

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่  
Chiang Mai University

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

1. อาจารย์สุวิทย์ คงดี  
อาจารย์ 2 ระดับ 6 โรงเรียนท่าบ่อ อำเภوتاบ่อ  
จังหวัดหนองคาย
2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุภศักดิ์ บุตรดีสุวรรณ  
ภาควิชาคณิตศาสตร์ สถาบันราชภัฏอุดรธานี
3. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ศิริพร พัสตร  
ภาควิชาคณิตศาสตร์ สถาบันราชภัฏอุดรธานี

## ภาคผนวก ข

## แผนการสอนวิชาคณิตศาสตร์

## หน่วยที่ 1

## ระยะห่างระหว่างจุดสองจุด

## คาบที่ 1

เรื่อง ระยะห่างระหว่างจุดสองจุดบนแกน  $x$  แกน  $y$  และแนวขนานแกน  $x$  แกน  $y$   
จุดประสงค์ปลายทาง

นักเรียนสามารถหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุดได้

จุดประสงค์นำทาง

1. นักเรียนสามารถหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุด ที่อยู่ในแนวเส้นตรงที่ขนานแกน  $x$  ได้
2. นักเรียนสามารถหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุด ที่อยู่ในแนวเส้นตรงที่ขนานแกน  $y$  ได้

สาระสำคัญ

1. ความยาว  $\overline{AB}$  เขียนแทนด้วย  $AB$
2. ระยะห่างระหว่างจุด  $P_1(x_1, y)$  และ  $P_2(x_2, y)$  เท่ากับ  $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$
3. ระยะห่างระหว่างจุด  $P_1(x, y_1)$  และ  $P_2(x, y_2)$  เท่ากับ  $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$

เนื้อหา

1. ระยะห่างระหว่างจุดสองจุด ที่ขนานแกน  $x$
2. ระยะห่างระหว่างจุดสองจุด ที่ขนานแกน  $y$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ครูให้นักเรียนทบทวนความรู้เกี่ยวกับเส้นจำนวนจริงจากเอกสารประกอบการสอน (1)

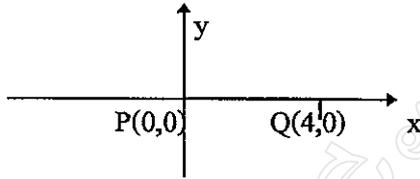
ขั้นสอน

1. ครูบอกให้นักเรียนทราบว่า ระยะห่างระหว่างจุด  $P$  ถึงจุด  $Q$  เขียนแทนด้วย  $PQ$
2. ครูกำหนดตัวอย่างการหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุดที่ขนานแกน  $x$  และแกน  $y$  ให้

นักเรียนพิจารณาไปพร้อมกัน โดยครูใช้กระดานกราฟช่วยในการสอน

กรณีที่ 1 จุดสองจุดใด ๆ บนแกน x

1)  $P(0,0)$  และ  $Q(4,0)$

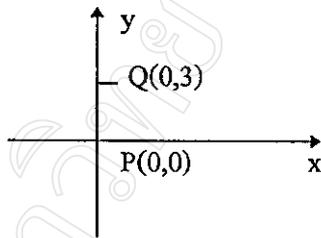


จากรูป

$$PQ = |0 - 4| = |4 - 0| = 4$$

กรณีที่ 2 จุดสองจุดใด ๆ บนแกน y

1)  $P(0,0)$  และ  $Q(0,3)$

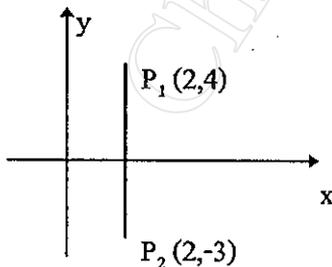


จากรูป

$$PQ = |0 - 3| = |3 - 0| = 3$$

กรณีที่ 3 จุดสองจุดใด ๆ ที่ขนานแกน x หรือแกน y

1)  $P_1(2,4)$  และ  $P_2(2,-3)$



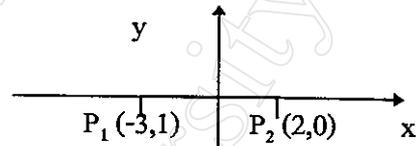
จากรูป

$$P_1P_2 = |4 - (-3)| = |(-3) - 4| = 7$$

ขั้นสรุป

ครูให้นักเรียนสรุปการหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุด บนแกน x แกน y และขนานแกน x แกน y และครูใช้แผนภูมิสรุปประกอบการสรุปของนักเรียน ดังนี้

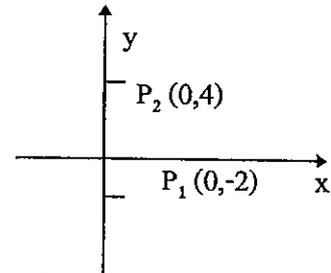
2)  $P_1(-3,0)$  และ  $P_2(2,0)$



จากรูป

$$P_1P_2 = |2 - (-3)| = |(-3) - 2| = 5$$

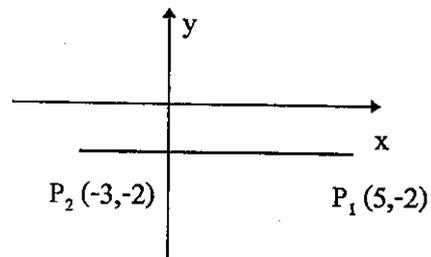
2)  $P_1(0,-2)$  และ  $P_2(0,4)$



จากรูป

$$P_1P_2 = |(-2) - 4| = |4 - (-2)| = 6$$

2)  $P_1(5,-2)$  และ  $P_2(-3,-2)$



จากรูป

$$P_1P_2 = |(-3) - 5| = |5 - (-3)| = 8$$

1. ระยะห่างระหว่างจุด  $P_1(x_1, y)$  และ  $P_2(x_2, y)$

$$P_1P_2 = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$

2. ระยะห่างระหว่างจุด  $P_1(x, y_1)$  และ  $P_2(x, y_2)$

$$P_1P_2 = |y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$$

ชั้นให้งาน

ครูให้นักเรียนทำเอกสารประกอบการสอน (2) โดยทำในชั้นเรียน 10 นาที แล้วให้

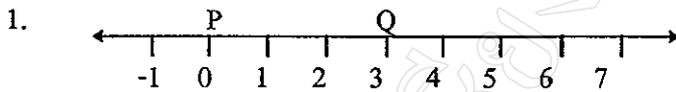
นักเรียนช่วยกันเฉลย

สื่อและอุปกรณ์

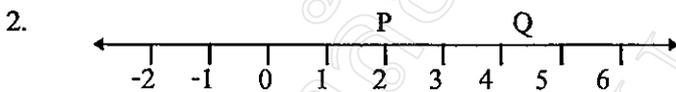
1. เอกสารประกอบการสอน (1) - (2)
2. กระดานกราฟ
3. แผนภูมิสรุป

เอกสารประกอบการสอน (1)

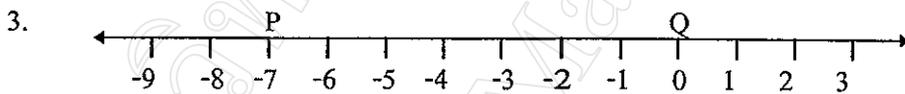
จงหาระยะระหว่างจุดแทน P และจุดแทน Q บนเส้นจำนวน



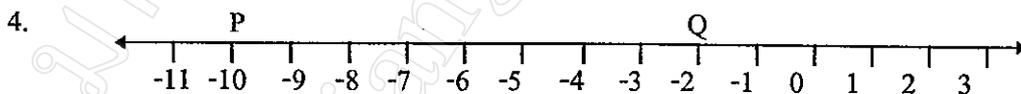
ระยะห่างระหว่างจุด P และ Q มีค่าเท่ากับ .....



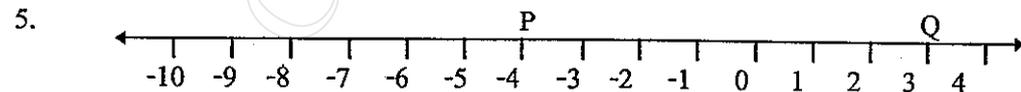
ระยะห่างระหว่างจุด P และ Q มีค่าเท่ากับ.....



ระยะห่างระหว่างจุด P และ Q มีค่าเท่ากับ.....



ระยะห่างระหว่างจุด P และ Q มีค่าเท่ากับ.....



ระยะห่างระหว่างจุด P และ Q มีค่าเท่ากับ .....

6. จากข้อ 1-5 ถ้าให้จุด P แทนจำนวนจริง  $x_1$  และจุด Q แทนจำนวนจริง  $x_2$  จะได้ระยะห่างระหว่างจุด P และ Q คือ .....

## เอกสารประกอบการสอน (2)

จงหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุดต่อไปนี้

1.  $(-12, 0)$  กับ  $(-7, 0)$

2.  $(0, 4)$  กับ  $(0, -8)$

3.  $(3, 1)$  กับ  $(10, 1)$

4.  $(-19, 10)$  กับ  $(-19, 5)$

5.  $(-6, 8)$  กับ  $(6, 8)$

6.  $(9, -18)$  กับ  $(9, -12)$

คาบที่ 2

เรื่อง ระยะห่างระหว่างจุดสองจุด

จุดประสงค์ปลายทาง

นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับระยะห่างระหว่างจุดสองจุดไปใช้ได้

จุดประสงค์นำทาง

1. นักเรียนสามารถหาระยะห่างระหว่างจุดใด ๆ 2 จุด ในระนาบได้
2. นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับระยะห่างระหว่างจุดสองจุดไปใช้แก้ปัญหาได้

สาระสำคัญ

ระยะห่างระหว่างจุด  $P_1(x_1, y_1)$  และ  $P_2(x_2, y_2)$  เท่ากับ  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

เนื้อหา

ระยะห่างระหว่างจุดสองจุดใด ๆ บนระนาบ

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

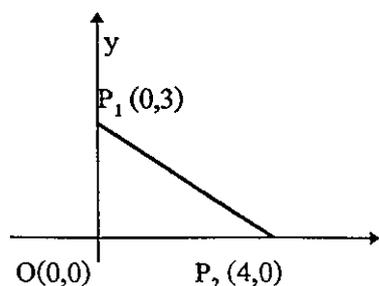
1. ครูให้นักเรียนทบทวนการหาระยะระหว่างจุดสองจุดที่อยู่ในแนวเส้นตรงที่ขนานแกน  $x$  และแนวเส้นตรงที่ขนานแกน  $y$  โดยการทำเอกสารประกอบการสอน (1)
2. ครูให้นักเรียนบอกสูตรการหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุด ที่อยู่ในแนวเส้นตรงที่ขนานแกน  $x$  และที่อยู่ในแนวเส้นตรงที่ขนานแกน  $y$  โดยใช้แผนภูมิประกอบดังนี้

$$1. \text{ ในแนวเส้นตรงที่ขนานแกน } x \text{ จะได้ } |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$

$$2. \text{ ในแนวเส้นตรงที่ขนานแกน } y \text{ จะได้ } |y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$$

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุด ที่จุดปลายจุดหนึ่งอยู่บนแกน  $x$  และอีกจุดอยู่บนแกน  $y$  โดยให้  $P_1(0,3)$  กับ  $P_2(4,0)$  ดังรูป



วิธีทำ จากรูป จะพบว่า  $\Delta P_1OP_2$  เป็นสามเหลี่ยม มุมฉาก ดังนั้นจะหาด้าน  $P_1P_2$  ได้โดยใช้

สูตรของพีทาโกรัส

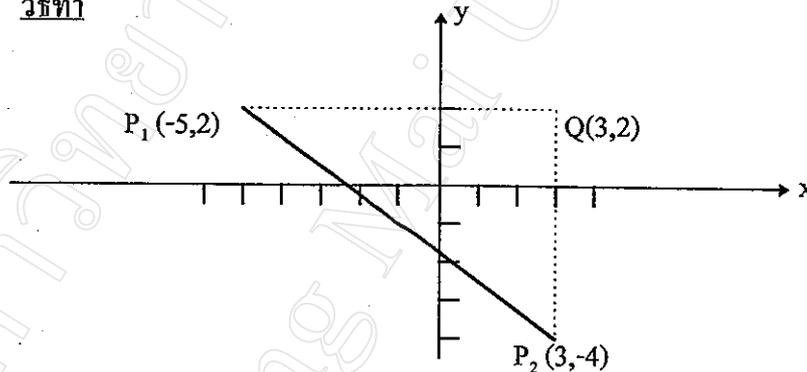
$$(P_1P_2)^2 = (P_1O)^2 + (OP_2)^2$$

$$x \text{ ซึ่ง } P_1O = |0 - 3| = |3 - 0| = 3$$

$$\begin{aligned}
 OP_2 &= |0 - 4| = |4 - 0| = 4 \\
 \text{ดังนั้น } (P_1P_2)^2 &= (P_1O)^2 + (OP_2)^2 \\
 P_1P_2 &= \sqrt{(P_1O)^2 + (OP_2)^2} \\
 &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\
 &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \\
 \text{ดังนั้น } P_1P_2 &= 5
 \end{aligned}$$

2. ครูกำหนดตัวอย่างให้นักเรียนพิจารณา โดยใช้กระดานกราฟ ในกรณีที่จุดสองจุดใด ๆ ที่อยู่บนระนาบ หาระยะระหว่างจุด  $P_1$  และ  $P_2$  เมื่อให้  $P_1(-5,2)$  และ  $P_2(3,-4)$  อยู่บนเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน  $x$  แกน  $y$

วิธีทำ



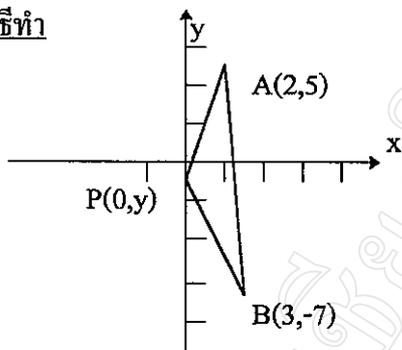
ลากส่วนของเส้นตรง  $\overline{P_1Q}$  และ  $\overline{P_2Q}$  ให้ขนานกับแกน  $x$  และแกน  $y$  ตามลำดับ จุด  $Q$  จะมีพิกัดที่  $(3,2)$  และมุม  $\angle P_1QP_2$  เป็นมุมฉาก จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 P_1P_2 &= \sqrt{(P_1Q)^2 + (P_2Q)^2} \\
 &= \sqrt{|(-5)-3|^2 + |2-(-4)|^2} \\
 &= \sqrt{((-5)-3)^2 + (2-(-4))^2} \quad (\text{เนื่องจาก } |a|^2 = (a)^2) \\
 &= \sqrt{8^2 + 6^2} \quad \quad \quad |-5|^2 = 5^2 = 25 \\
 &= \sqrt{100} \quad \quad \quad (-5)^2 = 25 \\
 &= 10 \quad \quad \quad |-5|^2 = (-5)^2
 \end{aligned}$$

3. ครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างการนำความรู้เกี่ยวกับระยะห่างระหว่างจุดสองจุดไปใช้แก้ปัญหาเพิ่มเติมจากหนังสือเรียน โดยใช้กระดานกราฟประกอบการสอน

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจุดบนแกน  $y$  ซึ่งอยู่ห่างจากจุด  $A(2,5)$  กับจุด  $B(3,-7)$  เป็นระยะทางเท่ากัน

วิธีทำ



จากรูป สมมติให้จุดบนแกน  $y$  คือ  $P(0,y)$  จากโจทย์ จะได้

$$\sqrt{(2-0)^2 + (5-y)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + ((-7)-y)^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$(2-0)^2 + (5-y)^2 = (3-0)^2 + ((-7)-y)^2$$

$$4 + 25 - 10y + y^2 = 9 + 49 + 14y + y^2$$

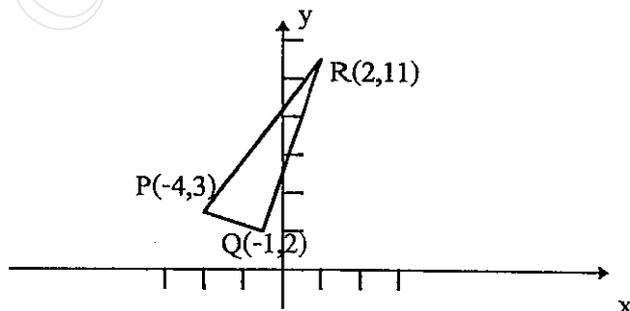
$$24y = -29$$

$$y = \frac{-29}{24}$$

ดังนั้น จุดบนแกน  $y$  ซึ่งอยู่ห่างจากจุด  $A(2,5)$  เท่ากับ อยู่ห่างจากจุด  $B(3,-7)$  คือจุด  $(0, \frac{-29}{24})$

ตัวอย่างที่ 2 ให้  $P(-4,3)$ ,  $Q(-1,2)$  และ  $R(2,11)$  เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม  $PQR$  จงแสดงว่า รูปสามเหลี่ยม  $PQR$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

วิธีทำ



หาความยาวของส่วนของเส้นตรงในแต่ละด้านของ  $\Delta PQR$  จะได้

$$PQ = \sqrt{((-4)-(-1))^2} = \sqrt{10}$$

$$QR = \sqrt{((-1)-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{90}$$

$$PR = \sqrt{((-4)-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{100}$$

จากความยาวของด้านทั้งสามด้านของรูป  $\Delta PQR$  ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส พบว่า

$$\sqrt{100}^2 = \sqrt{90}^2 + \sqrt{10}^2$$

$$100 = 90 + 10$$

ซึ่ง  $100 = \sqrt{100}^2 = (PR)^2$

$$90 = \sqrt{90}^2 = (PQ)^2$$

$$10 = \sqrt{10}^2 = (QR)^2$$

ดังนั้นจะได้  $(PR)^2 = (PQ)^2 + (QR)^2$

แสดงว่ารูป  $\Delta PQR$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ขั้นสรุป

ให้นักเรียนสังเกตวิธีหาคำตอบ และสรุปวิธีการหาระยะระหว่างจุด 2 จุด ใดๆ ในระนาบ

โดยใช้แผนภูมิสรุปประกอบ

เมื่อให้  $P_1(x_1, y_1)$  และ  $P_2(x_2, y_2)$  จะได้  $P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

ขั้นวัดผล

ครูให้นักเรียนทำเอกสารประกอบการสอน (2)

ขั้นให้งาน

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 5.1 หน้า 203-204 เป็นการบ้าน

สื่อและอุปกรณ์

1. กระดานกราฟ
2. แผนภูมิสรุป
3. เอกสารประกอบการสอน (1) - (2)

## เอกสารประกอบการสอน (1)

จงหาระยะระหว่างจุด 2 จุดต่อไปนี้

1.  $(-13,0)$   $(5,0)$

2.  $(0,7)$   $(0,0)$

3.  $(6,9)$   $(14,9)$

4.  $(10,5)$   $(-18,5)$

5.  $(-19,-3)$   $(-25,-3)$

6.  $(-26,-9)$   $(-26,-26)$

## เอกสารประกอบการสอน (2)

1. รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดมุมทั้งสามเป็น  $A(6,8)$ ,  $B(8,4)$  และ  $C(-2,-2)$  เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วหรือไม่

2. จงหาจุด  $P(x,y)$  ซึ่งอยู่บนแกน  $x$  และอยู่ห่างจากจุด  $A(1,7)$ ,  $B(6,8)$  เป็นระยะเท่ากัน

## คาบที่ 3

เรื่อง การนำความรู้เรื่องระยะระหว่างจุดสองจุด ไปใช้

จุดประสงค์ปลายทาง

นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับระยะระหว่างจุดสองจุดไปใช้ได้

จุดประสงค์นำทาง

1. นักเรียนสามารถหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุด ที่อยู่ในแนวเส้นตรงที่ขนานแกน  $x$  ได้
2. นักเรียนสามารถหาระยะห่างระหว่างจุดสองจุด ที่อยู่ในแนวเส้นตรงที่ขนานแกน  $y$  ได้
3. นักเรียนสามารถหาระยะระหว่างจุดใดๆ 2 จุดในระนาบได้
4. นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับระยะห่างระหว่างจุดสองจุดไปใช้แก้ปัญหาได้

สาระสำคัญ

ความยาว  $\overline{AB}$  เขียนแทนด้วย  $AB$ ระยะห่างระหว่างจุด  $P_1(x_1, y)$  และ  $P_2(x_2, y)$  เท่ากับ  $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ ระยะห่างระหว่างจุด  $P_1(x, y_1)$  และ  $P_2(x, y_2)$  เท่ากับ  $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ ระยะระหว่างจุด  $P_1(x_1, y_1)$  และ  $P_2(x_2, y_2)$  เท่ากับ  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 

เนื้อหา

ระยะระหว่างจุดสองจุดใดๆ ในระนาบ

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. ครูให้นักเรียน ทำแบบทดสอบประจำหน่วยครั้งที่ 1 จากคอมพิวเตอร์จำนวน 10 ข้อ
2. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ได้คะแนนจากแบบทดสอบประจำหน่วยครั้งที่ 1 ตั้งแต่ 5 ข้อขึ้นไป เป็นกลุ่มผ่าน และอีกกลุ่มคือกลุ่มที่ได้คะแนนจากแบบทดสอบประจำหน่วยครั้งที่ 1 ต่ำกว่า 5 ข้อจะเป็นกลุ่มที่ไม่ผ่าน
3. ครูให้นักเรียนกลุ่มที่ไม่ผ่าน เรียนบทเรียนซ่อมด้วยคอมพิวเตอร์ และกลุ่มที่ผ่านเรียนบทเรียนเสริมด้วยคอมพิวเตอร์

4. ครูให้นักเรียนทั้งสองกลุ่ม ทำแบบทดสอบประจำหน่วยครั้งที่ 2 จากคอมพิวเตอร์

สื่อและอุปกรณ์

1. แบบทดสอบประจำหน่วยครั้งที่ 1 และครั้งที่ 2
2. บทเรียนซ่อมและบทเรียนเสริม
3. คอมพิวเตอร์

## แบบทดสอบก่อนเรียน ประจำหน่วยที่ 1

4. ระยะระหว่างจุด (0,3) กับ (0,8) เท่ากับข้อใด
- (1) 3 (2) 5  
(3) 8 (4) 11
5. ระยะระหว่างจุด (-5,8) กับ (4,8) คือข้อใด
- (1) -9 (2) -1  
(3) 1 (9) 9
6. ระยะระหว่างจุด (-10,-7) กับ (-10,4) คือข้อใด
- (1) -20 (2) -3  
(3) 6 (4) 11
7. ระยะระหว่างจุด (a,b) กับ (a,-b) คือข้อใด
- (1) 0 (2) 2a  
(3) 2b (4) -2
8. ระยะระหว่างจุด (x,y) กับ (a,b) คือข้อใด
- (1)  $\sqrt{(x-y)^2+(a-b)^2}$  (2)  $\sqrt{(x+y)^2-(a+b)^2}$   
(3)  $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$  (4)  $\sqrt{(x+a)^2-(y+b)^2}$
6. จุด A(4,2) กับจุด B(-3,5) ห่างกันเท่ากับข้อใด
- (1)  $\sqrt{68}$  (2)  $\sqrt{32}$   
(3)  $\sqrt{58}$  (4)  $\sqrt{48}$
7. ระยะระหว่างจุด P(x-3,6) กับ Q(x-3,y) คือข้อใด
- (1)  $|x-3|$  (2) 6  
(3) y (4)  $|6-y|$
8. ระยะระหว่างจุด A(-2,-5) กับ B(-8,-2) คือข้อใด
- (1)  $\sqrt{45}$  (2)  $\sqrt{51}$   
(3)  $\sqrt{27}$  (4)  $\sqrt{149}$

9. หาค่า  $k$  เมื่อจุด  $A(k,1)$  กับ  $B(-2,1)$  ห่างกัน 3 หน่วย

(1)  $-1, 3$  (2)  $-5, 1$

(3)  $-2, 4$  (4)  $-3, 1$

10. วงกลมมีเส้นรอบวงผ่านจุด  $A(3,0)$  และ  $B(0,1)$  จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $O(k,8)$  ค่าของ  $k$  ตรงกับข้อใด

(1)  $-1$  (2)  $-2$

(3)  $3$  (4)  $4$

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน ประจำหน่วยที่ 1

1. (2) 6. (3)

2. (4) 7. (4)

3. (4) 8. (1)

4. (3) 9. (2)

5. (3) 10. (4)

## แบบทดสอบหลังเรียน ประจำหน่วยที่ 1

1. ระยะระหว่างจุด  $(0,4)$  กับ  $(0,8)$  เท่ากับข้อใด
 

(1) 2	(2) 4
(3) 12	(4) 32
2. ระยะระหว่างจุด  $(8,-7)$  กับ  $(-3,-7)$  เท่ากับข้อใด
 

(1) 14	(2) 11
(3) 5	(4) 4
3. จุด  $(-10,4)$  กับ  $(-10,-3)$  อยู่ห่างกันกี่หน่วย
 

(1) 20	(2) 7
(3) 6	(4) 1
4. จุด  $(4,y)$  กับจุด  $(4,3)$  อยู่ห่างกัน 2 หน่วย ค่า  $y$  ตรงกับข้อใด
 

(1) 5 , 1	(2) 6 , 2
(3) 2 , 1	(4) 5 , 6
5. ระยะทางระหว่างจุดเริ่มต้นกับจุด  $(3,-5)$  ตรงกับข้อใด
 

(1) $\sqrt{2}$	(2) $\sqrt{8}$
(3) 4	(4) $\sqrt{34}$
6. จุด  $(-4,3)$  อยู่ห่างจากแกน  $y$  เป็นระยะทางเท่าใด
 

(1) -1	(2) 3
(3) 4	(4) 7
7. วงกลมวงหนึ่งผ่านจุด  $(8,-5)$  จุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(2,3)$  แล้วรัศมีตรงกับข้อใด
 

(1) $\sqrt{208}$	(2) $\sqrt{148}$
(3) 10	(4) 8
8. ระยะระหว่างจุด  $(2,3)$  และ  $(1,2)$  ตรงกับข้อใด
 

(1) 1	(2) $\sqrt{2}$
(3) $\sqrt{3}$	(4) 5
9. จุด  $(-1,-1)$  กับ  $(7,0)$  อยู่ห่างกันกี่หน่วย
 

(1) $\sqrt{65}$	(2) 7
(3) 6	(4) $\sqrt{37}$

10. ให้  $P(4,3)$  และ  $Q(0,-2)$  เป็นจุดปลายเส้นผ่านศูนย์กลาง วงกลมวงนี้มีรัศมียาวเท่าใด

(1)  $\frac{3}{2}$

(2)  $\frac{\sqrt{41}}{2}$

(3) 2

(4)  $\frac{5}{2}$

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน ประจำหน่วยที่ 1

1. (2)

6. (3)

2. (2)

7. (3)

3. (2)

8. (2)

4. (1)

9. (1)

5. (4)

10. (2)

## หน่วยที่ 2

## จุดแบ่งภายในระหว่างจุดสองจุด

คาบที่ 4

เรื่อง จุดแบ่งภายในระหว่างจุดสองจุด

จุดประสงค์ปลายทาง

นักเรียนสามารถหาจุดแบ่งภายในระหว่างจุดสองจุดได้

จุดประสงค์นำทาง

1. นักเรียนสามารถหาอัตราส่วนจุดแบ่งภายในระหว่างจุดสองจุดบนส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ได้

2. นักเรียนสามารถหาจุดแบ่งภายในระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ได้

สาระสำคัญ

ถ้า  $P(x,y)$  เป็นจุดแบ่งภายในเส้นตรงที่เชื่อมจุด  $A(x_1,y_1)$  กับจุด  $B(x_2,y_2)$  ออกเป็นอัตราส่วน  $\frac{AP}{AB} = k$  แล้วจะได้พิกัดของจุด  $P(x,y)$  คือ

$$(x,y) = (x_1 + k(x_2 - x_1), y_1 + k(y_2 - y_1))$$

เนื้อหา

จุดแบ่งภายในระหว่างจุดสองจุด

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

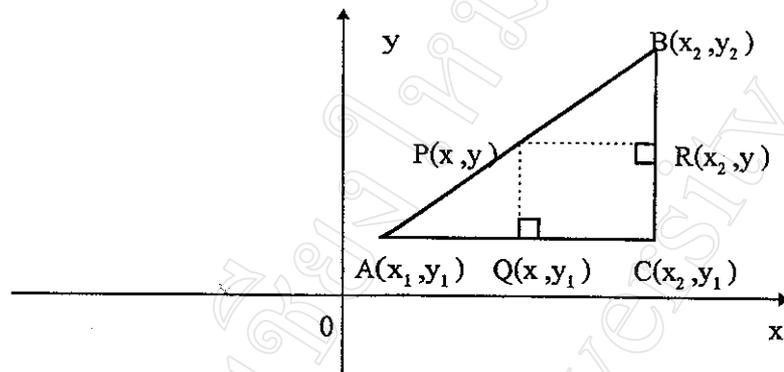
ขั้นนำ

ครูให้นักเรียนหาอัตราส่วนของจุด  $P$  ที่อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $AB$  จากเอกสารประกอบการสอน(1)

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนพิจารณาจากเอกสารประกอบการสอน แล้วจะพบว่า  $P$  เป็นจุดแบ่งภายในส่วนของเส้นตรง  $AB$  แต่ถ้าครูให้  $A$  มีพิกัดที่จุด  $(x_1,y_1)$   $B$  มีพิกัดที่จุด  $(x_2,y_2)$  ซึ่งเป็นจุดปลายทั้งสองของส่วนของเส้นตรง  $AB$  และ  $P$  มีพิกัดที่จุด  $(x,y)$  เป็นจุดแบ่งบนเส้นตรง

$AB$  โดยที่ให้  $\frac{AP}{AB} = k$  จะได้  $A$  เป็นจุดเริ่มต้น  $B$  เป็นจุดปลาย สามารถแสดงโดยใช้กระดาษกราฟต่อไปนี้



ลาก  $AC \perp BC$  ที่จุด  $C$

ให้  $AC$  เป็นส่วนของเส้นตรงที่ขนานกับแกน  $x$  และ  $PQ$  ตั้งฉากกับ  $AC$  ที่จุด  $Q$

ให้  $BC$  เป็นส่วนของเส้นตรงที่ขนานกับแกน  $y$  และ  $PR$  ตั้งฉากกับ  $BC$  ที่จุด  $R$

ลาก  $PR$  ตั้งฉากกับ  $BC$  ที่จุด  $R$

จากรูปจะพบว่า  $\triangle PAQ$  คล้ายกับ  $\triangle BAC$  (จากคุณสมบัติของ  $\triangle$  คล้าย เพราะมีมุม

$\hat{BAC} = \hat{PAQ}$ ,  $\hat{ABC} = \hat{APQ}$ ,  $\hat{ACB} = \hat{AQP}$ )

นั่นคือ 
$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$$

พิจารณาทีละคู่ ดังนี้

กรณีที่ 1 
$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} \quad (\text{จากที่กำหนดให้ } \frac{AP}{AB} = k)$$

จะได้ว่า 
$$k = \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x_1|}$$

แต่เนื่องจาก  $x$  อยู่ระหว่าง  $x_1$  และ  $x_2$  ดังนั้น  $x_1 < x < x_2$  หรือ  $x_2 < x < x_1$  ซึ่ง

ไม่ว่าจะเป็นแบบใดก็ตาม  $x - x_1$  กับ  $x_2 - x_1$  จะมีเครื่องหมายเหมือนกัน

ดังนั้น 
$$k = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$k(x_2 - x_1) = x - x_1$$

$$x = x_1 + k(x_2 - x_1) \quad \text{--- ①}$$

กรณีที่ 2 
$$\frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC} \quad \text{ดังนั้น} \quad k = \frac{|y - y_1|}{|y_2 - y_1|}$$

แต่เนื่องจาก  $y$  อยู่ระหว่าง  $y_1$  และ  $y_2$  ดังนั้น  $y_1 < y < y_2$  หรือ  $y_2 < y < y_1$  ซึ่งไม่ว่าจะเป็นแบบใดก็ตาม  $y - y_1$  กับ  $y_2 - y_1$  จะมีเครื่องหมายเหมือนกัน

$$\text{ดังนั้น} \quad k = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$k(y_2 - y_1) = y - y_1$$

$$y = y_1 + k(y_2 - y_1) \quad \text{--- ②}$$

จาก ① และ ② จุด P จะมีพิกัดที่จุด

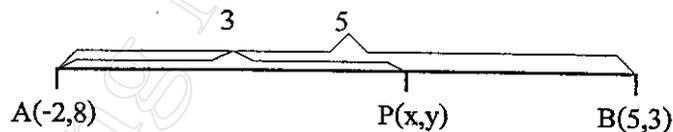
$$(x_1 + k(x_2 - x_1), y_1 + k(y_2 - y_1))$$

2. กรุณากำหนดตัวอย่างให้นักเรียนพิจารณา โดยการนำสูตรการหาพิกัดของจุดแบ่งภายในในข้อ 1 มาใช้เช่น

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจุดแบ่ง P(x,y) ที่แบ่ง A(-2,8) กับ B(5,3) ออกเป็น

อัตราส่วน  $\frac{AP}{AB} = \frac{3}{5}$

วิธีทำ



จากโจทย์ A(-2,8) เป็นจุดเริ่มต้น คือ  $(x_1, y_1)$  และ B(5,3) เป็นจุดปลาย คือ

$$\begin{aligned} (x_2, y_2) \text{ เมื่อ } k = \frac{3}{5} \quad \text{ดังนั้น } (x,y) &= (x_1 + k(x_2 - x_1), y_1 + k(y_2 - y_1)) \\ &= ((-2) + \frac{3}{5}\{5 - (-2)\}, 8 + \frac{3}{5}\{3 - 8\}) \\ &= ((-2) + \frac{3}{5}(7), 8 + \frac{3}{5}(-5)) \\ &= ((-2) + \frac{21}{5}, 8 + (-3)) = (\frac{11}{5}, 5) \end{aligned}$$

พิกัดของจุด P คือ  $(\frac{11}{5}, 5)$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา A(x,y) ที่แบ่ง P(13,-2) กับ Q(-5,10) ออกเป็นอัตราส่วน  $\frac{PA}{PQ} = \frac{1}{3}$

วิธีทำ



จากโจทย์  $P(13, -2)$  เป็นจุดเริ่มต้นคือ  $(x_1, y_1)$  และ  $Q(-5, 10)$  เป็นจุดปลาย คือ  $(x_2, y_2)$

$$\text{เมื่อ } k = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } (x, y) &= (x_1 + k(x_2 - x_1), y_1 + k(y_2 - y_1)) \\ &= \left(13 + \frac{1}{3}\{(-5) - 13\}, (-2) + \frac{1}{3}\{10 - (-2)\}\right) \\ &= \left(13 + \frac{1}{3}(-18), (-2) + \frac{1}{3}(12)\right) \\ &= (13 + (-6), (-2) + 4) = (7, 2) \end{aligned}$$

พิกัดของจุด A คือ (7, 2)

3. ครูให้นักเรียนหาจุดแบ่งภายในระหว่างจุดสองจุด และจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด จากเอกสารประกอบการสอน(2)

4. ครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยเอกสารประกอบการสอน (2)

ขั้นสรุป

ครูให้นักเรียนสรุปการแบ่งภายในระหว่างจุดสองจุด และการหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด โดยใช้แผนภูมิประกอบ ดังนี้

ถ้า  $P(x, y)$  เป็นจุดแบ่งภายในเส้นตรงที่เชื่อมจุด  $A(x_1, y_1)$  กับจุด  $B(x_2, y_2)$  ออกเป็น

อัตราส่วน  $\frac{AP}{AB} = k$  แล้วจะได้พิกัดของจุด  $P(x, y)$  คือ

$$(x, y) = (x_1 + k(x_2 - x_1), y_1 + k(y_2 - y_1))$$

ขั้นวัดผล

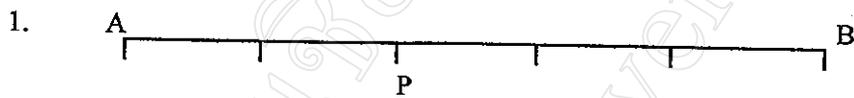
ครูให้นักเรียนทำเอกสารประกอบการสอน (3)

สื่อและอุปกรณ์

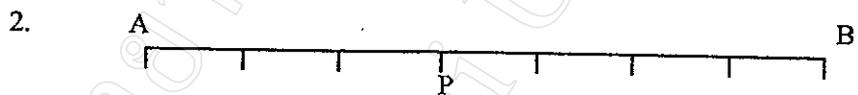
1. เอกสารประกอบการสอน (1)-(3)
2. กระดานกราฟ
3. แผนภูมิสรุป

เอกสารประกอบการสอน(1)

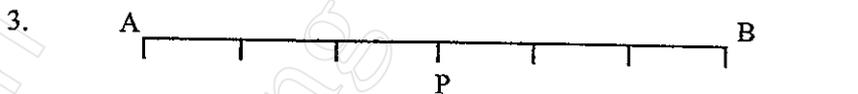
จงหาอัตราส่วนของ  $\frac{AP}{AB}$  เมื่อ AB เป็นส่วนของเส้นตรง และจุด P เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง ดังนี้



AB = 5 หน่วย ดังนั้น  $\frac{AP}{AB} = \dots\dots\dots$



AB = 7 หน่วย ดังนั้น  $\frac{AP}{AB} = \dots\dots\dots$



AB = 6 หน่วย ดังนั้น  $\frac{AP}{AB} = \dots\dots\dots$



AB = 8 หน่วย ดังนั้น  $\frac{AP}{AB} = \dots\dots\dots$

## เอกสารประกอบการสอน(2)

จงหาพิกัดของจุดแบ่ง P ของ  $\overline{AB}$  โดยที่แบ่ง  $\overline{AB}$  ออกเป็นส่วน  $\frac{AP}{AB} = k$  ดังต่อไปนี้

1.  $A(-2,4)$  ,  $B(7,-2)$  ,  $k = \frac{2}{3}$

2.  $A(0,0)$  ,  $B(4,-6)$  ,  $k = \frac{3}{5}$

3.  $A(2,3)$  ,  $B(4,7)$  ,  $k = \frac{1}{2}$

## เอกสารประกอบการสอน (3)

1. จงหาจุดที่แบ่งส่วนของเส้นตรง PQ ออกเป็น 3 ส่วนเท่าๆ กัน เมื่อกำหนดพิกัดของ P และ Q ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 P(2,1) และ Q(9,3)

1.2 P(-3,8) และ Q(8,3)

1.3 P(5,4) และ Q(6,-2)

1.4 P(3,-7) และ Q(-2,3)

### คาบที่ 5

เรื่อง การนำความรู้เรื่องจุดแบ่งภายในระหว่างจุดสองจุดไปใช้

จุดประสงค์ปลายทาง

นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับจุดแบ่งภายในระหว่างจุดสองจุดไปใช้ได้

จุดประสงค์นำทาง

1. นักเรียนสามารถหาอัตราส่วนจุดแบ่งภายในระหว่างจุดสองจุดบนส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ได้
2. นักเรียนสามารถหาจุดแบ่งภายในระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ได้

สาระสำคัญ

ถ้า  $P(x,y)$  เป็นจุดแบ่งภายในเส้นตรงที่เชื่อมจุด  $A(x_1,y_1)$  กับจุด  $B(x_2,y_2)$  ออกเป็น

อัตราส่วน  $\frac{AP}{AB} = k$  แล้วจะได้พิกัดของจุด  $P(x,y)$  คือ

$$(x,y) = (x_1 + k(x_2 - x_1), y_1 + k(y_2 - y_1))$$

เนื้อหา

จุดแบ่งภายในระหว่างจุดสองจุด

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูให้นักเรียน ทำแบบทดสอบประจำหน่วยครั้งที่ 1 จากคอมพิวเตอร์จำนวน 10 ข้อ
2. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ได้คะแนนจากแบบทดสอบประจำหน่วยครั้งที่ 1 ตั้งแต่ 5 ข้อขึ้นไป เป็นกลุ่มผ่าน และอีกกลุ่มคือกลุ่มที่ได้คะแนนจากแบบทดสอบประจำหน่วยครั้งที่ 1 ต่ำกว่า 5 ข้อจะเป็นกลุ่มที่ไม่ผ่าน
3. ครูให้นักเรียนกลุ่มที่ไม่ผ่าน เรียนบทเรียนซ่อมด้วยคอมพิวเตอร์ และกลุ่มที่ผ่านเรียนบทเรียนเสริมด้วยคอมพิวเตอร์
4. ครูให้นักเรียนทั้งสองกลุ่ม ทำแบบทดสอบประจำหน่วยครั้งที่ 2 จากคอมพิวเตอร์

สื่อและอุปกรณ์

1. แบบทดสอบประจำหน่วยครั้งที่ 1 และครั้งที่ 2
2. บทเรียนซ่อมและบทเรียนเสริม
3. คอมพิวเตอร์

## แบบทดสอบก่อนเรียน ประจำหน่วยที่ 2

1. จุด  $P(x,y)$  ที่แบ่งจุดระยะระหว่างจุด  $A(-5,0)$  และ  $B(6,4)$  ออกเป็นอัตราส่วน  $\frac{AP}{AB} = \frac{7}{11}$   
ตรงกับข้อใด
- (1)  $(-1,0)$  (2)  $(0,0)$   
(3)  $(1,0)$  (4)  $(2,0)$
2. จุด  $A(a,b)$  เป็นจุดแบ่งภายในระหว่างจุด  $P(0,3)$  กับ  $Q(0,7)$  ออกเป็นอัตราส่วน  $\frac{PA}{PQ} = \frac{3}{4}$   
ตรงกับข้อใด
- (1)  $(0,4)$  (2)  $(0,6)$   
(3)  $(0,8)$  (4)  $(0,10)$
3.  $P(a,b)$  เป็นจุดแบ่งภายในระหว่างจุด  $X(5,-2)$  กับ  $Y(5,7)$  ออกเป็นอัตราส่วน  $\frac{XP}{XY} = \frac{1}{3}$   
ตรงกับข้อใด
- (1)  $(5,1)$  (2)  $(5,3)$   
(3)  $(5,5)$  (4)  $(5,6)$
4. จุดแบ่ง  $C(a,b)$  ที่แบ่ง  $A(-3,4)$  กับ  $B(4,-3)$  ออกเป็นอัตราส่วน  $\frac{AC}{AB} = \frac{2}{7}$  ตรงกับข้อใด
- (1)  $(-5,6)$  (2)  $(-1,2)$   
(3)  $(-1,6)$  (4)  $(-5,2)$
5.  $T(x,y)$  เป็นจุดแบ่งภายในระหว่างจุด  $R(-13,-10)$  กับจุด  $S(11,10)$  ออกเป็นอัตราส่วน  $\frac{ST}{SR} = \frac{1}{4}$  ตรงกับข้อใด
- (1)  $(-11,-10)$  (2)  $(-19,-15)$   
(3)  $(5,5)$  (4)  $(-7,-5)$
6. อัตราส่วน  $\frac{MN}{MO} = \frac{1}{5}$  จุด  $M(x,y)$  ตรงกับข้อใด เมื่อ  $N(-3,2)$  และ  $O(1,4)$
- (1)  $(-1, -\frac{1}{2})$  (2)  $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$   
(3)  $(-\frac{1}{3}, -1)$  (4)  $(-4, \frac{3}{2})$

7. จุด  $T(x,y)$  ตรงกับข้อใด เมื่ออัตราส่วน  $\frac{PS}{PT} = \frac{4}{5}$  และ  $P(5,-1)$ ,  $S(-3,3)$
- (1)  $(12,-3)$  (2)  $(-2,1)$   
 (3)  $(-7,3)$  (4)  $(-5,4)$
8. ถ้าจุด  $A(-3,6)$ ,  $B(-9,-2)$  อัตราส่วน  $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{4}$  แล้วจุด  $C(x,y)$  ตรงกับข้อใด
- (1)  $(-27,-26)$  (2)  $(27,-10)$   
 (3)  $(0,32)$  (4)  $(0,-20)$
9. จุด  $O(5,2)$  เป็นจุดแบ่งภายในระหว่างจุด  $M(1,-2)$  กับ  $N(9,6)$  แล้ว  $\frac{MO}{MN}$  ตรงกับข้อใด
- (1)  $\frac{1}{3}$  (2)  $\frac{1}{2}$   
 (3)  $\frac{1}{4}$  (4)  $\frac{3}{4}$
10. จุด  $P(3,1)$  เป็นจุดแบ่งระหว่างจุด  $F(-6,-2)$  กับ  $E(x,y)$  ออกเป็นอัตราส่วน  $\frac{FP}{FE} = \frac{3}{5}$  ตรงกับข้อใด
- (1)  $(-21,-7)$  (2)  $(9,3)$   
 (3)  $(-11, -\frac{11}{3})$  (4)  $(-1, -\frac{1}{3})$

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน ประจำหน่วยที่ 2

1. (4) 6. (4)  
 2. (2) 7. (4)  
 3. (1) 8. (1)  
 4. (2) 9. (2)  
 5. (3) 10. (2)

## แบบทดสอบหลังเรียน ประจำหน่วยที่ 2

1. จุด  $C(x,y)$  ที่แบ่งระยะระหว่างจุด  $A(4,9)$  และ  $B(7,6)$  ออกเป็นอัตราส่วน  $\frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}$  ตรงกับข้อใด

- (1)  $(\frac{26}{5}, \frac{39}{5})$  (2)  $(\frac{32}{5}, 15)$   
 (3)  $(6,7)$  (4)  $(\frac{37}{3}, 19)$

2.

จุด  $(x,y)$  ตรงกับข้อใด

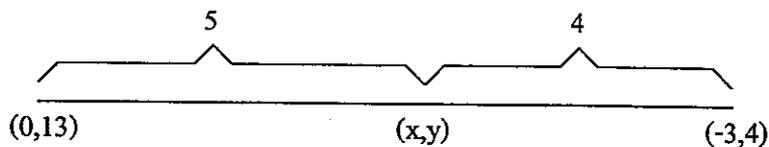
- (1)  $(-\frac{13}{7}, \frac{27}{7})$  (2)  $(-\frac{7}{5}, 5)$   
 (3)  $(-\frac{25}{7}, \frac{31}{7})$  (4)  $(-\frac{19}{5}, \frac{29}{5})$

3.

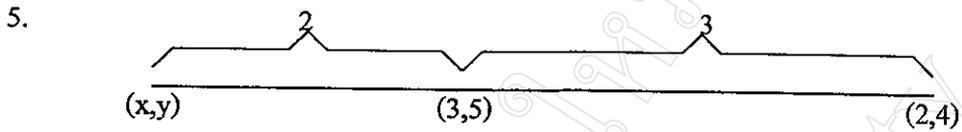
จุด  $(x,y)$  ตรงกับข้อใด

- (1)  $(-6,7)$  (2)  $(-3, \frac{9}{2})$   
 (3)  $(-6, \frac{23}{3})$  (4)  $(-2, \frac{13}{3})$

4.

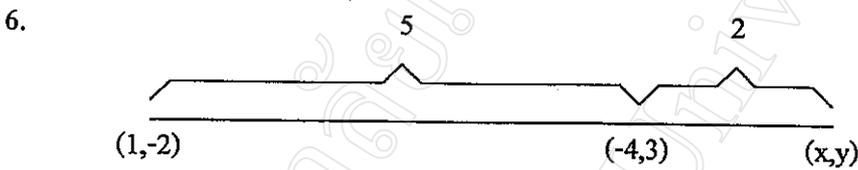
จุด  $(x,y)$  ตรงกับข้อใด

- (1)  $(-\frac{12}{5}, \frac{29}{5})$  (2)  $(-\frac{15}{4}, \frac{7}{4})$   
 (3)  $(-\frac{4}{3}, 9)$  (4)  $(-\frac{5}{3}, 8)$



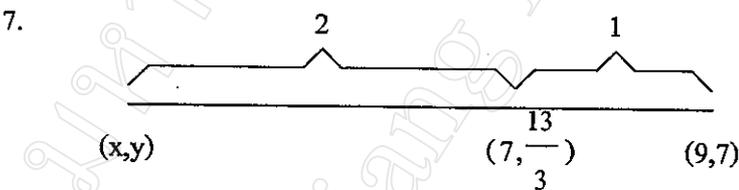
จุด  $(x,y)$  ตรงกับข้อใด

- |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| (1) $(\frac{19}{3}, \frac{32}{3})$ | (2) $(\frac{11}{3}, \frac{17}{3})$ |
| (3) $(5,7)$                        | (4) $(13,23)$                      |



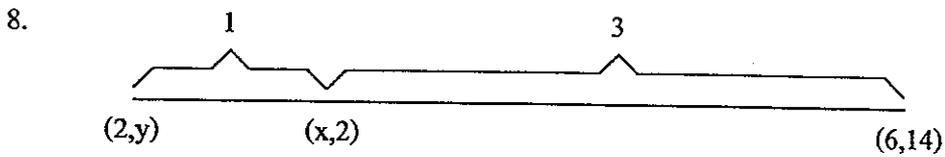
จุด  $(x,y)$  ตรงกับข้อใด

- |                                     |                           |
|-------------------------------------|---------------------------|
| (1) $(-\frac{23}{2}, \frac{21}{2})$ | (2) $(-6,5)$              |
| (3) $(-9,8)$                        | (4) $(-\frac{33}{2}, 19)$ |



จุด  $(x,y)$  ตรงกับข้อใด

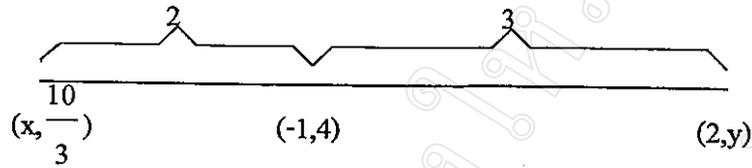
- |                          |                        |
|--------------------------|------------------------|
| (1) $(11, \frac{29}{3})$ | (2) $(6,3)$            |
| (3) $(3,-1)$             | (4) $(5, \frac{5}{3})$ |



ค่าของ  $x$  และ  $y$  ตรงกับข้อใด ตามลำดับ

- |                        |             |
|------------------------|-------------|
| (1) $\frac{10}{3}, -4$ | (2) $4, 0$  |
| (3) $4, -2$            | (4) $3, -2$ |

9.



ค่าของ  $x$  และ  $y$  ตรงกับข้อใด ตามลำดับ

- (1)  $-3, 5$                       (2)  $-4, 6$   
 (3)  $-3, 7$                       (4)  $-4, 8$

10. จุดที่แบ่งส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด  $(8,9)$  และ  $(-6,5)$  ออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กัน คือข้อใด

- (1)  $(-\frac{5}{2}, 6)$ ,  $(1, 7)$  และ  $(-\frac{9}{2}, 8)$   
 (2)  $(-\frac{5}{2}, 6)$ ,  $(1, 7)$  และ  $(-\frac{9}{2}, 8)$   
 (3)  $(-\frac{5}{2}, 6)$ ,  $(1, 7)$  และ  $(-\frac{9}{2}, 8)$   
 (4)  $(-\frac{5}{2}, 6)$ ,  $(1, 7)$  และ  $(-\frac{9}{2}, 8)$

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน ประจำหน่วยที่ 2

- |        |         |
|--------|---------|
| 1. (3) | 6. (2)  |
| 2. (1) | 7. (3)  |
| 3. (2) | 8. (4)  |
| 4. (4) | 9. (1)  |
| 5. (2) | 10. (3) |

## หน่วยที่ 3

## จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด

คาบที่ 6

เรื่อง จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด

จุดประสงค์ปลายทาง

นักเรียนสามารถหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดได้

จุดประสงค์นำทาง

1. นักเรียนสามารถหาจุดแบ่งภายในระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ได้
2. นักเรียนสามารถหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ได้

สาระสำคัญ

ถ้า  $A(x_1, y_1)$  กับ  $B(x_2, y_2)$  เป็นจุดปลายของส่วนของเส้นตรง  $AB$  และ  $P(\bar{x}, \bar{y})$  เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $A$  กับจุด  $B$  แล้วจะได้พิกัดของจุด  $P(\bar{x}, \bar{y})$  คือ

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

เนื้อหา

จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

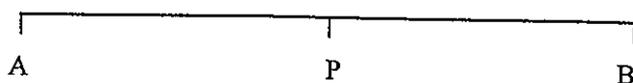
ขั้นนำ

ครูให้นักเรียนหาจุดแบ่งภายในระหว่างจุดสองจุด ที่กำหนดไว้ในเอกสารประกอบ

การสอน (1)

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนพิจารณาจากเอกสารประกอบการสอน(1) ข้อ 3-5 ซึ่ง  $k = \frac{1}{2}$  แสดงว่าจุดแบ่งจะต้องเป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดนั้น เมื่อครูให้  $P(\bar{x}, \bar{y})$  เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง  $AB$  ครูให้นักเรียนหาจุด  $P(\bar{x}, \bar{y})$  ซึ่งสามารถเขียนกระดานกราฟได้ดังนี้



จากรูป จะพบว่า P แบ่ง AB เป็น 2 ส่วน เท่า ๆ กัน โดยที่

$$\frac{AP}{AB} = \frac{1}{2} \quad \text{ดังนั้น} \quad k = \frac{1}{2}$$

นำไปแทนค่าในข้อ 1 จะได้

$$\bar{x} = x_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$\bar{y} = y_1 + k(y_2 - y_1)$$

$$\bar{x} = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

$$\bar{y} = y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1)$$

$$\bar{x} = \frac{2x_1 + x_2 - x_1}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{2y_1 + y_2 - y_1}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

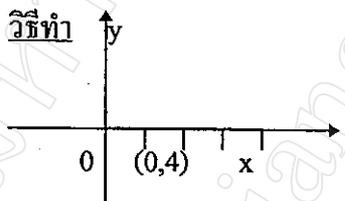
$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ดังนั้น เมื่อ  $P(\bar{x}, \bar{y})$  เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB จะมีพิกัดที่จุด

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

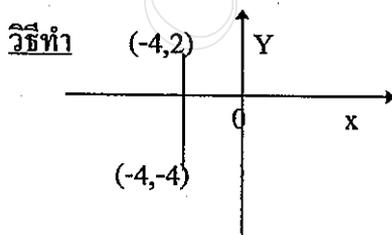
3. ครูให้นักเรียนหาพิจารณาตัวอย่างเพิ่มเติมต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $(0,0)$  กับจุด  $(0,4)$



$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y}) &= \left( \frac{0+0}{2}, \frac{0+4}{2} \right) \\ &= (0, 2) \end{aligned}$$

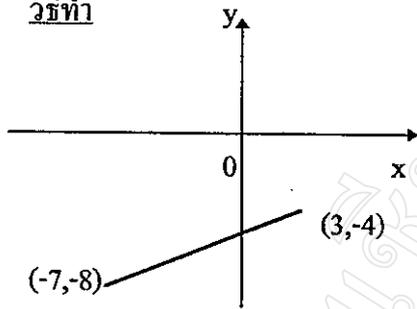
ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $(-4,2)$  กับจุด  $(-4,-4)$



$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y}) &= \left( \frac{(-4)+(-4)}{2}, \frac{2+(-4)}{2} \right) \\ &= (-4, -1) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $(-7,-8)$  กับจุด  $(3,-4)$

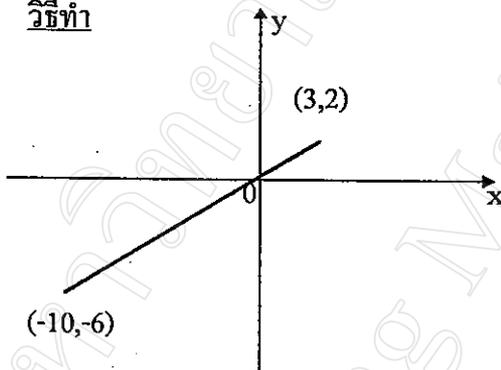
วิธีทำ



$$\begin{aligned}\bar{x}, \bar{y} &= \left( \frac{(-7)+3}{2}, \frac{(-8)+(-4)}{2} \right) \\ &= (-5, -6)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $(-10,-6)$  กับจุด  $(3,2)$

วิธีทำ



$$\begin{aligned}\bar{x}, \bar{y} &= \left( \frac{(-10)+3}{2}, \frac{(-6)+2}{2} \right) \\ &= \left( -\frac{7}{2}, -2 \right)\end{aligned}$$

ขั้นสรุป

ครูให้นักเรียนสรุปและการหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด โดยใช้แผนภูมิประกอบ ดังนี้  
ถ้า  $A(x_1, y_1)$  กับ  $B(x_2, y_2)$  เป็นจุดปลายของส่วนของเส้นตรง  $AB$  และ  $P(\bar{x}, \bar{y})$  เป็น  
จุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $A$  กับ  $B$  แล้วจะได้พิกัดของจุด  $P(\bar{x}, \bar{y})$  คือ

$$\bar{x}, \bar{y} = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

ขั้นวัดผล

ครูให้นักเรียนทำเอกสารประกอบการสอน (2)

สื่อและอุปกรณ์

1. เอกสารประกอบการสอน (1)-(2)
2. กระดานกราฟ
3. แผนภูมิสรุป

เอกสารประกอบการสอน(1)

จงหาจุด  $D(x,y)$  ซึ่งเป็นจุดแบ่งภายในของ  $\overline{MN}$  เมื่อ  $\overline{MN}$  ถูกแบ่งออกเป็นอัตราส่วน

$$\frac{MD}{DN} = k \text{ ดังต่อไปนี้}$$

1.  $M(10,-3), N(-8,6)$  ,  $k = \frac{4}{9}$

2.  $M(-18,10), N(-4,4)$  ,  $k = \frac{5}{7}$

3.  $M(2,0), N(8,0)$  ,  $k = \frac{1}{2}$

4.  $M(0,5), N(0,-5)$  ,  $k = \frac{1}{2}$

5.  $M(-4,3), N(9,-7)$  ,  $k = \frac{1}{2}$

เอกสารประกอบการสอน(2)

จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.  $(3,-7)$  และ  $(-2,3)$

2.  $(a,b)$  และ  $(c,d)$

3.  $(-9,4)$  และ  $(8,-3)$

4.  $(x-5,y+3)$  และ  $(x+3,y-5)$

5.  $(\frac{5}{2},7)$  และ  $(8,\frac{3}{5})$

6.  $(5,\frac{6}{5})$  และ  $(\frac{5}{3},\frac{8}{3})$

7.  $(2,1)$  และ  $(9,3)$

8.  $(\frac{a-2}{3},\frac{b}{5})$  และ  $(\frac{a-4}{6},\frac{b-3}{5})$

## คาบที่ 7

เรื่อง การนำจุดแบ่งภายใน และจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดไปใช้  
จุดประสงค์ปลายทาง

นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับจุดแบ่งภายในและจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดไปใช้ได้

จุดประสงค์นำทาง

1. นักเรียนสามารถหาจุดแบ่งภายในระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ได้
2. นักเรียนสามารถหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ได้
3. นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับจุดแบ่งภายในระหว่างจุดสองจุดไปใช้ได้
4. นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดไปใช้ได้

สาระสำคัญ

ถ้า  $P(x,y)$  เป็นจุดแบ่งภายในเส้นตรงที่เชื่อมจุด  $A(x_1,y_1)$  กับจุด  $B(x_2,y_2)$  ออกเป็นอัตราส่วน  $\frac{AP}{AB} = k$  แล้วจะได้พิกัดของจุด  $P(x,y)$  คือ

$$(x,y) = (x_1 + k(x_2 - x_1), y_1 + k(y_2 - y_1))$$

ถ้า  $A(x_1,y_1)$  กับ  $B(x_2,y_2)$  เป็นจุดปลายของส่วนของเส้นตรง  $AB$  และ  $P(\bar{x},\bar{y})$  เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $A$  กับ  $B$  แล้วจะได้พิกัดของจุด  $P(\bar{x},\bar{y})$  คือ

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

เนื้อหา

1. จุดแบ่งภายในระหว่างจุดสองจุด
2. จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ชั้นนำ

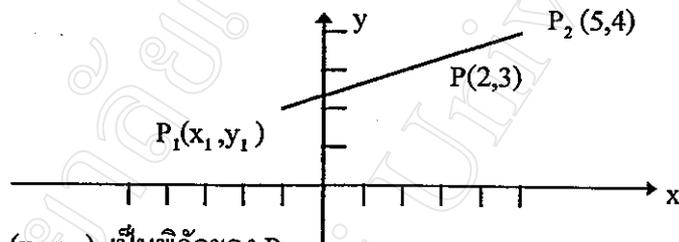
1. ครูให้นักเรียนทบทวนสูตรการหาจุดแบ่งภายใน และจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด
2. ครูให้นักเรียนช่วยกันเฉลยแบบฝึกหัด จากคาบที่ 3

### ชั้นสอน

1. ครูกำหนดตัวอย่างการนำความรู้เรื่องจุดแบ่งภายในและจุดกึ่งกลางไปใช้ให้นักเรียนพิจารณา โดยใช้กระดานกราฟประกอบ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จุด  $P$  เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง  $P_1P_2$  ถ้า  $P$  มีพิกัด  $(2,3)$  และ  $P_2$  มีพิกัด  $(5,4)$  จงหาพิกัดของจุด  $P_1$

### วิธีทำ



ให้  $(x_1, y_1)$  เป็นพิกัดของ  $P_1$

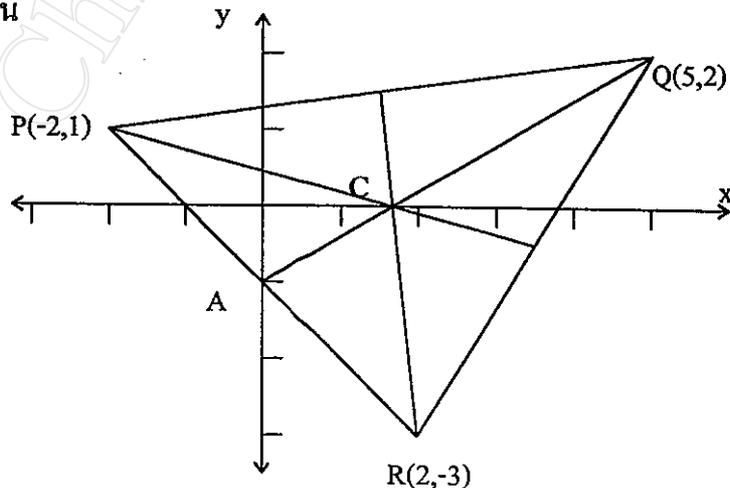
เนื่องจาก  $P(2,3)$  เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง  $P_1P_2$

$$\text{ดังนั้น } 2 = \frac{x_1 + 5}{2} \quad \text{และ} \quad 3 = \frac{y_1 + 4}{2}$$

$$\text{จะได้ } x_1 = -1 \quad y_1 = 2$$

นั่นคือ  $P_1$  มีพิกัด  $(-1,2)$

ตัวอย่างที่ 2 ให้  $P(-2,1)$   $Q(5,2)$  และ  $R(2,-3)$  เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม  $PQR$  จงหาจุดที่เส้นมัธยฐานตัดกัน



จุดที่เกิดจากเส้นมัธยฐานตัดกัน ก็คือ จุดที่เกิดจากเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดไปแบ่งครึ่งฐานและตัดกัน ซึ่งจุดดังกล่าวคือจุด C และจุด C นี้จะแบ่งส่วนของเส้นตรง QA ออกเป็นอัตราส่วน QC:CA = 2:1

ดังนั้น ในการหาจุด C เราต้องหาจุด A เสียก่อน  
เนื่องจากจุด A เป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง P กับ R

$$\text{ดังนั้น พิกัดของจุด A คือ } \left( \frac{-2+2}{2}, \frac{1-3}{2} \right) = (0, -1)$$

$$\text{เนื่องจาก } \frac{AC}{AQ} = \frac{1}{3} = k$$

$$\text{เมื่อ พิกัดของ A คือ } (0, -1) = (x_1, y_1)$$

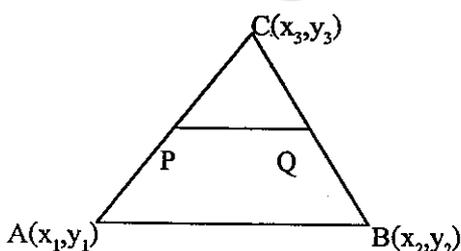
$$\text{พิกัดของ Q คือ } (5, 2) = (x_2, y_2)$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พิกัดของ C คือ } (x_1+k(x_2-x_1), y_1+k(y_2-y_1)) &= \left( 0+\frac{1}{3}(5-0), -1+\frac{1}{3}(2-(-1)) \right) \\ &= \left( \frac{5}{3}, \frac{-3+3}{3} \right) \\ &= \left( \frac{5}{3}, 0 \right) \end{aligned}$$

$$\text{พิกัดของจุด C คือ } \left( \frac{5}{3}, 0 \right)$$

**ตัวอย่างที่ 3** จงพิสูจน์ว่าส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใดๆ จะยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม

**วิธีทำ** กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ใดๆ มีจุดมุม A(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>), B(x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>) และ C(x<sub>3</sub>, y<sub>3</sub>)



ให้ P เป็นจุดกึ่งกลางของ  $\overline{AC}$

Q เป็นจุดกึ่งกลางของ  $\overline{BC}$  ดังรูป

$$\text{จะต้องพิสูจน์ว่า } PQ = \frac{1}{2}AB$$

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\text{พิกัดของ P คือ } \left( \frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2} \right)$$

พิกัดของ Q คือ  $(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2})$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } PQ &= \sqrt{\frac{(x_1 + x_3 - x_2 - x_3)^2}{4} + \frac{(y_1 + y_3 - y_2 - y_3)^2}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \frac{1}{2} AB \end{aligned}$$

2. ครูให้นักเรียนทำเอกสารประกอบการสอน

3. ครูและนักเรียนช่วยกันเฉลย

ขั้นสรุป

ครูให้นักเรียนสรุปการนำความรู้เรื่องจุดแบ่งภายใน และจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด โดยครูใช้แผนภูมิสรุปประกอบ

1) P(x,y) เป็นจุดแบ่งภายในระหว่าง จุด A(x<sub>1</sub>,y<sub>1</sub>) กับ B(x<sub>2</sub>,y<sub>2</sub>) และ  $\frac{AP}{AB} = k$

จะได้ว่า  $(x,y) = (x_1 + k(x_2 - x_1), y_1 + k(y_2 - y_1))$

2) P(x,y) เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A(x<sub>1</sub>,y<sub>1</sub>) กับ B(x<sub>2</sub>,y<sub>2</sub>)

จะได้ว่า  $(x,y) = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$

ขั้นให้งาน

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 5.2 จากหนังสือแบบเรียน ค 011 หน้า 209-210

เป็นการบ้าน

สื่อและอุปกรณ์

1. เอกสารประกอบการสอน
2. กระดานกราฟ 3 รูป
3. แผนภูมิสรุป

## เอกสารประกอบการสอน

1.  $(-5,8)$  และ  $(3,3)$  เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง จงหาจุดศูนย์กลางของวงกลมนี้

2. ให้  $A(2,7)$ ,  $B(-5,6)$  และ  $C(3,-2)$  เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  จงหาความยาวของเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุด  $A$

3. จงพิสูจน์ว่า ระยะทางระหว่างจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากกับจุดยอดทั้งสามยาวเท่ากัน

คาบที่ 8

เรื่อง การนำความรู้เรื่องจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดไปใช้

จุดประสงค์ปลายทาง

นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดไปใช้ได้

จุดประสงค์นำทาง

1. นักเรียนสามารถหาจุดกึ่งกลาง ระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ได้
2. นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับจุดกึ่งกลาง ระหว่างจุดสองจุดไปใช้ได้

สาระสำคัญ

ถ้า  $P(\bar{x}, \bar{y})$  เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $A(x_1, y_1)$  และ  $B(x_2, y_2)$  แล้ว  $P$  มีพิกัดที่จุด

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

เนื้อหา

จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูให้นักเรียน ทำแบบทดสอบประจำหน่วยครั้งที่ 1 จากคอมพิวเตอร์จำนวน 10 ข้อ
2. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ได้คะแนนจากแบบทดสอบประจำหน่วยครั้งที่ 1 ตั้งแต่ 5 ข้อขึ้นไป เป็นกลุ่มผ่าน และอีกกลุ่มคือกลุ่มที่ได้คะแนนจากแบบทดสอบประจำหน่วยครั้งที่ 1 ต่ำกว่า 5 ข้อจะเป็นกลุ่มที่ไม่ผ่าน
3. ครูให้นักเรียนกลุ่มที่ไม่ผ่าน เรียนบทเรียนซ่อมด้วยคอมพิวเตอร์ และกลุ่มที่ผ่านเรียนบทเรียนเสริมด้วยคอมพิวเตอร์

4. ครูให้นักเรียนทั้งสองกลุ่ม ทำแบบทดสอบประจำหน่วยครั้งที่ 2 จากคอมพิวเตอร์

สื่อและอุปกรณ์

1. แบบทดสอบประจำหน่วยครั้งที่ 1 และครั้งที่ 2
2. บทเรียนซ่อมและบทเรียนเสริม
3. คอมพิวเตอร์

## แบบทดสอบก่อนเรียน ประจำหน่วยที่ 3

1. จุดกึ่งกลางระหว่างจุด (1,2) กับ (7,6) ตรงกับข้อใด
 

(1) (4,4)	(2) (3,4)
(3) (3,2)	(4) (4,2)
2. จุดกึ่งกลางระหว่างจุด (-3,4) กับ (5,-6) ตรงกับข้อใด
 

(1) (-4,-5)	(2) (4,-2)
(3) (-8,2)	(4) (1,-1)
3. จุดกึ่งกลางระหว่างจุด (-3,-4) กับ (6,-7) ตรงกับข้อใด
 

(1) $(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2})$	(2) $(\frac{3}{2}, -\frac{11}{2})$
(3) $(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2})$	(4) $(\frac{3}{2}, -\frac{11}{2})$
4. จุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $(\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$  กับ  $(-2\frac{1}{2}, -7\frac{1}{2})$  ตรงกับข้อใด
 

(1) (-2,-3)	(2) $(-1, -\frac{3}{2})$
(3) (-4,-6)	(4) $(\frac{3}{2}, 6)$
5. ถ้า C(2,3) เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A(-2,0) และ B(x,y) แล้ว B(x,y) ตรงกับข้อใด
 

(1) (2,5)	(2) (2,6)
(3) (6,6)	(4) (8,5)
6. ถ้า P(7,4) เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด Q(6,8) และ R(x,y) แล้ว R(x,y) ตรงกับข้อใด
 

(1) (20,0)	(2) (8,0)
(3) (8,16)	(4) (20,16)
7. กำหนดจุด (-3,2) และจุด (5,8) เป็นจุดปลายเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง จุดศูนย์กลางของวงกลมวงนี้ตรงกับข้อใด
 

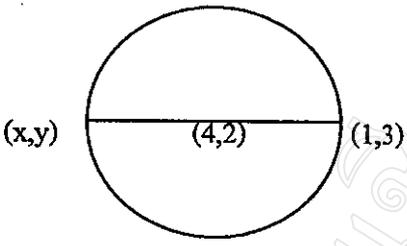
(1) (-4,-3)	(2) (-4,5)
(3) (1,-3)	(4) (1,5)

8. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(-1,2)$  ถ้าจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางข้างหนึ่งอยู่ที่จุด  $(-3,-2)$  จุดปลายอีกข้างหนึ่งตรงกับข้อใด
- (1)  $(1,6)$  (2)  $(-5,-6)$   
 (3)  $(-1,2)$  (4)  $(5,-2)$
9. ให้  $D(\bar{x},1)$  เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $E(-5,-4)$  กับ  $F(1,y)$  แล้วค่า  $\bar{x}$  และ  $y$  ตรงกับข้อใด ตามลำดับ
- (1)  $-2, 6$  (2)  $-3, 2$   
 (3)  $7, -\frac{3}{2}$  (4)  $-11, -9$
10. ให้  $(3,\bar{y})$  เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $(x,2)$  และ  $(7,4)$  ค่าของ  $x, \bar{y}$  ตรงกับข้อใด ตามลำดับ
- (1)  $-2, 3$  (2)  $1, -1$   
 (3)  $-1, 3$  (4)  $-2, -1$

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน ประจำหน่วยที่ 3

- |        |         |
|--------|---------|
| 1. (1) | 6. (2)  |
| 2. (4) | 7. (4)  |
| 3. (4) | 8. (1)  |
| 4. (2) | 9. (1)  |
| 5. (3) | 10. (3) |

## แบบทดสอบหลังเรียน ประจำหน่วยที่ 3

1.  (x,y) ตรงกับข้อใด
- (1) (5,5)  
 (2) (8,1)  
 (3) (2,1)  
 (4) (9,7)
2. จุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $(-3,5)$  กับ  $(7,3)$  ตรงกับข้อใด
- (1) (2,4) (2) (5,4)  
 (3) (4,8) (4) (10,8)
3. จุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $(10,-8)$  กับ  $(5,10)$  ตรงกับข้อใด
- (1) (10,10) (2)  $(\frac{15}{2}, 9)$   
 (3) (5,2) (4)  $(\frac{15}{2}, 1)$
4. จุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $(-\frac{4}{7}, 3\frac{1}{7})$  กับ  $(4\frac{2}{7}, -6\frac{1}{7})$  ตรงกับข้อใด
- (1)  $(1\frac{6}{7}, 3)$  (2)  $(2\frac{3}{7}, 6)$   
 (3)  $(1\frac{6}{7}, 1\frac{1}{2})$  (4)  $(2\frac{3}{7}, 1\frac{1}{2})$
5. ถ้า  $(5,-3)$  เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $(x,y)$  กับ  $(-6,8)$  แล้วจุด  $(x,y)$  ตรงกับข้อใด
- (1) (16,-14) (2) (-1,-11)  
 (3)  $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$  (4) (7,19)
6. จุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $(-8,3)$  กับ  $(x,y)$  คือ  $(4,4)$  จุด  $(x,y)$  ตรงกับข้อใด
- (1)  $(-2, \frac{7}{2})$  (2) (0,11)  
 (3) (12,1) (4) (16,5)

7.  $(-1,2)$  เป็นจุดกึ่งกลางของ  $\overline{AB}$  เมื่อพิกัดของ A คือ  $(2,-1)$  แล้วพิกัดของ B ตรงกับข้อใด
- (1)  $(0,3)$  (2)  $(-3,3)$   
 (3)  $(-4,5)$  (4)  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
8.  $(-3,2)$  เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $(5,y)$  กับ  $(x,-9)$  ค่า  $x, y$  ตรงกับข้อใด ตามลำดับ
- (1)  $1, -\frac{7}{2}$  (2)  $-1, -5$   
 (3)  $0, -11$  (4)  $-11, 13$
9.  $(-2, \bar{y})$  เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $(x,4)$  กับ  $(4,-2)$  ค่าของ  $x, \bar{y}$  ตรงกับข้อใด ตามลำดับ
- (1)  $1, 1$  (2)  $0, -1$   
 (3)  $-6, 0$  (4)  $-8, 1$
10.  $(\bar{x}, 6)$  เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $(-4,-2)$  กับ  $(10,y)$  ค่า  $\bar{x}, y$  ตรงกับข้อใด ตามลำดับ
- (1)  $-2, 2$  (2)  $6, 12$   
 (3)  $3, 14$  (4)  $-1, 13$

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน ประจำหน่วยที่ 3

1. (2) 6. (4)  
 2. (1) 7. (3)  
 3. (4) 8. (4)  
 4. (3) 9. (4)  
 5. (1) 10. (3)

## ภาคผนวก ก

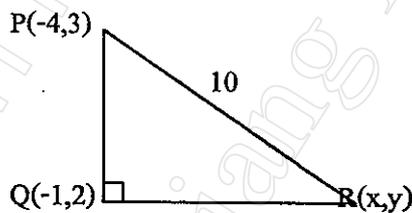
## ตารางวิเคราะห์จุดประสงค์

ตาราง 6 ตารางวิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับพฤติกรรม				ร้อยละ	จำนวน ข้อ
	(1) ความรู้ความจำด้าน การคิดคำนวณ	(2) ความ เข้าใจ	(3) การนำ ไปใช้	(4) การ วิเคราะห์		
1. ทาระยะระหว่าง จุด 2 จุดได้	15	5			20	4
2. นำความรู้เกี่ยวกับ ระยะระหว่างจุดสองจุด ไปใช้ได้		10	15		25	5
3. หาจุดแบ่งภายใน ระหว่าง จุด 2 จุดได้	5	5	5		15	3
4. หาจุดกึ่งกลางระหว่าง จุด 2 จุดได้	10	10			20	4
5. นำความรู้เกี่ยวกับ จุดกึ่งกลาง จุดแบ่ง ภายในหรือระยะระหว่าง จุด 2 จุดไปใช้ได้		5	15		20	4
ร้อยละ	30	35	35		100	
จำนวนข้อ	6	7	7			20



6.  $\Delta$  รูปหนึ่งมีจุดยอดมุมอยู่ที่  $(7,0)$  ,  $(1,6)$  และ  $(-5,6)$  จะมีความยาวของเส้นรอบรูปตรงกับข้อใด
- ก.  $18\sqrt{7}$                       ข.  $6\sqrt{2} + 6 + 6\sqrt{5}$   
 ค.  $6\sqrt{2} + 6 + 4\sqrt{5}$               ง.  $6\sqrt{2} + 4 + 6\sqrt{7}$
7. กำหนดให้  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งมี  $AB$  เป็นฐาน ถ้าพิกัดของจุด  $A, B$  และ  $C$  เป็น  $(-4,2)$  ,  $(4,-6)$  และ  $(x,5)$  ตามลำดับ  $x$  มีค่าเท่ากับข้อใด
- ก. 3.0              ข. 3.1              ค. 7.0              ง. 8.1
8. จุดยอดสองจุดของสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็น  $(0,0)$  และ  $(0,6)$  จุดที่สามเป็นจุดที่อยู่ในคอร์เน็คที่ 2 ตรงกับข้อใด
- ก.  $(-2\sqrt{3}, 3)$                       ข.  $(-3\sqrt{3}, 3)$   
 ค.  $(-4\sqrt{3}, 3)$                       ง.  $(-5\sqrt{3}, 3)$
9. จุด  $R(x,y)$  ตรงกับข้อใด เมื่อ  $\Delta PQR$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป



- ก.  $(-2,11)$  หรือ  $(4,-7)$               ข.  $(2,11)$  หรือ  $(4,-7)$   
 ค.  $(2,11)$  หรือ  $(-4,-7)$               ง.  $(4,11)$  หรือ  $(2,-7)$

จุดประสงค์ที่ 3 หาจุดแบ่งภายในระหว่างจุด 2 จุดได้

10. จุด  $P(x,y)$  ที่เป็นจุดแบ่งระหว่างจุด  $A(-3,-3)$  กับ  $B(5,4)$  ออก เป็นอัตราส่วน

$$\frac{AP}{AB} = \frac{3}{5} \text{ ตรงกับข้อใด}$$

- ก.  $(\frac{9}{5}, \frac{6}{5})$                       ข.  $(\frac{39}{5}, \frac{36}{5})$   
 ค.  $(\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$                       ง.  $(\frac{21}{5}, \frac{18}{5})$

11. จุด  $A(x,y)$  ที่แบ่งระยะระหว่างจุด  $P(-8,3)$  กับ  $Q(9,-1)$  ออกเป็นอัตราส่วน

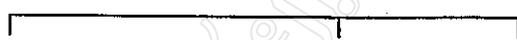
$$\frac{PA}{AQ} = \frac{2}{3} \text{ ตรงกับข้อใด}$$

ก.  $(\frac{10}{3}, \frac{17}{3})$

ข.  $(\frac{6}{5}, \frac{7}{5})$

ค.  $(\frac{58}{3}, \frac{1}{3})$

ง.  $(\frac{74}{5}, \frac{7}{5})$

12. 

$A(4,5)$

$C(x,y)$

$B(7,8)$

เมื่อ  $AC : CB = 2 : 1$  แล้วจุด  $C(x,y)$  ตรงกับข้อใด

ก. (5,6)

ข. (6,7)

ค. (6,8)

ง. (7,9)

จุดประสงค์ที่ 4 หาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุดได้

13. จุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $(a+b, c+d)$  กับ  $(a-b, c-d)$  เท่ากับข้อใด

ก. (b,d)

ข. (-b,-d)

ค. (0,0)

ง. (a,c)

14. จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง  $A(2,-3)$   $B(-2,5)$  คือจุดใด

ก. (0,-1)

ข. (0,2)

ค. (0,1)

ง. (0,3)

15. ให้  $A(x_1, 3)$  เป็นจุดกึ่งกลางของจุด  $(-2, 5)$  และจุด  $(5, y_2)$  จงหา ค่า  $x_1, y_2$  ตามลำดับ

ก.  $1, \frac{3}{2}$

ข.  $1, \frac{3}{2}$

ค.  $\frac{3}{2}, 1$

ง.  $\frac{3}{2}, 1$

16. ให้  $(4, 8)$  เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $(2, 3)$  กับจุด  $(x, y)$  แล้ว จุด  $(x, y)$  ตรงกับข้อใด

ก.  $(3, \frac{11}{2})$

ข. (10,19)

ค.  $(1, \frac{5}{2})$

ง. (6,13)

จุดประสงค์ที่ 5 นำความรู้เกี่ยวกับจุดกึ่งกลาง จุดแบ่งภายใน หรือระยะระหว่างจุด 2 จุด ไปใช้ได้

17. จุด ๆ หนึ่งอยู่บนแกน  $y$  และสัมผัสกับวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง  $(4,-1)$  และมีรัศมีเท่ากับ 4 แล้วตำแหน่งของจุดนี้ตรงกับข้อใด

- ก.  $(0,-1)$       ข.  $(1,-1)$       ค.  $(-1,0)$       ง.  $(-1,1)$

18. เมื่อ  $A$  และ  $B$  แทนจุดกึ่งกลางของด้าน  $PQ$  และด้าน  $QS$  ตามลำดับ

ถ้า  $P(3,3)$ ,  $Q(7,3)$  และ  $S(3,6)$  เป็นจุดยอดของ  $\triangle PQS$  แล้ว  $AB$  ยาวเท่ากับข้อใด

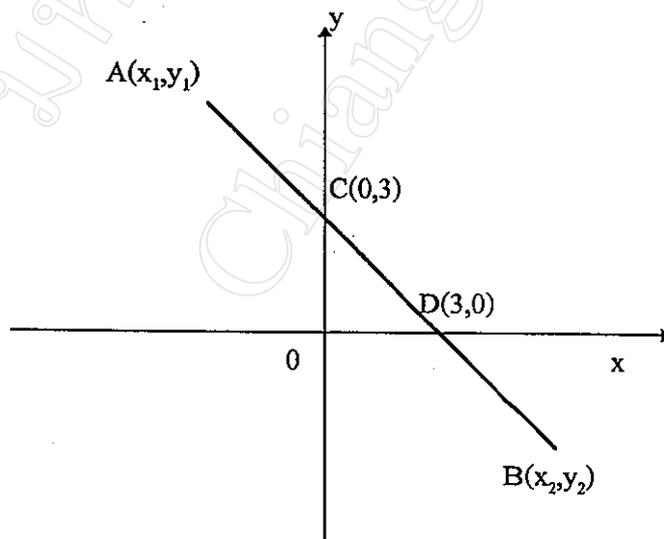
- ก.  $\frac{3}{2}$       ข.  $\frac{15}{2}$       ค.  $\sqrt{\frac{3}{2}}$       ง.  $\sqrt{\frac{15}{2}}$

19. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(5,-3)$  รัศมียาวเท่ากับ 5 หน่วย เมื่อลาก  $AB$  ซึ่งเป็นคอร์ดของวงกลมวงนี้แล้ว ได้จุดกึ่งกลางของคอร์ดอยู่ที่จุด  $(2,-3)$

ดังนั้น  $AB$  ยาวเท่ากับข้อใด

- ก.  $2\sqrt{15}$       ข. 4      ค.  $2\sqrt{35}$       ง. 8

20.



จุด  $C$  และ  $D$  เป็นจุดตัดบนส่วนของเส้นตรง  $AB$  ที่ทำให้แบ่ง  $AB$  ออกเป็น 3 ส่วนเท่าๆ กัน จุด  $A$  และ  $B$  มีพิกัดตรงกับ ข้อใด

- ก.  $(4,-3)$  หรือ  $(-2,6)$       ข.  $(-3,6)$  หรือ  $(6,-3)$   
 ค.  $(-4,3)$  หรือ  $(2,-6)$       ง.  $(3,-4)$  หรือ  $(-6,2)$

## เฉลยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

- |       |       |
|-------|-------|
| 1. ก  | 2. ค  |
| 3. ข  | 4. ค  |
| 5. ง  | 6. ข  |
| 7. ค  | 8. ข  |
| 9. ค  | 10. ก |
| 11. ข | 12. ข |
| 13. ง | 14. ค |
| 15. ง | 16. ง |
| 17. ก | 18. ก |
| 19. ง | 20. ข |

## ภาคผนวก จ

## แบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรมทางการเรียน

ตาราง 7 แบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรมทางการเรียน

ชั้น.....ครั้งที่.....วัน เดือน ปี ที่บันทึก.....

ด้านความเข้าใจใส่	ด้านความมีวินัย	ด้านความรับผิดชอบ

## ภาคผนวก ก

## ตารางแสดงข้อมูลของกลุ่มตัวอย่าง

ตาราง 8 คะแนนจากแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนซ่อมเสริม

ประจำหน่วยที่ 1 เรื่อง ระยะระหว่างจุด 2 จุด

นักเรียน คนที่	คะแนนก่อนเรียน (10)	คะแนนหลัง เรียน (10)	นักเรียน คนที่	คะแนนก่อน เรียน(10)	คะแนนหลัง เรียน(10)
1	8	8	20	2	4
2	7	7	21	4	5
3	5	6	22	6	7
4	8	8	23	1	7
5	5	6	24	3	6
6	7	9	25	5	8
7	3	5	26	8	10
8	3	8	27	6	7
9	7	6	28	7	7
10	7	7	29	5	6
11	7	9	30	3	5
12	7	6	31	3	4
13	5	6	32	2	3
14	7	6	33	5	5
15	5	7	34	2	6
16	6	6	35	4	3
17	7	10	36	9	10
18	2	5	37	1	6
19	8	9	38	4	4

ตาราง 9 คะแนนจากแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนซ่อมเสริม  
ประจำหน่วยที่ 2 เรื่อง จุดแบ่งภายในระหว่างจุด 2 จุด

นักเรียน คนที่	คะแนนก่อน เรียน(10)	คะแนนหลัง เรียน(10)	นักเรียน คนที่	คะแนนก่อน เรียน(10)	คะแนนหลัง เรียน(10)
1	4	6	20	5	6
2	3	4	21	3	2
3	4	4	22	8	6
4	9	10	23	2	8
5	4	7	24	5	6
6	6	6	25	7	5
7	2	7	26	9	9
8	6	5	27	5	7
9	1	6	28	2	9
10	5	6	29	2	4
11	2	7	30	4	6
12	3	5	31	4	4
13	5	7	32	2	5
14	6	10	33	5	7
15	6	7	34	6	9
16	5	5	35	5	8
17	5	5	36	8	9
18	3	3	37	4	7
19	2	5	38	5	5

ตาราง 10 คะแนนจากแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนซ่อมเสริม  
ประจำหน่วยที่ 3 เรื่อง จุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด

นักเรียน คนที่	คะแนนก่อน เรียน(10)	คะแนนหลังเรียน (10)	นักเรียน คนที่	คะแนนก่อน เรียน(10)	คะแนนหลังเรียน (10)
1	3	4	20	6	6
2	8	8	21	5	5
3	2	5	22	9	9
4	4	7	23	5	8
5	1	8	24	5	8
6	5	7	25	6	8
7	7	7	26	10	9
8	5	8	27	7	7
9	4	1	28	6	9
10	3	6	29	5	7
11	7	4	30	5	9
12	5	8	31	6	4
13	6	6	32	5	8
14	9	9	33	8	9
15	8	9	34	7	9
16	8	7	35	6	8
17	7	9	36	9	9
18	5	6	37	6	8
19	7	8	38	8	10

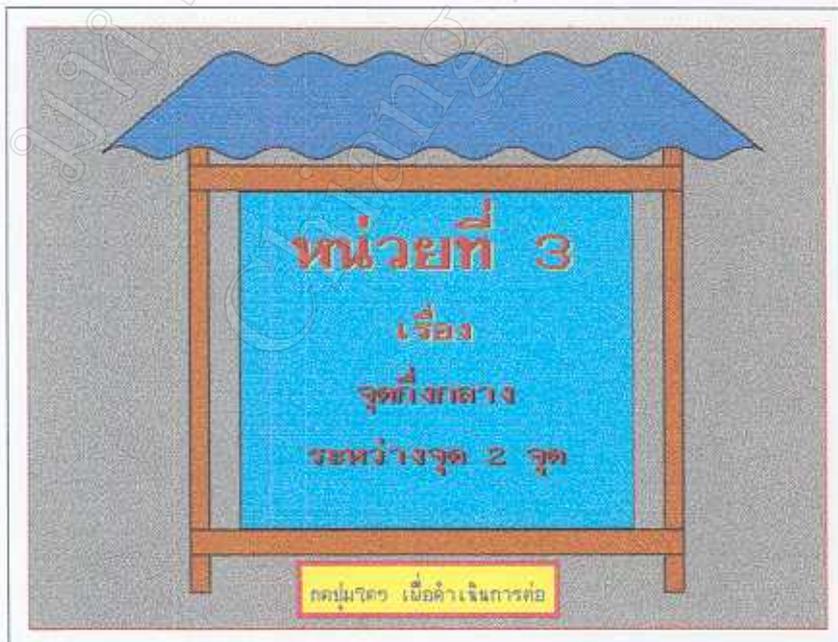
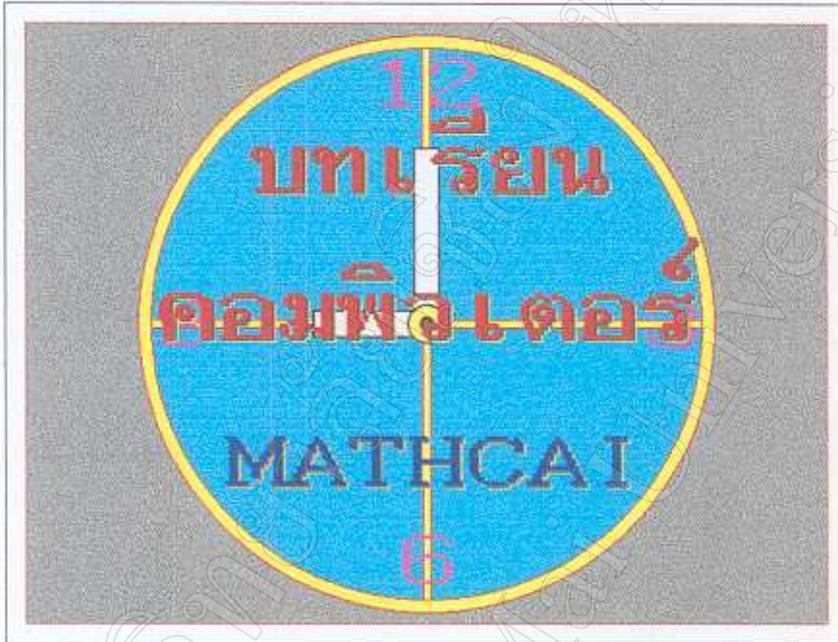
ตาราง 11 คะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

นักเรียน คนที่	จุดประสงค์					นักเรียน คนที่	จุดประสงค์				
	1(4)	2(5)	3(3)	4(4)	5(4)		1(4)	2(5)	3(3)	4(4)	5(4)
1	3	2	1	4	2	20	3	3	1	3	0
2	4	4	2	3	1	21	3	4	0	2	1
3	3	2	0	3	1	22	4	5	0	3	2
4	4	4	3	4	2	23	2	3	0	3	1
5	3	3	2	2	3	24	4	2	2	3	2
6	3	3	2	3	3	25	3	3	0	4	1
7	4	2	1	2	0	26	4	4	3	4	2
8	3	3	2	3	2	27	4	3	1	3	0
9	3	2	1	3	0	28	4	4	2	3	1
10	4	3	2	2	2	29	2	1	2	3	3
11	3	2	1	4	2	30	4	3	2	2	1
12	4	3	2	3	0	31	2	1	2	3	2
13	3	3	1	4	2	32	3	2	1	2	0
14	4	3	2	3	2	33	3	2	2	3	2
15	2	3	1	2	3	34	4	3	2	4	3
16	3	4	1	4	1	35	3	1	1	4	3
17	4	5	3	3	2	36	4	5	2	4	3
18	3	2	0	3	0	37	2	0	0	4	2
19	4	3	1	4	2	38	4	1	1	1	3

หมายเหตุ ตัวเลขในวงเล็บ คือ คะแนนเต็ม

## ภาคผนวก ช

ตัวอย่างบทเรียนคอมพิวเตอร์





COUNT: 853

1. จุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $(1,2)$   
กับ  $(7,6)$  ตรงกับข้อใด

(1)  $(4,4)$       (2)  $(3,4)$   
(3)  $(5,2)$       (4)  $(4,2)$

เลือก 1 2 3 4

COUNT: 853

2. จุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $(-3,4)$   
กับ  $(5,-6)$  ตรงกับข้อใด

(1)  $(-4,-5)$       (2)  $(4,-2)$   
(3)  $(-8,2)$       (4)  $(1,-1)$

เลือก 1 2 3 4

**ข้อ 20**

ข้อ 20. ให้  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$  และ  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 4 = 0\}$

จงหา  $A \cap B$

(1)  $\{1, 2\}$  (2)  $\{1, 2, 3\}$   
 (3)  $\{2, 3, 4\}$  (4)  $\{1, 2, 3, 4\}$

เลือก  1  2  3  4

**ข้อ 21**

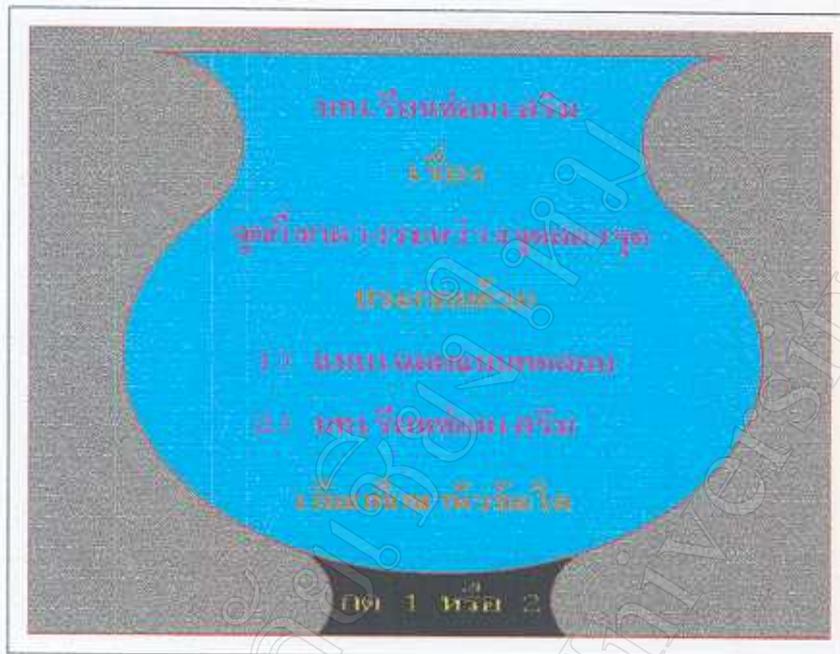
ข้อ 21. ให้  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$  และ  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$

จงหา  $A \cup B$

(1)  $\{2, 3, 4, 5, 6\}$   
 (2)  $\{2, 3, 4, 5\}$   
 (3)  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$   
 (4)  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

เลือก  1  2  3  4











## ประวัติผู้เขียน

ชื่อ - สกุล	นางสาวปริญญา คำใบ รหัส 3822483
วัน เดือน ปีเกิด	26 พฤศจิกายน 2516
ที่อยู่ปัจจุบัน	42 หมู่ 5 บ้านไร่ ตำบลโพนทอง กิ่งอำเภอโพธิ์ตาก จังหวัดหนองคาย 43130
ประวัติการศึกษา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (ศึกษาศาสตร์) มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ปี พ.ศ. 2538
ประสบการณ์ทำงาน	- โรงเรียนเรณูนาเชลิวิทยาลัย อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่ ปี 2540 - 2542 - โรงเรียนบ้านนาจิว อำเภอสังคม จังหวัดหนองคาย ปี 2542 - ปัจจุบัน