิจัยนำข้อมูลจากแบบบันทึกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ และข้อมูลจากแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์มาวิเคราะห์ผลและบันทึก

#### **การวิเคราะห์ข้อมูล**

การวิจัยครั้งนี้ มีการวิเคราะห์ข้อมูลเป็นสองส่วน ได้แก่ ส่วนของการศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ และส่วนของผลการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ โดยการวิเคราะห์ข้อมูลทั้งสองส่วนจะได้รับการตรวจสอบและให้ข้อเสนอแนะจากผู้เชี่ยวชาญในด้านเนื้อหา และผู้เชี่ยวชาญในการสอน

ตอนที่ 1 การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์

ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้จากแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ ที่ได้จากกลุ่มเป้าหมายแรกมาวิเคราะห์ เพื่อศึกษาในประเด็นต่อไปนี้

1. วิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ โดยบันทึกค่าความถี่และร้อยละในแต่ละประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ที่พบในเรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์

2. วิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพจากการวิเคราะห์เนื้อหา เกี่ยวกับลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ที่พบ ตามประเภทความคลาดเคลื่อนทั้งหมด 4 ประเภท ได้แก่ 1) การอ้างอิงเกินขอบเขต 2) ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ 3) การตีความผิด และ 4) การมีมโนทัศน์ที่จำกัด

ตอนที่ 2 การศึกษาผลการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับและอนุกรมอนันต์ หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky

ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้จากแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ แบบบันทึกมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ที่ได้จากกลุ่มเป้าหมายที่สองมาวิเคราะห์เพื่อศึกษาในประเด็นต่อไปนี้

1. วิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ โดยบันทึกค่าความถี่และร้อยละในแต่ละประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ที่พบในเรื่อง ลำดับและอนุกรมอนันต์

2. วิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ โดยการวิเคราะห์เนื้อหาจากผลการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ ภายหลังจากจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky

### ผลการศึกษา

การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและผลการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ตามโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ผู้วิจัยนำเสนอผลการวิจัย เป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ผลจากการศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในกลุ่มเป้าหมายที่ 1

1. ความถี่และร้อยละ ของประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ที่พบในแต่ละหัวข้อ

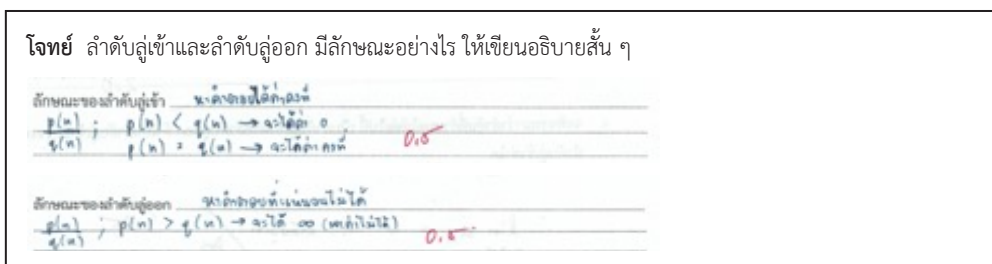
ตารางที่ 1 ความถี่และร้อยละของประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ปีการศึกษา 2562

หัวข้อ	ประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน	ความถี่ (ร้อยละ)
1. นิยามของลำดับอนันต์	การมีมโนทัศน์ที่จำกัด	7 (15.56)
2. ลักษณะการลู่เข้าของลำดับ	การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข การมีมโนทัศน์ที่จำกัด	4 (8.89) 9 (20.00)
3. เงื่อนไขการลู่เข้าของลำดับเลขคณิต และลำดับเรขาคณิต	การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทาง คณิตศาสตร์	3 (6.67)
4. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการลู่เข้าของลำดับ	ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทาง คณิตศาสตร์	6 (13.33)
5. ผลบวกย่อยและการลู่เข้าของอนุกรม	การตีความผิด	3 (6.67)
6. อนุกรมเลขคณิตเรขาคณิต	-	-
7. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการลู่เข้าของอนุกรม	ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทาง คณิตศาสตร์ การมีมโนทัศน์ที่จำกัด	7 (15.56) 5 (11.11)

จากตารางที่ 1 พบว่าประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่มีความถี่จากมากไปน้อย คือ 1) การมีมโนทัศน์ที่จำกัด พบในหัวข้อ ลักษณะการลู่เข้าของลำดับ (ความถี่ 9 เท่ากับร้อยละ 20.00) นิยามของลำดับอนันต์ (ความถี่ 7 เท่ากับร้อยละ 15.56) และทฤษฎีบทเกี่ยวกับการลู่เข้าของอนุกรม (ความถี่ 5 เท่ากับร้อยละ 11.11) 2) ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ พบในหัวข้อเงื่อนไขการลู่เข้าของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต (ความถี่ 8 เท่ากับร้อยละ 17.78) ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการลู่เข้าของอนุกรม (ความถี่ 7 เท่ากับร้อยละ 15.56) และทฤษฎีบทเกี่ยวกับการลู่เข้าของลำดับ (ความถี่ 6 เท่ากับร้อยละ 13.33) 3) การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข พบในหัวข้อลักษณะการลู่เข้าของลำดับ (ความถี่ 4 เท่ากับร้อยละ 8.89) และเงื่อนไขการลู่เข้าของลำดับ (ความถี่ 3 เท่ากับร้อยละ 6.67) 4) การตีความผิด พบในหัวข้อผลบวกย่อยและการลู่เข้าของอนุกรม (ความถี่ 3 เท่ากับร้อยละ 6.67)

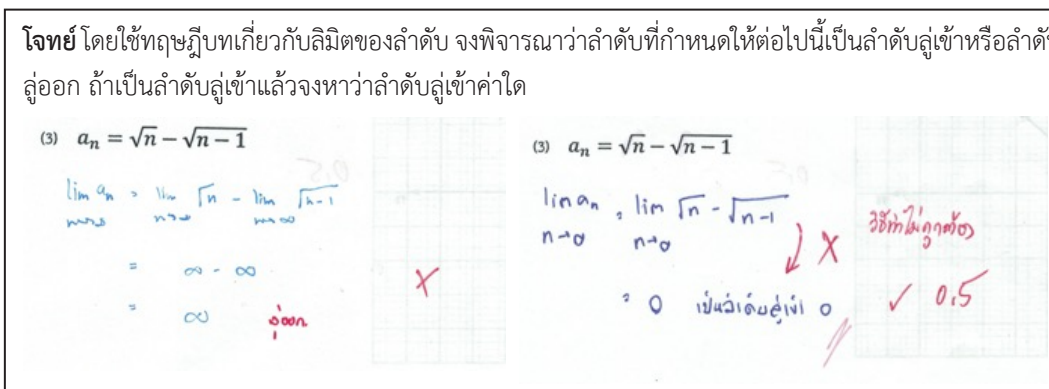
2. ตัวอย่างลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์

1) การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข (Overgeneralizations) ตัวอย่างดังรูปที่ 1 แสดงการเลือกเอาส่วนย่อยของทฤษฎีบทมาใช้ ซึ่งไม่สามารถใช้อธิบายได้ในกรณีทั่วไปหรือครอบคลุม จะเห็นว่าคำตอบไม่สามารถอ้างอิงถึงลักษณะการลู่เข้าหรือลู่ออกของลำดับที่อยู่ในรูปแบบอื่นได้



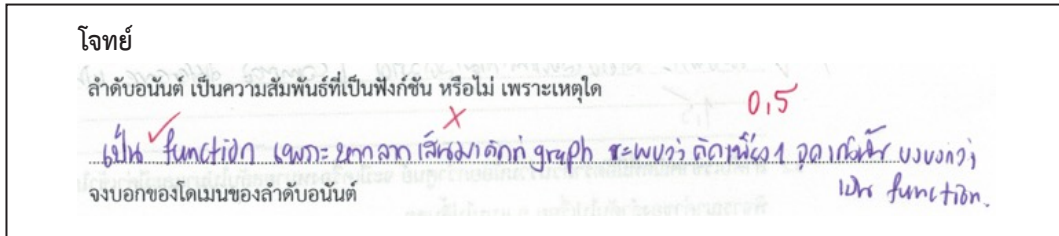
รูปที่ 1 การเลือกเอาทฤษฎีบทที่มีความเฉพาะเจาะจงมาใช้ในรูปแบบทั่วไป

2) ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ (Defective understanding about mathematics truths) ตัวอย่างดังรูปที่ 2 แสดงนักเรียนหาคำตอบจากการคาดการณ์เกี่ยวกับผลต่างและขนาดของจำนวน เมื่อต้องพิจารณาค่าที่อนันต์ โดยไม่เลือกใช้การแสดงวิธีทำที่เป็นขั้นตอน



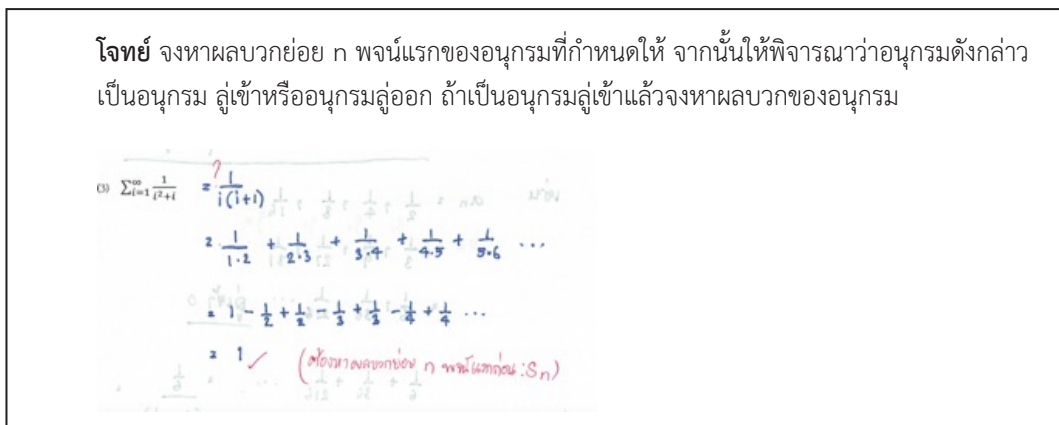
รูปที่ 2 การเขียนคำตอบที่ได้จากการคาดการณ์

3) การมีมโนทัศน์ที่จำกัด (Limited Conceptions) ตัวอย่างดังรูปที่ 3 แสดงการเขียนอธิบายในสิ่ง que ที่เข้าใจเกี่ยวกับนิยามของฟังก์ชัน แต่ไม่สามารถเขียนหรือเรียบเรียงเพื่อให้มีความถูกต้องโดยทั่วไปได้ การอธิบายไม่สมบูรณ์ครบถ้วน มีส่วนที่สำคัญขาดหาย มีความเข้าใจเพียงบางส่วนไม่สามารถสรุปออกมาได้อย่างครอบคลุมและนำไปใช้ได้



รูปที่ 3 แสดงการให้เหตุผลที่ไม่สมบูรณ์

4) การตีความผิด (Mistranslations) ตัวอย่างดังรูปที่ 4 จะเห็นได้ว่านักเรียนไม่ทำตามที่โจทย์ระบุที่ต้องการให้หาผลบวกย่อย n พจน์แรกแล้วจึงพิจารณาค่าของผลบวกอนันต์จากการใช้ทฤษฎีบทลิมิตของลำดับ ทำให้ขาดกระบวนการหรือขั้นตอนการเชื่อมโยงความรู้ในเรื่องลำดับและทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตมาใช้ได้



รูปที่ 4 แสดงการไม่ทำตามโจทย์

**ตอนที่ 2** การศึกษาผลการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ ของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 6 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky

1. ความถี่และร้อยละในแต่ละประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์หรือข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ที่พบในเรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์

**ตารางที่ 2** ความถี่และร้อยละของประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์หรือข้อผิดพลาด เรื่อง ลำดับและอนุกรมอนันต์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ปีการศึกษา 2563

N = 32

หัวข้อ	ประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน	ความถี่ (ร้อยละ)
1. นิยามของลำดับอนันต์	-	-
2. ลักษณะการลู่เข้าของลำดับ	การมีมโนทัศน์ที่จำกัด	1 (3.13)
3. เงื่อนไขการลู่เข้าของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต	-	-
4. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการลู่เข้าของลำดับ	ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์	2 (6.25)
5. ผลบวกย่อยและการลู่เข้าของอนุกรม	-	-
6. อนุกรมเลขคณิตเรขาคณิต	-	-
7. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการลู่เข้าของอนุกรม	-	-

จากตารางที่ 2 พบว่ามีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ 2 ประเภท คือ 1) การมีมโนทัศน์ที่จำกัด ซึ่งพบในหัวข้อลักษณะการลู่เข้าของลำดับ (ความถี่ 1 เท่ากับร้อยละ 3.13) 2) ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ ซึ่งพบในหัวข้อทฤษฎีบทเกี่ยวกับการลู่เข้าของลำดับ (ความถี่ 2 เท่ากับร้อยละ 6.25)

2. ผลการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ ของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษา ปีที่ 6 ตามโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky โดยการวิเคราะห์เนื้อหา จากการศึกษาผลการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ตามโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ ภายหลังจากจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ แบ่งออกเป็น 2 ประเด็นได้ดังนี้

2.1 ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน พบว่ามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นพบได้ในความถี่ที่น้อยมาก และลักษณะของความคลาดเคลื่อนมีลักษณะของความผิดพลาดที่เกิดขึ้นเพียงบางส่วน เป็นความผิดพลาดที่ไม่ได้เป็นประเด็นหลักของการแก้ปัญหาหรือโจทย์นั้น จากรูปที่ 5 แสดงให้เห็นว่านักเรียนใช้กระบวนการทางพีชคณิตในการแก้ปัญหาโดยไม่ได้ใช้ความรู้สึกเชิงปริมาณซึ่งเป็นความเข้าใจที่ถูกต้องและเป็นส่วนสำคัญของการแก้ปัญหา แต่มีความผิดพลาดในขั้นตอนการสรุปคำตอบนั้นว่าเป็นความผิดพลาดที่เกิดจากความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ และจากรูปที่ 6 แสดงการให้คำตอบที่ถูกต้องแต่ยังไม่สมบูรณ์โดยสังเกตได้ว่านักเรียนมีมโนทัศน์ขึ้นแล้วแต่ยังไม่สมบูรณ์ การเขียนอธิบายยังไม่สามารถนำไปใช้ในกรณีทั่วไป นับว่าเป็นความผิดพลาดที่อยู่ในลักษณะของการมีมโนทัศน์ที่จำกัด

**โจทย์** จงพิจารณาว่าลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้าแล้วจงหาลำดับลู่เข้าค่าใด

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \quad \infty - \infty \text{ ใช้ } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{1} \cdot \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \quad \text{ใช้ } \frac{0}{\infty}$$

$$= \frac{1}{\infty} \text{ ค่า } \frac{1}{\infty} \text{ ?}$$

รูปที่ 5 ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในช่วงท้ายของการแก้โจทย์

**โจทย์** ลำดับลู่เข้าและลำดับลู่ออก มีลักษณะอย่างไร ให้เขียนอธิบายสั้น ๆ

ลักษณะของลำดับลู่เข้า เป็น  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  เมื่อ  $n$  มีค่ามากๆ ค่า  $a_n$  จะเข้าใกล้  $L$  ใกล้เคียง

ลักษณะของลำดับลู่ออก เป็น  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  หรือ  $-\infty$  เมื่อ  $n$  มีค่ามากๆ ค่า  $a_n$  จะเข้าใกล้  $\infty$  หรือ  $-\infty$  ใกล้เคียง

รูปที่ 6 การให้คำตอบที่ยังไม่สมบูรณ์

2.2 ลักษณะของการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ตามรูปแบบโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky พบข้อสังเกตหรือพฤติกรรมที่แสดงได้ว่าเกิดมโนทัศน์ ดังนี้

1) นักเรียนสามารถระบุ แยกแยะหรือบอกได้ว่าสิ่งใดที่เป็นตัวอย่างหรือสิ่งใดที่ไม่เป็นตัวอย่าง โดยสามารถยกตัวอย่างได้อย่างชัดเจน พร้อมกับระบุเกณฑ์ หรือสมบัติที่นำมาใช้ ในระหว่างการทำตามแผนการเรียนรู้ในขั้นตอนของการสำรวจการสร้างมโนทัศน์ และขั้นการตรวจสอบมโนทัศน์ ซึ่งสอดคล้องกับโมเดลการสร้างมโนทัศน์ในขั้นการจัดกลุ่มข้อมูลและขั้นการขยายประเภทของข้อมูล

2) นักเรียนเลือกใช้การแสดงขั้นตอน วิธีทำในการแก้โจทย์แทนการใช้ความรู้สึกหรือสัญชาตญาณ ภายหลัง ที่นักเรียนได้สำรวจลำดับในรูปแบบไม่กำหนดที่อยู่ในรูปของ หรือ จากตัวอย่างที่หลากหลาย และทดสอบข้อคาดการณ์ของตนเอง เกิดการแก้ไขปรับปรุงมโนทัศน์เดิม ดังแสดงผลได้จากรูปที่ 7

**โจทย์** โดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับ จงพิจารณาว่าลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก ถ้าเป็นลำดับ ลู่เข้าแล้วจงหาลำดับลู่เข้าค่าใด

$$a_n = n - \sqrt{n^2 + n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \sqrt{n^2 + n})(n + \sqrt{n^2 + n})}{(n + \sqrt{n^2 + n})}$$

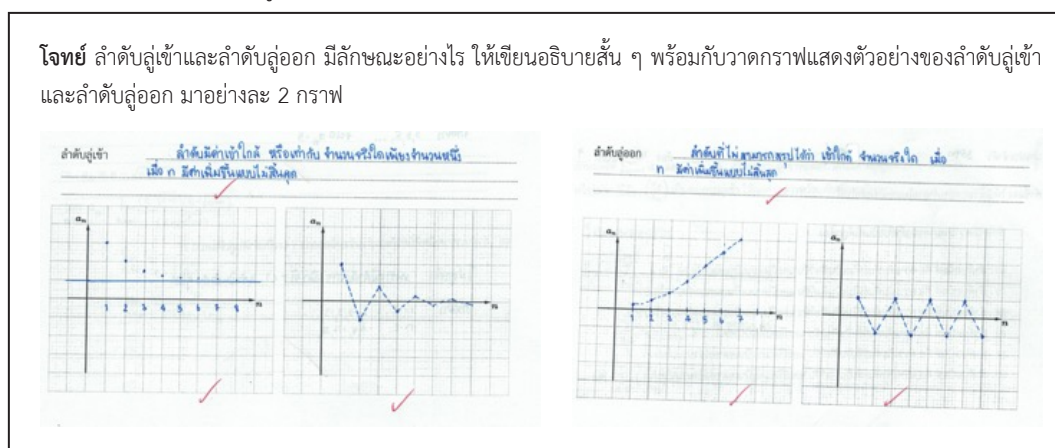
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n + \sqrt{n^2 + n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{-1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

รูปที่ 7 ตัวอย่างการแสดงการหาคำตอบที่ไม่ได้ใช้ความรู้สึกหรือสัญชาตญาณ

3) นักเรียนแสดงคำตอบที่หลากหลาย มีรูปแบบที่มีความแตกต่างกันมากขึ้น โดยสังเกตได้จากกรให้คำตอบ จากคำถามหรือสถานการณ์ที่สามารถตอบได้หลากหลายคำตอบ แตกต่างไปจากการให้คำตอบหรือการยกตัวอย่างในช่วงแรกเป็นไปในลักษณะของคำตอบหรือตัวอย่างที่ใกล้เคียงกัน เมื่อนักเรียนมีมโนทัศน์ที่กว้างขึ้นการแสดงผลคำตอบหรือตัวอย่างจะมีความหลากหลาย มีรายละเอียดหรือข้อสังเกตที่เห็นได้อย่างชัดเจน มีมโนทัศน์ที่กว้างขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 8



รูปที่ 8 แสดงการให้คำตอบที่สามารถอธิบายในรูปทั่วไปและการยกตัวอย่างที่หลากหลาย

### อภิปรายผลการศึกษา

ผลการวิจัยจากการศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ และผลของการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับและอนุกรมอนันต์ ภายหลังจากจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky สามารถแยกผลออกเป็น 2 ส่วน ดังนี้

1. ผลการวิจัยจากการศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ที่พบในเรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ สามารถจำแนกมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนตามแนวคิดของการจัดประเภทของความคลาดเคลื่อนของ Graeber (1992) และ Wylie and Ciofalo (2008) ออกเป็น 4 ประเภท ได้แก่ 1) การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข 2) ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ 3) การตีความผิด และ 4) การมีมโนทัศน์ที่จำกัด โดยประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่พบโดยเรียงลำดับจากความถี่มากไปน้อย ดังนี้

1) การมีมโนทัศน์ที่จำกัด ซึ่งพบว่าความคลาดเคลื่อนประเภทนี้เกิดขึ้นในหัวข้อลักษณะการลู่ออกของลำดับ นิยามของลำดับอนันต์ และทฤษฎีบทเกี่ยวกับการลู่ออกของอนุกรม จะเห็นว่านักเรียนจำเป็นต้องมีความรู้เดิมที่ถูกต้อง หรือมีมโนทัศน์เดิมที่สมบูรณ์ จึงจะสามารถเชื่อมโยงและนำไปใช้ได้ การมีมโนทัศน์ที่ไม่สมบูรณ์หรือมีความไม่ต่อเนื่อง กันจึงทำให้นักเรียนไม่สามารถนำความรู้ไปใช้ อาจเนื่องมาจากผู้เรียนยังขาดการสร้างความรู้ในเชิงมโนทัศน์ในเรื่อง ก่อนหน้าหรือการสร้างมโนทัศน์ในเรื่องใดเรื่องหนึ่งยังไม่สมบูรณ์ สอดคล้องกับเวทฤทธิ์ อังกะภัทรขจร (2556) ที่กล่าวว่า การเรียนการสอนเนื้อหาต่าง ๆ ในวิชาคณิตศาสตร์มักสอนเป็นบท ๆ หรือเป็นเรื่อง ๆ แยกจากกัน ขาดการเชื่อมโยงไปสู่เนื้อหาที่เกี่ยวข้อง นักเรียนจึงขาดการเชื่อมโยงความรู้ในเชิงมโนทัศน์ที่เป็นความรู้พื้นฐานที่จำเป็น ทำให้พบลักษณะของความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นคือนักเรียนไม่สามารถเขียนหรืออธิบายให้คำตอบอยู่ในรูปกรณีทั่วไปได้ มีการยกตัวอย่างที่ไม่มีความหลากหลาย ตัวอย่างไม่มีความแตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัดเจน หรือไม่สามรถจัดการกับข้อมูลที่เข้ามาใหม่ได้

2) ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ เป็นความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนจากการใช้ความรู้ที่มาจากสัญชาตญาณ ความรู้สึกนึกคิด หากนำมาใช้โดยไม่ระมัดระวังหรือขาดการพิจารณาให้

ถึถ้วนแล้วยอมส่งผลให้ได้อัซสรูปที่ไม่ถูคต้อง พบว่ลัคษณะของควมคลาดเคลือ่นที่พบคือนักเรียนใช้ควมรู้สิค  
มำประคอบการตัดสิใจค้ตอบ โดยมักเกิดขึ้เมื่อต้องพิจารณาเกือวกับควมเป็นอนันต์ที่ไม่สมมำแทนค้ได้  
นักเรียนจึงเลือกใช้การค้การค้ค้ตอบจากประสคการณ์เดิมที่ยังไม่เพียงพอ การพบหรือการได้สำรวจตัวอย่าง  
ที่ยังไม่ควมหลกหลาย หรือประสคการณ์ที่ไม่เกิดข้อขัดแย้งกับสมมำฐานหรือข้อค้การค้ค้ตนเองทำให้  
นักเรียนละเลยที่จะเลือกใช้กระบวนการ วิธการที่เป็นล้ดับขึ้ตอนในการแก้ปัญห

3) การอ้งอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไซ โดยควมสอดคล้องคือพบควมคลาดเคลือ่นที่เกิดจาก  
การนำหลักการของการพิจารณาล้ดับด้วยการอ้งอิงจากล้ดับในรูปแบบหนึ่งเพียงรูปแบบเดียวมำเป็นข้อสรูป  
ในกรณีท้วไป เนื่องมำจากนักเรียนใช้การจคจำเกือวกับสูตร วิธการ มกกว่การใช้ควมซ้ใจ ขาดการตรจจสอบ  
เงื่อนไซ ข้อก้กำหนด หรือข้อควมระวังที่มีอยู่ในบทนิยาม กฎ ทฤษฎีบท หรือสูตร ซึ่งสอดคล้องกับ อัมพร ม้คคอง  
(2551) และ Earls (2017) ที่พบว่นักเรียนจะให้ควมสำค้ญกับสูตรที่ได้จากทฤษฎีบทมกกว่เงื่อนไซของการนำ  
ไปใช้ นักเรียนใช้การทอ้งจำ เลือกใช้กระบวนการแก้ปัญหในแบบที่คุ้นเคย และเมื่อ นำไปแก้ปัญหที่นอกเหนือ  
จากขอบเขตหรือสิ่งทีก้กำหนดให้จะส่งผลให้ได้อัซสรูปที่ไม่ถูคต้อง

4) การตีควมผิด พบประเกทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลือ่นในประเกทนี้ในควมถึที่น้อยที่สุด ซึ่ง  
พบในลัคษณะที่นักเรียนไม่ทำตามที่จคยก้กำหนด ทำให้ได้ค้ตอบที่ไม่ตรงกับที่จคยต้องการ

การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลือ่นทางคณิตศาสตร์ สามารถนำมาใช้แยกประเกทของมโนทัศน์ที่  
คลาดเคลือ่นทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้ในเรื่องล้ดับและอนุกรมอนันต์ ทำให้ผู้สอนมีควมซ้ใจถึงสาเหตุที่มำ  
ของควมคลาดเคลือ่นที่เกิดขึ้ นำไปเป็นแนวทงเพื่อแก้ไขและพัฒนามโนทัศน์ที่คลาดเคลือ่นที่เกิดขึ้ได้

2. ผลของการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องล้ดับและอนุกรมอนันต์ จากการจัดกิจกรรม  
การเรียนรู้ ตามโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky พบประเกทของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์  
ที่คลาดเคลือ่น เรื่องล้ดับและอนุกรมอนันต์ เกิดขึ้เพียง 2 ประเกท จากทั้งหมด 4 ประเกท โดยพบควมถึน้อย  
ดังนี้ 1) การมีมโนทัศน์ที่จคก้ พบควมถึเท่ากับ 1 คิดเป็นร้อยละ 3.13 และ 2) ควมซ้ใจที่บกพร่องเกือวกับ  
ข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ พบควมถึเท่ากับ 2 คิดเป็นร้อยละ 6.25 ในกรณีควมคลาดเคลือ่นประเกทการมี  
มโนทัศน์ที่จคก้ที่เกิดขึ้อาจเนื่องมำจากการขาดควมสนใจในขันการสำรวจการสร้างมโนทัศน์ เนื่องจคเป็นขัน  
ตอนที่ต้องใช้เวลาในการสำรวจตัวอย่างด้วยตัวเอง นักเรียนจคเป็นต้องสำรวจตัวอย่างที่มีจนวนมกเพียงพอ ทำให้  
การพัฒนา มโนทัศน์เกิดขึ้แบบไม่สมบูรณ่ นักเรียนจะมีมโนทัศน์ในส่วที่ตนเองมีประสคการณ์เท่านั้น สอดคล้อง  
กับ Joyce & Weil (2000) ที่กล่าวถึงการเรียนรู้มโนทัศน์ได้มำจากประสคการณ์ของผู้เรียนที่จคเป็นสิคจากข้อมูล  
ที่เพียงพอที่จะสร้างสมมำฐานจนสามารถแยกข้อมูลที่เป็นตัวอย่างและไม่เป็นตัวอย่างด้วยตัวผู้เรียนเอง และมโน  
ทัศน์ที่คลาดเคลือ่นทางคณิตศาสตร์ในประเกทของควมซ้ใจที่บกพร่องทางคณิตศาสตร์เกือวกับข้อเท็จจริงทาง  
คณิตศาสตร์ที่พบเกิดจากนักเรียนไม่ได้ตรจจสอบมโนทัศน์ของตนเอง เพื่อพัฒนาและปรับปรุ้มมโนทัศน์ โดยอาจ  
เกิดขึ้ขณะทีผู้สอนให้ตัวอย่างบางตัวอย่างที่แตกต่างไปจากที่ผู้เรียนได้นำเสนอมโนทัศน์แล้วนักเรียนไม่ได้ตรจจ  
สอบทำให้นักเรียนยังคงมโนทัศน์เดิมของตนเองไว้ และจคการพิจารณาลัคษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลือ่น  
ที่พบนั้น พบว่ลัคษณะของควมคลาดเคลือ่นจะเป็นควมคลาดเคลือ่นในบางส่วและเมื่อเทียบกับควมคลาดเคลือ่น  
ในส่วการศึกษา มโนทัศน์ที่ควมคลาดเคลือ่นมีควมชัดเจนมกกว่ ในขณะทีไม่พบควมคลาดเคลือ่น  
ของมโนทัศน์เกิดขึ้กับนักเรียนส่วใหญ่และพบว่การเกิดมโนทัศน์ ของนักเรียนตามโมเดลการสร้างมโนทัศน์  
ของ Lasley & Matczynsky จะเกิดขึ้ในระหว่งการด้เนินการ ตามขันต่าง ๆ ในลัคษณะของการประคอบขัน  
มโนทัศน์ย่อย ๆ จนเป็นมโนทัศน์ที่สมบูรณ่ในขันตอนสุดท้าย ดังนี้

ขันที่ 1 ขันการผลิตข้อมูล พบว่ในบางห้วขันนั้นครูจคเป็นต้องทบทวนมโนทัศน์เดิม เช่น ควมสัมพันธ์  
และฟังก์ชัน การทบทวนประเด็นสำค้ญของล้ดับเรขาคณิตแบบจคก้ สมบัติและการใช้สัญลักษณ์แทนการบวก

ในอนุกรม เพื่อให้ให้นักเรียนมีความพร้อมในการเรียนรู้มโนทัศน์ใหม่ผ่านการเชื่อมโยงกับมโนทัศน์เดิม นักเรียนจะใช้ข้อคำถามในการปรับปรุงหรือแก้ไขมโนทัศน์เดิมในความรู้ที่ผ่านมาเพื่อเตรียมความพร้อมสำหรับการเรียนรู้มโนทัศน์ใหม่

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นการจัดกลุ่มข้อมูลพบว่านักเรียนเริ่มสร้างมโนทัศน์ขึ้นมาในขั้นตอนนี้ได้ชัดเจนมากที่สุดจากการสังเกตพฤติกรรมและกระบวนการคิด การจัดการข้อมูลของนักเรียนเป็นการเริ่มต้นการสร้างมโนทัศน์ด้วยตนเองของผู้เรียน โดยครูทำหน้าที่เพียงเป็นผู้สนับสนุนให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์มากที่สุด ซึ่งนักเรียนสามารถสร้างกฎเกณฑ์บางอย่างผ่านการสำรวจตัวอย่างและสร้างข้อคาดการณ์ขึ้นมาได้

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นขยายความประเภข้อมูล เป็นขั้นตอนการตรวจสอบ โดยแบ่งเป็นสองส่วน คือ ส่วนแรก คือ ให้นักเรียนได้นำเสนอแนวคิดที่ได้ และอีกส่วนหนึ่งคือครูให้ข้อมูลใหม่เข้ามาทั้งที่เป็นตัวอย่างและไม่เป็นตัวอย่าง มโนทัศน์ที่เกิดขึ้นอาจมาจากการที่ผู้เรียนได้ตรวจสอบแนวคิดหรือความเข้าใจของตนเองในส่วนที่สองที่ผู้สอนให้ข้อมูลใหม่ที่เพิ่มเข้ามา นักเรียนจึงปรับปรุงและแก้ไขมโนทัศน์ให้มีความถูกต้อง โดยนักเรียนสามารถแสดงได้ว่าสิ่งใดเป็นตัวอย่างและสิ่งใดที่ไม่เป็นตัวอย่าง สอดคล้องกับ นาดยา ปิลันธนานนท์ (2542) และ สุวิทย์ มูลคำ (2552) ที่กล่าวถึงลักษณะของนักเรียนที่เกิดมโนทัศน์ว่า เมื่อนักเรียนเกิดมโนทัศน์แล้วผู้เรียนจะสามารถบอก ระบุ เรียกชื่อมโนทัศน์นั้นได้ สามารถจำแนก แยกแยะ ยกตัวอย่างและสิ่งที่ไม่ใช่ตัวอย่างของมโนทัศน์นั้น สามารถบอกลักษณะของมโนทัศน์นั้นจากความรู้ความเข้าใจของตนเองด้วยภาษาและคำพูดของตนเอง รวมถึงสามารถบอกลำดับขั้นของมโนทัศน์ว่าลำดับขั้นที่สูงกว่า ลำดับขั้นในระดับเดียวกัน หรือลำดับขั้นที่ต่ำกว่าเป็นอย่างไร แสดงได้ว่านักเรียนมีการปรับปรุงมโนทัศน์เดิมของตนเอง ในกรณีที่พบตัวอย่างค้าน โดยเฉพาะเมื่อผ่านการพิสูจน์เชิงประจักษ์จากการทดลองด้วยตัวของนักเรียนเรียกว่าเป็นขั้นตอนของการตรวจสอบมโนทัศน์ของนักเรียน

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นการสรุปปิด เป็นขั้นการสร้างข้อสรุปให้เป็นรูปทั่วไปโดยการสรุปและเชื่อมโยงความสัมพันธ์ต่าง ๆ เป็นลักษณะของการใช้การคิดวิเคราะห์ที่จะทำให้นักเรียนเข้าใจลึกซึ้งจนสามารถสร้างมโนทัศน์ที่สมบูรณ์ด้วยตนเอง พบว่า มโนทัศน์ที่สร้างขึ้นอย่างสมบูรณ์ในแต่ละหัวข้อเกิดขึ้นในขั้นตอนนี้ สอดคล้องกับ สิริพร ทิพย์คง (2561) ที่กล่าวถึงการเรียนรู้มโนทัศน์ที่จะต้องเป็นไปตามลำดับขั้นตอน ซึ่งในขั้นตอนของการเลือกข้อสมมติฐาน หากปรากฏว่าสมมติฐานนั้นถูกก็คงไว้ ถ้าผิดก็ต้องกลับไปสังเกตใหม่ปลงตั้งสมมติฐานขึ้นใหม่แล้วทดสอบจนกว่าจะถูก

การศึกษาผลการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน พบว่าผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ตามขั้นการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky ที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนได้สร้างมโนทัศน์ ตรวจสอบมโนทัศน์ ปรับปรุงมโนทัศน์ ขยายมโนทัศน์ และสรุปมโนทัศน์ผ่านการจัดระบบเชื่อมโยงข้อมูล สร้างและทดสอบสมมติฐานบนข้อมูลจากการเปรียบเทียบ การจำแนกความแตกต่าง การจัดประเภท การประยุกต์ใช้ การวิเคราะห์และการสังเคราะห์ข้อมูล

## ข้อเสนอแนะ

### ข้อเสนอแนะที่ได้จากการวิจัย

1. การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน เรื่องลำดับและอนุกรมอนันต์ พบว่าความคลาดเคลื่อนส่วนใหญ่เกิดขึ้น ในหัวข้อของลำดับอนันต์ ดังนั้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ควรเน้นสร้างและการพัฒนามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในหัวข้อของลำดับอนันต์ และการตรวจสอบข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นในหัวข้อของอนุกรมอนันต์
2. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามโมเดลการสร้างมโนทัศน์ของ Lasley & Matczynsky เน้นการสร้างมโนทัศน์ที่เกิดจากตัวนักเรียน ดังนั้นในขั้นตอนการตรวจสอบมโนทัศน์หรือขั้นตอนการขยายประเภทของข้อมูลเมื่อพบความคลาดเคลื่อนของมโนทัศน์ ควรเปิดโอกาสให้นักเรียนปรับปรุง หรือแก้ไขมโนทัศน์ที่ยังไม่สมบูรณ์ด้วยตัวนักเรียนเองให้มากที่สุด ผู้สอนจะต้องไม่รีบร้อนแก้ไขมโนทัศน์อย่างทันทีด้วยตัวผู้สอนเอง

### ข้อเสนอแนะสำหรับการทำวิจัยในครั้งต่อไป

1. ควรต่อยอดการศึกษามโนทัศน์ที่ได้รับการพัฒนา เช่น ความคงทนของมโนทัศน์ หรือผลของการพัฒนามโนทัศน์ที่ได้ส่งผลต่อความสามารถอื่น ๆ เช่นความสามารถในการให้เหตุผล หรือความสามารถในการแก้ปัญหา
2. ควรศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่อาจเกิดขึ้นพร้อมกันมากกว่าหนึ่งประเภท โดยพัฒนาจากผลการศึกษา มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่พบจากการศึกษาในประเด็นย่อยในเนื้อหาของอนุกรมอนันต์ให้มีความละเอียดมากยิ่งขึ้น

## บรรณานุกรม

- ทีศนา แคมมณี. (2556). *รูปแบบการเรียนการสอน: ทางเลือกที่หลากหลาย*. กรุงเทพฯ: แอคทีฟ พรินท์.
- นาคยา ปิลันธนานนท์. (2542). *การเรียนรู้ความคิดรวบยอด*. กรุงเทพฯ: แม็ค.
- พรธิดา สุขกรม. (2557). *การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2 (วิทยานิพนธ์ปริญญา มหาบัณฑิต)* กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- เวชฤทธิ์ อังกะนภัทรขจร. (2556). การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์. *วารสารศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา*, 25(2), 93-108.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2552). *เอกสารพัฒนาวิชาชีพครู ครุคณิตศาสตร์ มืออาชีพ*. ใน *โครงการพัฒนาเครือข่ายการเรียนรู้ ผู้สอนวิทยาศาสตร์คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 1-3*.
- สิริพร ทิพย์คง. (2561). *เอกสารคำสอนวิชา 158522 ทฤษฎีและวิธีการสอนวิชาคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- สุวิทย์ มูลคำ. (2552). *21 วิธีการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนากระบวนการคิด*. กรุงเทพฯ: ภาพพิมพ์
- อัมพร ม้าคอง. (2551). การพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการได้มาซึ่งมโนทัศน์ และคำถามระดับสูง. (รายงานผลการวิจัย). กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Chambers, P. (2008). *Teaching Mathematics: Developing as a reflective secondary teacher*. London: SAGE.
- Earls, D. (2017). *Student's Misconceptions of Sequences and Series in Second Semester Calculus* (Doctoral dissertation). USA: University of New Hampshire.
- Graeber, O. A. (1992). *Methods and Materials for Preservice Teacher Education in Diagnostic and Prescriptive Teaching of Secondary Mathematics* (Project Final Report). USA: University of Maryland.
- Jordaan, T. (2005). *Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students*. (Master's thesis) South Africa: University of South Africa.
- Joyce, M. & Weil, M. (2000). *Models of Teaching* (6<sup>th</sup> ed.). Boston : Allyn and Bacon.
- Lasley, T.J., & Matczynski, T.J. 2002. *Instructional Models: Strategies for Teaching in a Diverse Society* (2<sup>nd</sup> ed.). Belmont, CA: Wadsworth.
- Schnepper, L.C., & McCoy, L.P. (2013). Analysis of misconceptions in high school mathematics. *Networks: An On-line Journal for Teacher Research*, 15(1), 1-8.
- Wylie, E. C. & Ciofalo, J. F. (2008). Supporting teachers use of individual diagnostic items. *Teachers College Record*. Retrieved from [https://www.researchgate.net/publication/261216071\\_Supporting\\_teachers'\\_use\\_of\\_individual\\_diagnostic\\_items](https://www.researchgate.net/publication/261216071_Supporting_teachers'_use_of_individual_diagnostic_items)

### Translated Thai References

- Angganapattarakajorn, V. (2013). A study on mathematical concepts of mathematics major students. *Burapha University Journal of Education*, 25(2), 93-108. [in Thai]
- Khammanee, T. (2013). *Method of Teaching: Wide Choice*. Bangkok: Active Print. [in Thai]
- Makanong, A. (2008). A development of mathematical concepts by using the concept formation and high level questions (Research Report). Bangkok: Chulalongkorn University. [in Thai]
- Mulkam, S. (2009). 21 Learning managements for develop of thinking process. Bangkok: Pappim [in Thai]
- Pilanthananont, N. (1999). *Conceptual Learning*. Bangkok: Mac. [in Thai]
- Sukkrom, P. (2014). A study of misconceptions and mistakes in mathematics of eleventh grade students in schools under the secondary educational service area office 1 and 2 (Master's thesis). Bangkok: Chulalongkorn University. [in Thai]
- The institute for the promotion of teaching Science and Technology. (2009). Professional mathematics teacher, *Project development mathematics and sciences teachers in primary and elementary levels*. Bangkok. [in Thai]
- Thipkong, S. (2018). *Documentation for course theory and method of mathematics teaching course code 158522*: Bangkok: Kasetsart University. [in Thai]