

บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

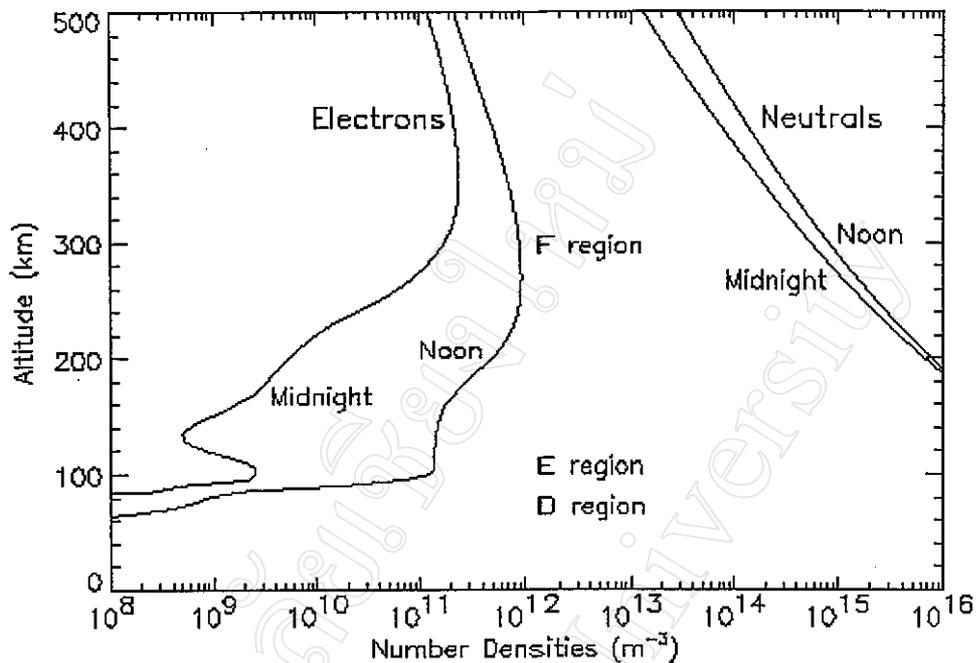
2.1 โครงสร้างชั้นบรรยากาศของโลก

ชั้นบรรยากาศของโลกจะมีการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นและองค์ประกอบตามความสูงเหนือจากพื้นโลกขึ้นไป โดยส่วนของชั้นบรรยากาศที่อยู่ต่ำสุด เรียกว่า โทรโพสเฟียร์ (Troposphere) ซึ่งจะมีความหนาแน่นประมาณ 10 กิโลเมตร ในบรรยากาศชั้นนี้จะมีโมเลกุล (Molecule) ของออกซิเจน (Oxygen) และไนโตรเจน (Nitrogen) อยู่เป็นจำนวนมาก

บรรยากาศชั้นที่อยู่ถัดจากบรรยากาศชั้นโทรโพสเฟียร์ขึ้นไปอีกประมาณ 10 กิโลเมตร เรียกว่า สตราโตสเฟียร์ (Stratosphere) ภายในบรรยากาศชั้นนี้ รังสีจากดวงอาทิตย์ที่ความยาวคลื่นต่ำกว่า 240 นาโนเมตร สามารถทำให้โมเลกุลของออกซิเจนแตกตัวแล้วไปรวมกับโมเลกุลของออกซิเจนที่เหลือกลายเป็นอะตอมออกซิเจน (Oxygen Atom) 3 ตัว หรือ โอโซน (Ozone) นั่นเอง

ปริมาณก๊าซ (Gas) จะลดลงเมื่อความสูงเพิ่มขึ้น ที่ความสูง 82 กิโลเมตร ปริมาณก๊าซจะเบาบางมากจนกระทั่งอิเล็กตรอนอิสระสามารถอยู่ได้ในช่วงเวลาสั้นๆ ก่อนที่จะกลับมารวมตัวกันกับไอออนบวก (Positive Ion) ที่อยู่ใกล้เคียง การมีอยู่ของอนุภาคที่มีประจุเหล่านี้ จึงเป็นจุดเริ่มต้นของการเกิดบรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์ซึ่งมีคุณสมบัติของก๊าซและของพลาสมา

บรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์ คือ บรรยากาศชั้นบนที่ทำหน้าที่ดูดกลืนพลังงานจำนวนมากที่แผ่ออกมาจากดวงอาทิตย์ให้กลายเป็นความร้อนและละออง เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติทางกายภาพของชั้นบรรยากาศ เช่น อุณหภูมิ ความหนาแน่น การรวมตัว และรังสีที่ได้รับ มีหลายชนิด ดังนั้น บรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์จึงสามารถแบ่งออกได้เป็นชั้นๆ มากกว่าปกติ โดยรังสีที่สำคัญ ได้แก่ รังสีอัลตราไวโอเล็ต (Ultraviolet) รังสีอัลฟา (Alpha) รังสีเบตา (Beta) และรังสีแกมมา (Gamma) ซึ่งส่งมาจากดวงอาทิตย์พร้อมๆ กับรังสีคอสมิก (Cosmic) และสะเก็ดดาว ทำให้เกิดเลเยอร์ (Layer) ต่างๆ คือ D E F1 และ F2 โดยที่เลเยอร์ F1 และ F2 จะรวมตัวกันกลายเป็นเลเยอร์เดียวในตอนกลางคืน ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 เลเซอร์ในบรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์

ที่มา: Richmond, 1997

เลเซอร์ D เป็นเลเซอร์ที่อยู่ต่ำที่สุด คือ ที่ความสูงประมาณ 70 กิโลเมตร มีความหนาโดยเฉลี่ย 10 กิโลเมตร ระดับการสร้างไอออน (Ionization) ขึ้นอยู่กับความสูงของดวงอาทิตย์ ดังนั้น เลเซอร์ D จึงหายไปในตอนกลางคืน เลเซอร์ D นี้ เป็นเลเซอร์ที่มีความสำคัญน้อยที่สุด ในแง่ของการแพร่กระจายคลื่นด้วยคลื่นความถี่สูง (HF, High Frequency) เลเซอร์นี้จะสะท้อนคลื่นความถี่ต่ำมาก (VLF, Very Low Frequency) และคลื่นความถี่ต่ำ (LF, Low Frequency) และจะถูกดูดกลืนคลื่นความถี่ปานกลาง (MF, Medium Frequency) ส่วนคลื่น HF จะถูกดูดกลืนไปบางส่วน

เลเซอร์ E จะอยู่ที่ความสูงประมาณ 100 กิโลเมตร มีความหนาประมาณ 25 กิโลเมตร เลเซอร์นี้จะหายไปในตอนกลางคืนเช่นเดียวกับเลเซอร์ D เนื่องจากมีการลดการสร้างไอออน (Deionize) และการรวมตัวกลับคืนของไอออนภายในเลเซอร์ เพราะว่าเป็นตอนกลางคืนไม่มีแสงจากดวงอาทิตย์ ดังนั้น จึงรับรังสีไม่ได้ ทำให้ไอออนกลับมารวมตัวกันกลายเป็นโมเลกุลดังกล่าวอย่างรวดเร็ว ส่วนหน้าที่ของเลเซอร์นี้ คือ ช่วยในการแพร่กระจายคลื่น MF เล็กน้อย และช่วยสะท้อนคลื่น HF บางคลื่นในเวลากลางวัน โดยระยะทางที่สามารถสะท้อนคลื่นดังกล่าวไปได้นั้น จะไม่เกิน 1000 กิโลเมตร

เลเยอร์ Es เป็นเลเยอร์บางๆ ที่มีความหนาแน่นของการสร้างไอออนสูงมาก บางครั้ง ก็จะทำให้เกิดเลเยอร์ E หรืออาจจะเรียกว่า เลเยอร์ สะปอดิค E (Sporadic E Layer) และมีความไม่สม่ำเสมอมาก ซึ่งมักจะพบว่าเลเยอร์นี้สามารถเกิดในช่วงกลางคืนได้ โดยทั่วไป เลเยอร์นี้ไม่มีความสำคัญต่อการแพร่กระจายคลื่นในระยะทางไกลๆ แต่ก็มักจะมีการกล่าวถึงอยู่บ่อยๆ เนื่องจากมีความหนาแน่นของไอออนสูงและไม่สามารถคาดเดาได้ว่าจะเกิดขึ้นเมื่อไรนั่นเอง

เลเยอร์ F1 จะอยู่ที่ความสูงประมาณ 180 กิโลเมตรในตอนกลางวัน และจะรวมตัวกับเลเยอร์ F2 ในตอนกลางคืน ในตอนกลางวันนั้น จะมีความหนาแน่นประมาณ 20 กิโลเมตร ถึงแม้ว่าคลื่น HF บางคลื่นจะถูกสะท้อนที่เลเยอร์นี้ก็ตาม แต่ส่วนใหญ่แล้วจะไปสะท้อนที่เลเยอร์ F2 มากกว่า ดังนั้น ผลกระทบหลักของเลเยอร์ F1 ก็คือ การดูดกลืนคลื่น HF โดยการดูดกลืนคลื่นของเลเยอร์นี้ และเลเยอร์อื่นจะเกิดขึ้น 2 ครั้ง เนื่องจากคลื่นดังกล่าวจะถูกดูดกลืนทั้งขาขึ้นและขาลง

เลเยอร์ F2 เป็นตัวกลางในการสะท้อนที่สำคัญมากสำหรับคลื่น HF อาจมีความหนาแน่นถึง 200 กิโลเมตร และอยู่ที่ความสูงจาก 250 ถึง 400 กิโลเมตรในตอนกลางวัน ในตอนกลางคืน เลเยอร์นี้จะอยู่ต่ำลงที่ความสูงประมาณ 300 กิโลเมตร โดยรวมตัวกับเลเยอร์ F1 ซึ่งความสูงและความหนาแน่นของการสร้างไอออนจะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างมากและขึ้นกับช่วงเวลาของวัน (คือ การเปลี่ยนแปลงในแต่ละวัน) อุณหภูมิโดยเฉลี่ย (คือ การเปลี่ยนแปลงตามฤดูกาล) และวงรอบจุดดับบนดวงอาทิตย์ จะเห็นได้ชัดว่า เลเยอร์ F จะคงมีอยู่ในตอนกลางคืน ซึ่งไม่เหมือนกับเลเยอร์อื่น เนื่องจากเป็นเลเยอร์ที่อยู่สูงที่สุด มีการสร้างไอออนสูงที่สุด และมีโอกาสเกิดการสร้างไอออนในตอนกลางคืนได้ ส่วนเหตุผลอื่นก็คือ ถึงแม้ว่าความหนาแน่นของการสร้างไอออนจะสูงในเลเยอร์นี้ แต่ความหนาแน่นของอากาศจริงๆ ไม่ได้เป็นเช่นนั้น เมื่อโมเลกุลเกาะกันอยู่อย่างหลวมๆ ดังนั้น โมเลกุลส่วนใหญ่ที่อยู่ภายในเลเยอร์นี้จึงถูกไอออไนซ์ (Ionize) เป็นส่วนใหญ่ ยิ่งไปกว่านั้น การที่มีความหนาแน่นจริงต่ำเช่นนี้ส่งผลให้โมเลกุลมีระยะทางอิสระโดยเฉลี่ยมาก คือ ระยะทางเฉลี่ยที่โมเลกุลจะสามารถเคลื่อนไปได้ก่อนที่จะชนกับโมเลกุลอื่น ทำให้อัตราการชนกันของโมเลกุลต่ำ ซึ่งหมายความว่า การสร้างไอออนไม่ได้หายไปโดยทันทีที่ดวงอาทิตย์หายไป จึงสรุปว่า เหตุผลที่สามารถรับคลื่น HF ได้ดีในตอนกลางคืนก็คือ การรวมตัวกันของเลเยอร์ F1 และ F2 กลายเป็นเลเยอร์ F และการหายไปของอีกสองเลเยอร์ ซึ่งมีส่วนทำให้คลื่น HF ถูกดูดกลืนไปในช่วงเวลากลางวัน

2.2 ปริมาณอิเล็กตรอนรวมในบรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์

ปริมาณอิเล็กตรอนและพารามิเตอร์ (Parameter) ที่เป็นปริมาณรวม สำหรับบรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์ จากพื้นดินไปจนถึงความสูงประมาณ 1000 กิโลเมตร มีความสำคัญต่อการ

ประยุกต์ใช้งานทั้งทางด้านธรณีฟิสิกส์ (Geophysics) และด้านวิศวกรรม เนื่องจากค่าที่วัดได้จริงไม่สามารถหาได้เสมอไป จึงต้องมีการจำลองเพื่อจุดประสงค์ต่างๆ สิ่งหนึ่งก็คือ การทำนายและความต้องการที่จะประเมินความผิดพลาดของการแพร่กระจายผ่านบรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์ เช่น จีโอดีซีอวกาศ (Space geodesy) ดาราศาสตร์ใช้วิทยุ (Radio Astronomy) การกระจายเชิงเวลาผ่านดาวเทียม การนำร่องผ่านดาวเทียมและยานสำรวจอวกาศ

เทคนิค (Technique) การวัดปริมาณอิเล็กทรอนิกส์ในปัจจุบัน จะอาศัยผลการแพร่กระจายที่สังเกตได้จากสัญญาณที่ถูกส่งจากดาวเทียมมายังพื้นโลก โดยมีองค์ประกอบสัญญาณหลายอย่างเพื่อใช้ในการแยกผลทางเรขาคณิต (Geometric) และก๊าซเป็นกลาง (Neutral Gas) วิธีการทดลองที่สำคัญโดยการใช้องค์ประกอบของสัญญาณได้แสดงไว้ในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 เทคนิคการวัดปริมาณอิเล็กทรอนิกส์ในปัจจุบัน

ที่มา: *Bilitza, 1990*

เทคนิค	ปรากฏการณ์ฟาราเดย์ (Faraday effect)	ปรากฏการณ์คอปเปิลเลอร์เชิงอนุพันธ์ (Differential Doppler Effect)	เวลาหน่วงกลุ่ม (Group delay)
ชื่ออื่น	-	ความต่างเฟสคลื่นพาห้	ความต่างเฟสการมอดูเลต (Modulation phase difference)
องค์ประกอบสัญญาณ	องค์ประกอบคลื่นแบบวงกลมวนซ้ายและวนขวาของคลื่นพาห้หนึ่ง	คลื่นพาห้ 2 คลื่นที่เหมือนกัน แต่มีความถี่ต่างกันมากๆ	การมอดูเลต (Modulation) แบบเดียวกันและเหมือนกันบนคลื่นพาห้
แถบความถี่	VHF	VHF/UHF, แถบ L	c: BHF/UHF, แถบ L m: 0.1 ... 10 MHz
ดาวเทียม	บีคอน (Beacon) ของดาวเทียมสื่อสารค้างฟ้า	ระบบดาวเทียมนำร่องทางเรือ (NNSS, Navy Navigation Satellite System), ระบบดาวเทียมบอกพิกัด GPS	ATS 6 วิทยุบอกตำแหน่ง (Radio Beacon) และ GPS
ความถี่คลื่นพาห้ f_1, f_2 [MHz]	136	NNSS: 150, 400 GPS: 1227, 1575	ATS 6: 140, 360 GPS: 1227, 1575
ความถี่อ้างอิง [MHz]	-	NNSS: 50 GPS: 1227	-
ความไว $\Delta\phi / \Delta TEC$ [$^{\circ}/10^{15} \text{ m}^{-2}$]	9.12	NNSS: 9.24 GPS: 15.5	ATS 6: 2.11 GPS: 0.13

นิพจน์ทั่วไปสำหรับเฟสสัญญาณที่รับได้โดยการใช้ทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต (Geometric Optics) แสดงดังสมการที่ 1

$$\phi = \frac{2\pi f}{c} \int_T^R n ds + 2\pi f t \quad (1)$$

เมื่อ f คือ ความถี่ที่ส่ง	[Hz]
c คือ ความเร็วแสงในอากาศว่าง	[m/s]
n คือ ดัชนีหักเหของบรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์	
ds คือ องค์ประกอบวิถีรังสี (Ray Path Element)	[m]
t คือ เวลา	[s]
T คือ ศูนย์กลางเฟสของสายอากาศส่ง	
R คือ ศูนย์กลางเฟสของสายอากาศรับ	

วิธีการวัดทั้งสามเทคนิคจะบันทึกผลของการแพร่กระจายในรูปของความต่างเฟส คือ ในปรากฏการณ์ฟาราเดย์จะเป็นความต่างเฟสระหว่างองค์ประกอบโพลาริซแบบวงกลมจำนวนสององค์ประกอบของสัญญาณดาวเทียม ในปรากฏการณ์ดอปเปลอร์เชิงอนุพันธ์จะเป็นความต่างเฟสระหว่างคลื่นพาที่เหมือนกันสองคลื่นส่งไปด้วยความถี่ต่างกันสองสัญญาณ เปลี่ยนไปเป็นความถี่อ้างอิงโดยใช้การแบ่งเฟส ส่วนปรากฏการณ์เวลาหน่วงกลุ่มจะเป็นความแตกต่างของเฟสการมอดูเลตบนคลื่นพาที่ส่งสองคลื่น โดยในแต่ละกรณี ความต่างเฟสจะมีเฉพาะผลของพลาสมาเท่านั้น ปรากฏการณ์ฟาราเป็นสัดส่วนโดยประมาณกับการอินทิกรัล (Integral) ทั่วถึง NB_L เมื่อ N คือ ความหนาแน่นอิเล็กตรอน และ B_L คือ องค์ประกอบของความเข้มสนามแม่เหล็กโลกตามวิถีรังสี TR ส่วนอีกสองปรากฏการณ์นั้น เป็นสัดส่วนโดยประมาณกับการอินทิกรัลทั่วถึง N เท่านั้น สำหรับความถี่ของสัญญาณที่มากกว่า 100 MHz การประมาณแบบนี้จะใช้ได้ดีมากและสามารถละผลของอันดับที่สูงขึ้นไปได้ ในกรณีของปรากฏการณ์ฟาราเดย์ เทอมอินทิกรัลสามารถหาค่าได้โดยการสมมติค่าคงที่ B_L ค่าหนึ่งสำหรับวิถีรังสีทั้งหมด จึงมักจะมีการกำหนดค่า B_L จากความสูงคงที่ค่าหนึ่ง สำหรับดาวเทียมค้างฟ้าที่ต้องการความผิดพลาดน้อยกว่า 5% สามารถหาได้จากการกำหนดความสูงคงที่ที่ 420 กิโลเมตรเพื่อให้ได้ปริมาณอิเล็กตรอนจากพื้นดินถึงความสูงที่กำหนด 2000 กิโลเมตร [Bilitza, 1990]

2.3 ดาวเทียม GPS

ดาวเทียม GPS เป็นดาวเทียมที่ออกแบบเพื่อใช้ในการทหารของประเทศสหรัฐอเมริกา โดยได้รับเงินทุนจาก U.S. Department of Defense (DOD) ดาวเทียม GPS ใช้สัญญาณดาวเทียมที่มีรหัสพิเศษ และที่ตัวรับสัญญาณจากดาวเทียม GPS จะสามารถนำมาใช้เพื่อคำนวณหาตำแหน่ง ความเร็ว และเวลาได้ สัญญาณดาวเทียมที่จะนำมาใช้ในการคำนวณหาตำแหน่งแบบ 3 มิติ และความแตกต่างเวลาของสัญญาณนาฬิกาจะมีทั้งหมด 4 สัญญาณ

ดาวเทียม GPS เป็นระบบนำร่องโดยใช้คลื่นวิทยุ ประกอบด้วย ดาวเทียม 24 ดวง และสถานีภาคพื้นดินของดาวเทียมแต่ละดวง โดยทำงานอยู่ที่ความสูงประมาณ 20000 กิโลเมตร มีระยะเวลาในการโคจรครบรอบเป็น 12 ชั่วโมง ดาวเทียม GPS จะส่งคลื่นวิทยุ L1 (1575.42 MHz) และ L2 (1227.6 MHz) พร้อมๆ กัน ซึ่งคลื่นวิทยุทั้งสองนี้มีความถี่เป็น 154 เท่า และ 120 เท่าของความถี่มาตรฐานของดาวเทียม GPS ตามลำดับ

สัญญาณ L1 จะถูกมอดูเลต (Modulate) ด้วยรหัสสัญญาณรบกวนเทียม (PRN, Pseudo Random Noise) 2 ชนิด โดยชนิดแรกคือ รหัส C/A ซึ่งใช้ทางด้านพลเรือน ส่วนอีกชนิดก็คือ รหัส P ซึ่งใช้ทางด้านทหาร ส่วนสัญญาณ L2 จะถูกมอดูเลตด้วยรหัส P อย่างเดียว และรหัส P ที่ใช้ในการมอดูเลตสัญญาณ L1 และ L2 จะเป็นรหัสเดียวกัน

ความผิดพลาดจากการรับสัญญาณดาวเทียม GPS สามารถเกิดขึ้นได้จากสาเหตุหลายประการ โดยเฉพาะความผิดพลาดที่เกิดขึ้นเนื่องจากการแพร่กระจายคลื่นผ่านบรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์ ซึ่งมีอิเล็กตรอนอิสระกระจายอยู่อย่างหนาแน่น ทำให้คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แพร่กระจายเข้ามา เกิดการหักเห หรือสะท้อนกลับไปได้ และนอกจากบรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์แล้ว ยังมีผลที่เกิดขึ้นจากบรรยากาศชั้นโทรโพสเฟียร์อีกด้วย เนื่องจากบรรยากาศชั้นโทรโพสเฟียร์เป็นบรรยากาศชั้นล่างสุด มีละอองไอน้ำอยู่เป็นจำนวนมาก ทำให้ความแรงของคลื่นที่แพร่กระจายผ่านละอองน้ำเหล่านี้ถูกลดทอนลง รวมทั้งทำให้ความเร็วคลื่นที่เคลื่อนที่เข้ามาลดลงด้วย ส่งผลให้การจับเวลาสัญญาณนาฬิกาผิดพลาดได้ วิธีการหนึ่งที่จะช่วยในการแก้ไขความผิดพลาดที่เกิดจากผลกระทบของชั้นบรรยากาศของโลกได้ ก็คือ การสร้างแบบจำลองชั้นบรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์ แต่ก็ได้ใช้ได้ผลกับการแก้ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นเนื่องจากบรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์ (Ionospheric Correction) เท่านั้น ส่วนการแก้ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นเนื่องจากบรรยากาศชั้นโทรโพสเฟียร์ต้องใช้วิธีอื่น โดยอาจจะใช้การเปรียบเทียบความเร็วกับสัญญาณอีกชุดหนึ่ง ซึ่งต้องใช้เทคนิคขั้นสูงและใช้เครื่องรับสัญญาณที่มีความยุ่งยากขึ้นอีก ส่วนความผิดพลาดที่เกิดจากสาเหตุอื่น ได้แก่ การรบกวนจากสัญญาณที่มาจากดาวเทียมที่สะท้อนกับสิ่งกีดขวาง ทำให้สัญญาณ

ที่ได้รับได้ถูกรบกวน ปัญหาที่เกิดขึ้นจากตัวดาวเทียมเองที่มองเห็นข้อมูลที่ผิดพลาดเป็นข้อมูลที่ถูกต้องทำให้การคำนวณผิดพลาด และความผิดพลาดที่ดังใจจะเกิดขึ้นเพื่อความปลอดภัยของระบบ โดยเฉพาะทางด้านการทหาร

2.4 ทฤษฎีการวัดปริมาณอิเล็กตรอนรวมในบรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์

ปริมาณ TEC ที่มีค่ามากที่สุดในโลก จะเกิดในบริเวณใกล้กับ แนวเส้นศูนย์สูตร ซึ่งจะอยู่ในแต่ละด้านของเส้นศูนย์สูตรทางแม่เหล็ก (Magnetic Equator) ประมาณ 20 องศา โดยที่ค่าปริมาณอิเล็กตรอนรวมที่มากที่สุดนั้นไม่ได้อยู่ที่เส้นศูนย์สูตร แต่จะอยู่ที่บริเวณที่เรียกว่า ความผิดปกติในย่านศูนย์สูตร (EA, Equator Anomaly) และที่ค่าสูงสุด ที่ $\pm 15^\circ$ จากเส้นศูนย์สูตรทางแม่เหล็ก [Anderson, 1993], [Ezquer et al., 1994] ซึ่งจังหวัดเชียงใหม่ก็อยู่ในตำแหน่งใกล้กับบริเวณละติจูดทางแม่เหล็กนี้ด้วย โดยตำแหน่งของจังหวัดเชียงใหม่ คือ

ละติจูด	18.8 องศาเหนือ
ลองจิจูด (Longitude)	99.0 องศาตะวันออก
ละติจูดทางแม่เหล็ก (Geomagnetic Latitude)	7.9 องศาเหนือ
ลองจิจูดทางแม่เหล็ก (Geomagnetic Longitude)	170.4 องศาตะวันออก

ในการคำนวณค่า TEC จะใช้ความสัมพันธ์ระหว่างความแตกต่างของเวลาหน่วงของสัญญาณย่านแถบ L 2 สัญญาณ จากระบบดาวเทียม GPS แต่เนื่องจากความไม่สม่ำเสมอของบรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์ ทำให้เวลาการแพร่กระจายของสัญญาณที่ผ่านเข้าไปในบรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์มากขึ้น หรือเกิดเวลาหน่วงขึ้น ดังสมการที่ 2

$$\delta\tau = \pm \frac{40.3}{c \cdot f^2} \int_{s_1}^{s_2} N_e ds = \pm \frac{40.3}{c \cdot f^2} TEC \quad (2)$$

เมื่อ $\delta\tau$	คือ ค่าเวลาหน่วงของสัญญาณ (Delay Time)	[s]
c	คือ ความเร็วแสง	[m/s]
N_e	คือ ความหนาแน่นอิเล็กตรอน	[electrons/m ³]

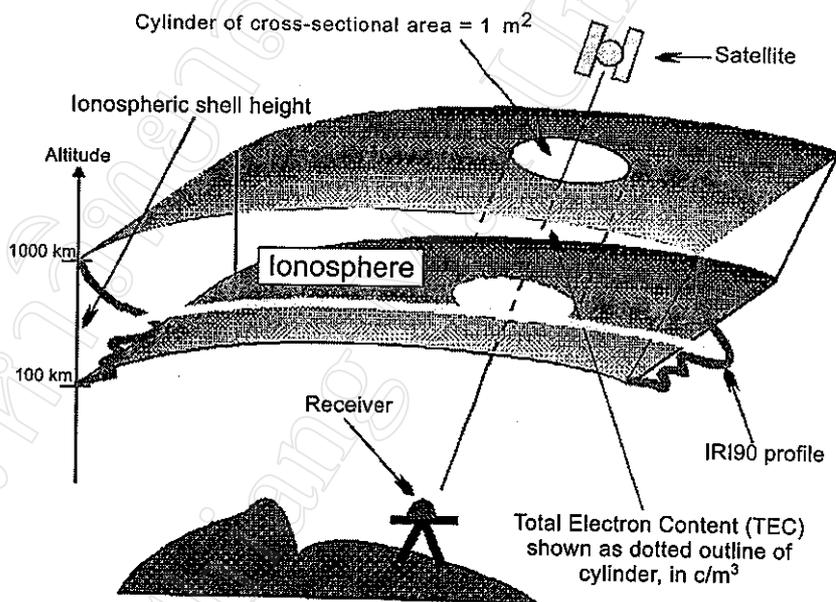
โดยค่าเวลาหน่วงสัญญาณจะมีค่าเป็นบวกเมื่อค่าความเร็วกลุ่มมีค่าน้อยกว่าความเร็วแสง และจะมีค่าเป็นลบเมื่อความเร็วเฟรมมีค่ามากกว่าความเร็วแสง ส่วนในทอมอินทิเกรตจะนิยาม

ให้เป็นปริมาณ TEC ซึ่งมีหน่วยเป็น electrons/m² ตามแนวเส้นทางของสัญญาณ และกำหนดให้ปริมาณ 10¹⁶ electrons/m² มีค่าเป็น 1 TECU (TEC-unit) และค่า TEC แสดงดังสมการที่ 3

$$TEC = \frac{c}{40.3} \left[\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2} \right] \delta\tau_{f_1 f_2} \quad (3)$$

เมื่อ $\delta\tau_{f_1 f_2}$ คือ ความแตกต่างของเวลาที่เคลื่อนที่ระหว่างสัญญาณวิทยุทั้งสองสัญญาณ

การวัดปริมาณ TEC สามารถทำได้จากจำนวนอิเล็กตรอนในพื้นที่ 1 ตารางเมตร (ที่ความสูงประมาณ 1000 กิโลเมตร ซึ่งเป็นความสูงที่บรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์วางตัวอยู่) ในทิศทางจากดาวเทียม GPS มายังสถานีภาคพื้นดิน [Komjathy and Langley, 1996 b] ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 คำจำกัดความของปริมาณอิเล็กตรอนรวม (Total Electron Content)

ที่มา: Komjathy and Langley [1996 b]

ปริมาณอิเล็กตรอนรวมจะถูกจำลองให้อยู่ในแนวคิงบนเชลล์ (Shell) แต่เนื่องจากปริมาณอิเล็กตรอนรวมที่วัดได้และที่ทำนายได้ไม่ได้อยู่ในแนวนี้ โดยจะอยู่ในแนวเส้นทางการแพร่กระจายคลื่นระหว่างดาวเทียม GPS กับเครื่องรับสัญญาณดาวเทียม แต่เราสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในแนวนี้ได้โดยการย้ายปริมาณอิเล็กตรอนรวม ที่อยู่ตามแนวเส้นสายตาไปอยู่ในแนวคิงได้ด้วยฟังก์ชันย้าย

(Mapping Function) หรือ $M(E)$ [Lanyi and Roth, 1988] ดังแสดงในสมการที่ 4 และจะหาค่า TEC ได้ดังสมการที่ 5 ตามลำดับ

$$M(E) = \frac{1}{\sqrt{1 - [\cos E / (1 + h/R)]^2}} \quad (4)$$

$$TEC_v = TEC_s / M(E) \quad (5)$$

เมื่อ TEC_v คือ ปริมาณอิเล็กตรอนรวมในแนวตั้ง

TEC_s คือ ปริมาณอิเล็กตรอนรวมในแนวเอียง [Lanyi and Roth, 1988]

ในการทดลองจะมีเครื่องวัดปริมาณอิเล็กตรอนรวมในบรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์ (Model 7633 Realtime TEC-Meter) ทำหน้าที่ในการรับคลื่นวิทยุจากดาวเทียม GPS ที่ส่งมาพร้อมกัน 2 ความถี่ คือ สัญญาณ L1 และ L2 โดยวัดความแตกต่างของเวลาหน่วงที่คลื่นแพร่กระจายมาที่รับ P ซึ่งก็คือ สัญญาณ L1 และ L2 โดยการหาความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณทั้งสองนั้น

เวลาหน่วงจะมีค่าสูงขึ้นเมื่อคลื่นวิทยุเคลื่อนที่ผ่านบรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์ โดยค่าเวลาหน่วง (T_{ion} , [ns]) สามารถหาค่าได้ด้วยการประมาณแบบเชิงเส้น และมีค่าขึ้นกับปริมาณอิเล็กตรอนรวมทั้งหมดที่อยู่บนเส้นทางการแพร่กระจายคลื่น (N_e , [m^{-2}]) และความถี่ของคลื่นวิทยุ (f_c , [MHz]) ดังสมการที่ 6

$$T_{ion}(f_c) = \frac{134 \cdot N_e}{f_c^2} \quad (6)$$

สมการที่ 6 สามารถนำมาหาเวลาหน่วงสัมพัทธ์ของสัญญาณที่รับได้จากดาวเทียม GPS 2 ความถี่คือ L1 และ L2 ได้ดังสมการที่ 7

$$\begin{aligned} \Delta T_{ion} &= T_{ion}(f_{L2}) - T_{ion}(f_{L1}) \\ &= 134 \cdot N_e \cdot \left(\frac{1}{f_{L2}^2} - \frac{1}{f_{L1}^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

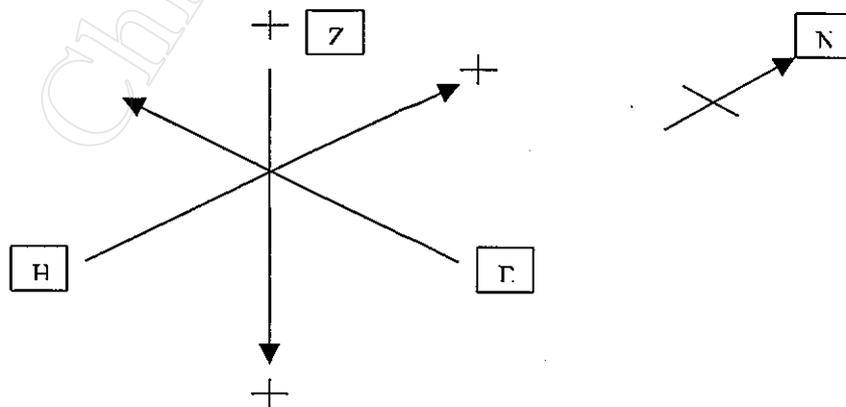
จากสมการที่ 6 และ 7 สามารถหาค่าปริมาณอิเล็กตรอนรวม ที่อยู่บนเส้นทางการแพร่กระจายคลื่นได้ดังสมการที่ 8

$$N_e = \frac{1}{134} \cdot \left(\frac{f_{L1}^2 \cdot f_{L2}^2}{f_{L1}^2 - f_{L2}^2} \right) \cdot \Delta T_{ion} \quad (8)$$

ดังนั้น ในการเฝ้าตรวจการเปลี่ยนแปลงค่าปริมาณอิเล็กตรอนรวมในบรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์ จึงสามารถทำได้โดยการวัดเวลาหน่วงสัมพัทธ์ของคลื่นวิทยุ L1 และ L2

2.5 ทฤษฎีการวัดค่าความเข้มสนามแม่เหล็กโลก

เครื่องวัดค่าความเข้มสนามแม่เหล็กโลกแบบสามแนวแกน (Three-Axis Magnetometer) ที่ใช้ในการทดลอง จะตรวจจับการสั่นสะเทือนขององค์ประกอบในแนวแกนสนามแม่เหล็กโลกสามแนวแกน ได้แก่ องค์ประกอบตามแนวนอน H (Horizontal Component), องค์ประกอบตามแนวเอียง D (Declination Component) ซึ่งตั้งฉากกับองค์ประกอบตามแนวนอน และองค์ประกอบตามแนวตั้ง Z (Vertical Component) ดังแสดงในรูปที่ 2.3 โดยที่ทิศเหนือเป็นทิศเหนือทางแม่เหล็กในตัวเครื่องจะประกอบด้วยตัวตรวจจับสัญญาณและตัวแปลงสัญญาณ ตัวตรวจจับสัญญาณ ก็คือส่วนของโครงสร้างที่ป้องกันไม่ให้น้ำหยดลงมา ซึ่งจะมีฟังก์ชันในการปรับระดับและทิศทางได้ด้วย ภายในตัวตรวจจับ จะมีหัววัดสนามแม่เหล็กแบบขดลวดโซลินอยด์ (Solenoid) สำหรับวัดการเปลี่ยนแปลงใน 3 ทิศทางวางตั้งฉากกันอยู่ โดยแต่ละหัววัดจะประกอบไปด้วยแกนเฟอร์รอมัลลอย (Permalloy) และมีขดลวดพันรอบๆ แกน ส่วนตัวแปลงสัญญาณจะประกอบด้วยตัวจ่ายไฟที่ทำหน้าที่ในการเปลี่ยนแรงดันขาเข้าให้เป็นแรงดันกระแสตรง (DC, Direct Current) ตามต้องการ และใช้ในการขับตัวตรวจจับสัญญาณอีกด้วย



รูปที่ 2.3 ลักษณะการติดตั้งเครื่องวัดค่าความเข้มสนามแม่เหล็กโลก

ส่วนหลักการทำงานของเครื่องวัดค่าความเข้มสนามแม่เหล็กโลก คือ ออสซิลเลเตอร์ (Oscillator) สร้างสัญญาณความถี่ 700 Hz แล้วแบ่งออกเป็น 2 ส่วน ส่วนที่หนึ่งจะถูกขยายเพื่อนำไปใช้ในการกระตุ้นขดลวดแม่เหล็ก ส่วนที่เหลือจะถูกนำมาคูณด้วยสองเพื่อไปทำการซิงโครไนซ์ (Synchronize) กับเรกติไฟเออร์ (Rectifier) เมื่อตัวตรวจ จับอยู่ในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็ก ฮาร์โมนิกส์ต่างๆ จะถูกเหนี่ยวนำขึ้นภายในขดลวดสัญญาณ และขดลวดชดเชย เอาต์พุต (Output) ของขดลวดสัญญาณจะผ่านเข้าไปในวงจรกรองแถบผ่าน (Bandpass Filter) ทำให้ได้สัญญาณที่มีความถี่ 1400 Hz ออกมา จากนั้น จะนำสัญญาณที่ได้นี้มาขยายและป้อนให้กับเรกติไฟเออร์ เพื่อตรวจสอบว่ามันมีเฟสตรงกันหรือไม่ ถ้ามีเฟสตรงกัน เอาต์พุตของเรกติไฟเออร์จะเป็นสัญญาณ DC บวก นอกนั้นจะเป็นลบ สัญญาณ DC ที่ได้นี้จะถูกนำมาขยายด้วยตัวอินทิเกรต โดยสัญญาณเอาต์พุตส่วนหนึ่งจากตัวอินทิเกรตจะถูกป้อนกลับไปยังขดลวดสัญญาณ โดยผ่านตัวต้านทานตัวหนึ่ง ซึ่งกระแสป้อนกลับจะสร้างสนามแม่เหล็กที่หักล้างกับสนามแม่เหล็กที่เข้ามา เนื่องจากอัตราขยายของวงจรขยายที่อยู่ภายในตัวอินทิเกรตมีค่าสูงมาก กระแสป้อนกลับจึงมีค่าสูงขึ้นเรื่อยๆ จนกระทั่งสนามแม่เหล็กที่เข้ามาเกิดออฟเซต (Offset) กระแสป้อนกลับจะเป็นสัดส่วนกับสนามแม่เหล็กที่เข้ามาเสมอ ไม่ว่าจะเกิดการแกว่งขึ้นภายในตัวขยายวงจรอินทิเกรต และมีความไม่เป็นเชิงเส้นของตัวตรวจจับก็ตาม ตัวต้านทานป้อนกลับสามารถเปลี่ยนค่าได้ เพื่อเปลี่ยนค่าความไวของตัวแปลงสัญญาณ ถ้าค่าสนามแม่เหล็กมีค่าต่ำๆ ความไวก็ควรจะมีค่าสูงขึ้น โดยการเพิ่มค่าความต้านทานป้อนกลับขดลวดชดเชยจะใช้ในการออฟเซตอิทธิพลของสนามแม่เหล็กโลก ซึ่งทำได้โดยการให้กระแส DC ที่แน่นอนกับขดลวดชดเชย แล้วสร้างสนามแม่เหล็กเดียวกันที่มีขนาดเท่ากันและมีขั้วตรงกันข้ามกับสนามแม่เหล็กโลก แหล่งจ่ายไฟ DC จะสร้างกระแสที่ระดับคงที่ผ่านตัวแปลงสัญญาณแรงดัน/กระแส (V/I converter) โดยไม่คำนึงถึงค่าความต้านทานของวงจร ด้วยเหตุนี้ จึงสามารถจัดการเปลี่ยนแปลงของความต้านทานในสายที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิได้ เมื่อสนามแม่เหล็กโลกมีค่าออฟเซตทำให้เอาต์พุตเป็นศูนย์ จากนั้นจึงส่งการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กโลกที่เกิดขึ้นเข้าไปในวงจรกรองต่ำผ่าน (Lowpass filter)

2.6 ผลของสนามแม่เหล็กโลกที่มีต่อการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนในบรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์

โดยทั่วไป การเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กโลกจะมีอยู่ 3 ลักษณะคือ การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นในระยะยาว (Secular Variations) ซึ่งมักจะมีการเปลี่ยนแปลงเป็นรายปี การเปลี่ยนแปลงตามช่วงเวลาของวัน (Diurnal Variations) และพายุสนามแม่เหล็ก (Magnetic Storms) [Boyd, No date] ซึ่งการเกิดพายุสนามแม่เหล็กจะส่งผลกระทบต่อ การเปลี่ยนแปลงของอิเล็กตรอนในบรรยากาศชั้นไอโอโนสเฟียร์

เมื่ออนุภาคที่มีประจุถูกทำให้เคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็ก ก็จะพบกับแรงที่ทำให้ อนุภาคนั้นเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้ง สนามแม่เหล็กของโลกจะทำให้เกิดแรงดังกล่าว ที่กระทำบน อิเล็กตรอนในเลเยอร์ที่มีไอออน (Ionized Layer) ซึ่งจะถูกทำให้เคลื่อนที่โดยสนามไฟฟ้าของคลื่น วิทยุ โดยมีสนามแม่เหล็กของคลื่นวิทยุด้วย แต่แรงที่กระทำนั้นมีค่าน้อยมากจนสามารถตัดทิ้งได้ โดยทั่วไป เส้นทางการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนจะเป็นลักษณะเกลียว ดังรูปที่ 2.4 (a) ณ ความถี่คลื่น ค่าหนึ่ง คือ ความถี่ไจโร (Gyrofrequency) ซึ่งมีคาบเวลาของคลื่นเท่ากับเวลาที่ต้องการในการหมุน ครบรอบในบริเวณแกนสนามแม่เหล็ก เส้นทางการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนจะกลายเป็นวงกว้างๆ ดังแสดงในรูปที่ 2.4 (b) ส่วนความถี่ไจโรสามารถแสดงได้ดังสมการที่ 9



รูปที่ 2.4 เส้นทางการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนในสนามแม่เหล็กโลก

(ก) เส้นทางการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนแบบเกลียว

(ข) เส้นทางของอิเล็กตรอนที่ความถี่ไจโร

ที่มา: Dennis and Coolen, 1984.

$$f_g = \frac{q_e}{2\pi m} B \tag{9}$$

เมื่อ f_g คือ ความถี่ไจโร [Hz]

q_e คือ ประจุของอิเล็กตรอน [C]

m คือ มวลของอิเล็กตรอน [kg]

B คือ ความเข้มสนามแม่เหล็ก [Tesla]

ความถี่ไจโรมีความสำคัญคือ เนื่องจากเส้นทางการเคลื่อนที่ที่กว้างของอิเล็กตรอน ทำให้มีการชนกันระหว่างอิเล็กตรอนและ โมเลกุลในเลเยอร์ D สูงขึ้น ผลก็คือ มีการลดทอนในคลื่น สะท้อนที่ความถี่ใกล้เคียงกับความถี่ไจโร ดังนั้น แถบแพร่สัญญาณ (Broadcast Band) ของคลื่นความถี่ ปานกลางจึงได้รับผลกระทบจากการลดทอนที่สูงขององค์ประกอบของคลื่นสะท้อนในช่วงเวลา กลางวัน ซึ่งมีเลเยอร์ D ปรากฏอยู่

ผลกระทบอีกประการหนึ่งของสนามแม่เหล็กโลก คือ ค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ (Relative Permittivity) ของเลเยอร์ที่มีไอออน จะเพิ่มขึ้นเป็นสองส่วน ส่งผลให้เกิดความถี่วิกฤติ 2 ความถี่ในเลเยอร์ที่มีไอออน ในทางปฏิบัติ จะมีเพียงในเลเยอร์ F2 เท่านั้นที่มีความถี่วิกฤติ 2 ความถี่สำหรับรังสีสามัญ (Ordinary Ray) หรือ f_oF_2 และความถี่สำหรับรังสีวิสามัญ (Extraordinary Ray) หรือ f_xF_2

2.7 การวิเคราะห์ข้อมูล TEC ด้วยวิธี ARMA

การวิเคราะห์ข้อมูล TEC จะพิจารณาข้อมูลเป็นสัญญาณเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete Time Signal) ในการอธิบายรูปร่างของสัญญาณได้ 2 วิธี คือ การกำหนดรายละเอียด ลักษณะจำเพาะต่างๆ ในเชิงเวลา ซึ่งจะเน้นขนาดของสัญญาณเป็นฟังก์ชันของเวลา และการกำหนดรายละเอียดลักษณะจำเพาะต่างๆ ในเชิงความถี่ ซึ่งจะเน้นรายละเอียดของขนาดและเฟสของสัญญาณ ที่พบที่ความถี่ต่างๆ ในสเปกตรัม (Spectrum) ของสัญญาณที่กำลังพิจารณา

ในเชิงคณิตศาสตร์ ระบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete Time System) สามารถอธิบายได้เป็นตัวกระทำ $T[\cdot]$ ที่ทำให้เกิดลำดับ $x(n)$ (เรียกว่า ตัวกระตุ้น) และการเปลี่ยนลำดับนั้นให้ไปเป็นอีกลำดับหนึ่ง $y(n)$ (เรียกว่า ผลตอบกลับ) ดังสมการที่ 10

$$y(n) = T[x(n)] \quad (10)$$

ในการประมวลผลสัญญาณด้วยวิธีการประมวลผลสัญญาณดิจิทัล (DSP, Digital Signal Processing) อาจกล่าวได้ว่า ระบบประมวลผลสัญญาณอินพุต (Input Signal) ให้เป็นสัญญาณเอาต์พุต (Output Signal) โดยทั่วไปแล้ว ระบบเวลาไม่ต่อเนื่องแบ่งได้ 2 ลักษณะ คือ ระบบเชิงเส้น และระบบไม่เป็นเชิงเส้น

สำหรับระบบเชิงเส้นแล้ว สัญญาณเอาต์พุต $y(n)$ ที่ได้มาจากการประมวลผลสัญญาณอินพุต $x(n)$ ดังสมการที่ 11

$$\begin{aligned} y(n) &= L[x(n)] \\ &= L\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)L[\delta(n-k)] \end{aligned} \quad (11)$$

เมื่อ $L[\cdot]$ คือ ตัวดำเนินการเชิงเส้น

δ คือ ลำดับการสุ่มขนาดหนึ่งหน่วย (Unit Sample Sequence)

สมการที่ 11 สามารถอธิบายได้ว่า เป็นผลตอบสนองของระบบเชิงเส้น ณ เวลา t ที่เกิดขึ้นเนื่องจากลำดับการสุ่มขนาดหนึ่งหน่วย ณ เวลา k ซึ่งจะถูกกำหนดให้เป็นผลตอบสนองอิมพัลส์ (Impulse Response) $h(n, k)$ ดังสมการที่ 12

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n, k) \quad (12)$$

ฟิลเตอร์ (Filter) หมายถึง ระบบที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (LTI, Linear Time-Invariant System) ที่ถูกออกแบบมาเพื่องานที่ต้องการเลือกความถี่ หรือแยกความถี่ ดังนั้น ระบบ LTI ที่ไม่ต่อเนื่อง จึงมักจะถูกเรียกว่า ดิจิตอลฟิลเตอร์ (Digital Filter) ซึ่งมี 2 ชนิดคือ

- ก) ฟิลเตอร์ที่มีช่วงเวลาผลตอบสนองอิมพัลส์จำกัด (FIR, Finite-Duration Impulse Response Filter) คือ ระบบ LTI ที่มีผลตอบสนองอิมพัลส์หนึ่งหน่วย มีช่วงจำกัด ดังนั้น ฟิลเตอร์ FIR จึงมีผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(n) = 0$ ที่ $n < n_1$ และที่ $n > n_2$ โดยมีสมการผลต่างสืบเนื่อง (Difference Equation) สำหรับฟิลเตอร์ FIR ดังสมการที่ 13

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) \quad (13)$$

โดยที่ค่า $h(0) = b_0, h(1) = b_1, \dots, h(M) = b_M$ ในขณะที่ $h(n)$ ค่าอื่นเป็นศูนย์หมด นอกจากนี้ชื่อ ฟิลเตอร์ FIR แล้ว ยังเรียกว่า ฟิลเตอร์เฉลี่ยเคลื่อนที่ (MA, Moving Average Filter) อีกด้วย

- ข) ฟิลเตอร์ที่มีช่วงเวลาผลตอบสนองอิมพัลส์ไม่จำกัด (IIR, Infinite-Duration Impulse Response Filter) คือ ระบบ LTI ที่มีผลตอบสนองอิมพัลส์มีช่วงไม่จำกัด ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังสมการที่ 14

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = x(n) \quad (14)$$

ในฟิลเตอร์ IIR เอาต์พุต $y(n)$ จะได้จากค่าเอาต์พุตที่คำนวณได้ก่อนหน้า หรือค่าในอดีต และเรียกฟิลเตอร์ชนิดนี้ว่า ฟิลเตอร์ถดถอยในตัวเอง (AR, Autoregressive Filter) นอกจากจะอธิบายฟิลเตอร์ IIR นี้ด้วยสมการที่ 14 แล้ว ยังสามารถอธิบายได้ด้วยสมการที่ 15

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \quad (15)$$

จากสมการที่ 15 จะเห็นว่ามีส่วนที่เป็น AR และ MA รวมกัน ฟิลเตอร์ IIR ที่มีลักษณะเช่นนี้จึงถูกเรียกว่า ฟิลเตอร์ถดถอยในตัวเองเฉลี่ยแบบเคลื่อนที่ (ARMA, Autoregressive Moving Average)

สมการที่ 15 เป็นการหาฟิลเตอร์ที่ให้ค่าเอาต์พุตจากการกำหนดค่าอินพุต และนำเอาค่าเอาต์พุตที่คำนวณได้ก่อนหน้ามาหาค่าเอาต์พุตในปัจจุบัน แต่ในงานวิจัยนี้ ค่าเอาต์พุตที่ต้องการ คือค่าที่เหมือนกับข้อมูลอินพุต หมายความว่า ต้องการหาแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ หรือสมการทางคณิตศาสตร์สำหรับข้อมูลอินพุตนั่นเอง ดังนั้น ในส่วนที่เป็นการเฉลี่ยแบบเคลื่อนที่จึงมาจากค่าความผิดพลาด ซึ่งมาจากผลต่างระหว่างค่าที่ทำนายได้กับข้อมูลอินพุต ดังแสดงในสมการที่ 16

$$x(t) = \sum_{k=1}^p a_k x(t-k) + \varepsilon(t) - \sum_{k=1}^q b_k \varepsilon(t-k) \quad (16)$$

โดยที่ a_k เป็นพารามิเตอร์ของ ARMA ส่วน p และ q เป็นอันดับของ AR และ MA ตามลำดับ

โดยปกติ การใช้ฟิลเตอร์มาช่วยในการวิเคราะห์ทั้งในเชิงการประมวลผลสัญญาณแบบดิจิทัล และในเชิงสถิติ จะอาศัยหลักการเดียวกัน แต่จะจุดประสงค์ของการนำไปใช้จะต่างกัน คือทางด้านการประมวลผลแบบดิจิทัลจะเน้นด้านการสังเกตสัญญาณที่มีสัญญาณรบกวนเกิดขึ้น ในขณะที่ทางด้านสถิติจะเน้นด้านการพยากรณ์ [Naidu, 1995] เนื่องจากงานวิจัยนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อ

หารูปแบบของการเปลี่ยนแปลงของข้อมูล TEC ที่เกิดขึ้นในแต่ละวัน ดังนั้น การวิเคราะห์ข้อมูลจึงเน้นไปทางด้านสถิติมากกว่าทางด้านการประมวลผลสัญญาณแบบดิจิทัล

การพิจารณาว่าข้อมูล หรือสัญญาณเวลาไม่ต่อเนื่องมีลักษณะเป็น AR หรือ MA จะอาศัยค่าสหสัมพันธ์ในตัวเอง (Autocorrelation) และค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วน (Partial Autocorrelation) เพื่อให้วัดระดับความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลหรือสัญญาณไม่ต่อเนื่องในอดีตกับข้อมูลหรือสัญญาณไม่ต่อเนื่องในปัจจุบัน โดยค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองสามารถอธิบายได้ดังสมการที่ 17

$$\rho_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-l) \quad (17)$$

เมื่อ ρ_{xx} คือ ค่าสหสัมพันธ์ในตัวเอง

l คือ ดัชนีที่เรียกว่า พารามิเตอร์ล่าช้า (Lag Parameter)

n คือ อันดับทีของข้อมูลหรือสัญญาณไม่ต่อเนื่อง

สมการที่ 17 สามารถเขียนในรูปของคอนโวลูชัน (Convolution) ได้ดังสมการที่ 18

$$\rho_{xx} = x(l) * x(-l) \quad (18)$$

ค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองที่ได้จากสมการที่ 17 และ 18 จะมีความยาวเป็น $2n - 1$ เมื่อ n คือ ความยาวของข้อมูลหรือสัญญาณไม่ต่อเนื่อง แต่ในการพิจารณาว่าข้อมูลมีสหสัมพันธ์ในตัวเองมากน้อยเพียงใดนั้น ใช้เพียงค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองเท่ากับจำนวนข้อมูลหารด้วยสี่ก็พอ นั่นคือ ค่าพารามิเตอร์ล่าช้าจะมีค่าเป็น $n/4$ นั่นเอง

นอกจากการหาค่าสหสัมพันธ์ด้วยวิธีการแบบคอนโวลูชันแล้ว ยังสามารถหาได้จากค่าความแปรปรวนร่วมในตัวเอง (Autocovariance) ได้อีกด้วย โดยค่าความแปรปรวนร่วมในตัวเองแสดงดังสมการที่ 19 ส่วนค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองแสดงดังสมการที่ 20 ตามลำดับ

$$\gamma = Cov(X_t, X_{t+k}) \quad (19)$$

$$\rho_k = \frac{\sum_{t=k+1}^N (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X})}{\sum_{t=k+1}^N (X_{t-k} - \bar{X})^2} \quad (20)$$

เมื่อ γ คือ ค่าความแปรปรวนร่วมในตัวเอง

ρ_k คือ ค่าสหสัมพันธ์ในตัวเอง ณ ดัชนีเวลาห่าง k

X_t คือ ค่าสังเกต ณ เวลา t

\bar{X} คือ ค่าเฉลี่ยของค่าสังเกต

k คือ ดัชนีเวลาห่าง

N คือ จำนวนค่าสังเกต

ส่วนค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนสามารถหาได้จากสมการที่ 21

$$\phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} \rho_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} \rho_j} \quad \text{สำหรับ } k = 2, 3, 4, \dots \quad (21)$$

โดยที่

$$\phi_{kj} = \phi_{k-1,j} - \phi_{kk} \phi_{k-1,k-j} \quad \text{สำหรับ } j = 1, 2, \dots, k-1$$

$$k = 2, 3, 4, 5, \dots$$

เมื่อ ϕ_{kk} คือ สหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วน ณ ดัชนีเวลาห่าง k

2.7.1 การกำหนดรูปแบบ ARMA ให้กับข้อมูล

จากค่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเอง และฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนที่ได้จากข้อมูลสามารถพิจารณาได้ว่าข้อมูลมีลักษณะเป็น AR, MA, ARMA, ARIMA หรือ SARIMA ดังสรุปไว้ในตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 ลักษณะของฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเองและฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วน

รูปแบบของข้อมูล	ลักษณะของ ρ_k	ลักษณะของ ϕ_{kk}
AR(1) ของ X_t	ค่าลดลงเร็วเข้าใกล้ 0	ϕ_{kk} เป็น 0 สำหรับ $k=2, 3, \dots$
AR(p) ของ X_t	ค่าลดลงเร็วเข้าใกล้ 0	ϕ_{kk} เป็น 0 สำหรับ $k > p$
MA(1) ของ X_t	ρ_k เป็น 0 สำหรับ $k=2, 3, \dots$	ค่าลดลงเร็วเข้าใกล้ 0
MA(p) ของ X_t	ρ_k เป็น 0 สำหรับ $k > q$	ค่าลดลงเร็วเข้าใกล้ 0
ARMA(1,1) ของ X_t	ค่าลดลงเร็วเข้าใกล้ 0	ค่าลดลงเร็วเข้าใกล้ 0
ARMA(p,q) ของ X_t	ค่าลดลงเร็วเข้าใกล้ 0	ค่าลดลงเร็วเข้าใกล้ 0
ARI(p,d) ของ $Z_t = \nabla^D X_t = X_t - X_{t-D}$	เหมือนกับ AR(p) เพียงแต่เป็นค่าที่ได้จากการหาผลต่างของข้อมูลที่ d	เหมือนกับ AR(p) เพียงแต่เป็นค่าที่ได้จากการหาผลต่างของข้อมูลที่ d
IMA(d,q) ของ $Z_t = \nabla^D X_t = X_t - X_{t-D}$	เหมือนกับ MA(q) เพียงแต่เป็นค่าที่ได้จากการหาผลต่างของข้อมูลที่ d	เหมือนกับ MA(q) เพียงแต่เป็นค่าที่ได้จากการหาผลต่างของข้อมูลที่ d
ARIMA(p,d,q) ของ $Z_t = \nabla^D X_t = X_t - X_{t-D}$	เหมือนกับ ARMA(p,q) เพียงแต่เป็นค่าที่ได้จากการหาผลต่างของข้อมูลที่ d	เหมือนกับ ARMA(p,q) เพียงแต่เป็นค่าที่ได้จากการหาผลต่างของข้อมูลที่ d
SAR(p) ของ $Z_t = \nabla_S X_t = X_t - X_{t-s}$	ค่าลดลงเร็วเข้าใกล้ 0 ที่ $s, 2s, \dots, ps$	$\phi_{kk} = 0$ ที่ $k > qs$ เมื่อ s คือความยาวของฤดูกาล
SMA(q) ของ $Z_t = \nabla_S X_t = X_t - X_{t-s}$	$\rho_k = 0$ ที่ $k > ps$ เมื่อ s คือความยาวของฤดูกาล	ค่าลดลงเร็วเข้าใกล้ 0 ที่ $s, 2s, \dots, qs$
SARMA(p,q) ของ $Z_t = \nabla_S X_t = X_t - X_{t-s}$	ค่าลดลงเร็วเข้าใกล้ 0	ค่าลดลงเร็วเข้าใกล้ 0
SARIMA(p,d,q) ของ $Z_t = \nabla_S^D X_t = X_t - X_{t-s}$	เหมือน SARMA(p,q) เพียงแต่เป็นค่าที่ได้จากการหาผลต่าง	เหมือน SARMA(p,q) เพียงแต่เป็นค่าที่ได้จากการหาผลต่าง

จากตารางที่ 2.2 จะเห็นว่า รูปแบบของการแทนมีมากมาย ขึ้นอยู่กับลักษณะของค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองและสหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วน นอกจากรูปแบบการถดถอยในตัวเองและ

เฉลี่ยเคลื่อนที่ หรือทั้งสองอย่างรวมกันแล้ว ยังมีรูปแบบของการถดถอยในตัวเองที่ขึ้นกับค่าผลต่างของข้อมูลอีกด้วย เช่น มีข้อมูล Y_t ที่ขึ้นกับค่า $Y_t - Y_{t-1}$ หรือรูปแบบการถดถอยในตัวเองที่ขึ้นกับค่าในอดีตในช่วงระยะเวลาเท่ากับคาบของข้อมูล ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดคือ ข้อมูล TEC ที่ใช้ในการวิจัย ถ้าพิจารณาการเคลื่อนไหวของข้อมูล TEC ในแต่ละวัน จะเห็นว่าข้อมูล TEC มีลักษณะซ้ำๆ กันในแต่ละวัน ดังนั้น เมื่อนำค่า TEC ที่ได้จากการทดลองมาหาค่าเฉลี่ยทุกๆ 30 นาที ภายใน 1 วัน ก็จะได้ข้อมูล TEC เฉลี่ยทั้งหมด 48 ค่า ถ้าทำการทดลองวัด 30 วันก็จะมีค่า TEC เฉลี่ยทั้งหมดเป็น 48×30 หรือ 1440 ค่า โดยมีคาบเป็น 48 ช่วงเวลา เป็นต้น เมื่อนำข้อมูล TEC เฉลี่ยเหล่านี้มาคำนวณหาค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองและสหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วน จะเห็นว่าความสัมพันธ์ของข้อมูลจะค่อยๆ ลดลงและจะกลับมามีความสัมพันธ์มากที่สุดที่เวลาล่าหลังครบ 1 คาบ อย่างเป็นทางการนี้ไปเรื่อยๆ

การที่ข้อมูลมีอิทธิพลของฤดูกาลหรือมีความสัมพันธ์กับค่าผลต่างดังที่กล่าวไปแล้ว หมายความว่าข้อมูลไม่เป็นสเตชันนารี (Stationary) ซึ่งกระบวนการที่เป็นสเตชันนารี เป็นกระบวนการที่อยู่ในสถานะสมดุลเชิงสถิติ คือ มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของข้อมูล ณ เวลา t คงที่ ซึ่งข้อมูลที่มีแนวโน้ม และ/หรือฤดูกาลจะมีค่าคาดหวังของข้อมูลไม่คงที่ ส่วนข้อมูลที่มีความแปรปรวนสูงจะเป็นลักษณะของอนุกรมเวลาที่มีความแปรปรวนของข้อมูล ณ เวลา t ไม่คงที่ ดังนั้น หากพบว่าข้อมูลไม่เป็นสเตชันนารี ต้องเปลี่ยนให้เป็นสเตชันนารีก่อน โดยทำการหาผลต่างของข้อมูลจนกว่าข้อมูลที่หาผลต่างใหม่นั้นเป็นสเตชันนารี ส่วนข้อมูลที่มีอิทธิพลของฤดูกาลจะต้องแปลงโดยการหาผลต่างเป็นจำนวนเท่าของฤดูกาล หรือคาบของข้อมูล

จากตารางที่ 2.2 เมื่อพิจารณารูปแบบ SARIMA ซึ่งมีสมมติฐานว่า ข้อมูลที่อยู่ภายในฤดูกาลเดียวกัน ไม่มีสหสัมพันธ์ต่อกัน และจะมีค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองเฉพาะที่ช่วงห่างตามฤดูกาลเท่านั้น ทำให้รูปแบบนี้ไม่เหมาะสมกับรูปแบบข้อมูลที่นอกจากจะมีความสัมพันธ์กันตามอิทธิพลของฤดูกาลแล้ว ยังมีความสัมพันธ์กับข้อมูลที่อยู่ในฤดูกาลเดียวกันอีกด้วย และตัวอย่างข้อมูลที่มีรูปแบบนี้ก็คือ ข้อมูล TEC นั่นเอง ในการวิเคราะห์ข้อมูลที่มีลักษณะเช่นนี้ Box-Jenkins ได้แนะนำรูปแบบที่มีฤดูกาลเชิงคูณ [วิชิตและคณะ, 2539] ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังสมการที่ 22

$$\begin{aligned} (1 - \Gamma_1 B^S - \dots - \Gamma_p B^{Sp})(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^P)(1 - B^S)^D (1 - B)^d X_t \\ = \delta + (1 - \Delta_1 B^S - \dots - \Delta_q B^{Sq})(1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^Q)\varepsilon_t \end{aligned} \quad (22)$$

เมื่อ Γ_p คือ สัมประสิทธิ์การถดถอยในตัวเองที่เกิดจากอิทธิพลของฤดูกาลอันดับที่ P

B คือ ตัวกระทำล่าหลัง (Back Shift Operator)

ความไม่มีสหสัมพันธ์ในตัวเอง ถ้ารูปแบบอนุกรมเวลาเหมาะสม และทราบค่าพารามิเตอร์แล้วจะกำหนดสมมติฐานเป็น $H_0 : \rho_1(\varepsilon_t) = \dots = \rho_m(\varepsilon_t) = 0$ และ $H_1 : \rho_k(\varepsilon_t)$ อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ไม่เป็น 0 สำหรับ $k = 1, \dots, m$ ส่วนการทดสอบสมมติฐานจะใช้สถิติ Q ซึ่งแสดงในสมการที่ 25

$$Q(k) = N(N+2) \sum_{j=1}^N \frac{r_j^2}{(N-j)} \quad (25)$$

เมื่อ N มีค่ามากๆ สามารถใช้การประมาณค่าสถิติ Q ดังสมการที่ 26

$$Q(k) = N \sum_{j=1}^N r_j^2 \quad (26)$$

โดยช่วงวิกฤติ คือ $Q_m \geq \chi_{\alpha, m-a}^2$ หากค่าสถิติ Q ที่ได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ หมายความว่า รูปแบบที่กำหนดให้กับข้อมูล TEC ไม่เหมาะสม ต้องกลับไปกำหนดรูปแบบในขั้นตอนการกำหนดรูปแบบใหม่ แต่ถ้าค่าสถิติ Q ที่ได้มีค่าน้อยกว่าค่าวิกฤติ หมายความว่า รูปแบบที่กำหนดให้กับข้อมูล TEC นั้น มีความเหมาะสมแล้ว

2.7.4 การพยากรณ์ล่วงหน้าด้วยวิธี ARMA

ในการพยากรณ์ล่วงหน้าสามารถทำได้ทั้งแบบการพยากรณ์เป็นช่วง และการพยากรณ์แบบจุด โดยในงานวิจัยนี้ได้ใช้การพยากรณ์แบบจุด เนื่องจากต้องการทราบลักษณะของข้อมูลที่จะเกิดขึ้นในอนาคตแบบเดียวกันกับข้อมูลในอดีต สำหรับรูปแบบ AR(1)xSARI(1,1) โดยการอาศัยสมการที่ 22 จะสามารถเขียนได้ดังสมการที่ 27 ส่วนรูปแบบ AR(1)xSIMA(1,1) จะสามารถเขียนได้ดังสมการที่ 28 ตามลำดับ

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + (1 + \Gamma_1) X_{t-48} - (\phi_1 + \phi_1 \Gamma_1) X_{t-49} - \Gamma_1 X_{t-96} + \phi_1 \Gamma_1 X_{t-97} + \delta + \varepsilon_t \quad (27)$$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} - \Delta_1 \varepsilon_{t-48} + \delta + \varepsilon_t \quad (28)$$

จากสมการที่ 27 สามารถเขียนตัวอย่างสมการของการพยากรณ์ 1 หน่วยล่วงหน้า จาก $t=N$ สำหรับรูปแบบ AR(1)xSARI(1,1) แสดงดังสมการที่ 29

$$\hat{X}_N(1) = \phi_1 X_{N-1} + (1 + \Gamma_1) X_{N-48} - (\phi_1 + \phi_1 \Gamma_1) X_{N-49} - \Gamma_1 X_{N-96} + \phi_1 \Gamma_1 X_{N-97} + \delta + \varepsilon_N \quad (29)$$

ส่วนตัวอย่างสมการของการพยากรณ์ 1 หน่วยล่วงหน้า จาก $t=N$ สำหรับรูปแบบ AR(1)xSIMA(1,1) แสดงดังสมการที่ 30

$$\hat{X}_N = \phi_1 X_{N-1} - \Delta_1 \varepsilon_{N-48} + \delta + \varepsilon_N \quad (30)$$

เมื่อ \hat{X} คือ ค่าพยากรณ์ล่วงหน้าของข้อมูล
 N คือ จุดเวลาที่พยากรณ์ล่วงหน้า

2.8 การวิเคราะห์ข้อมูล TEC ด้วยวิธีการถดถอย

นอกจากการวิเคราะห์ข้อมูลโดยอาศัยข้อมูล TEC ในอดีตแล้ว การวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล TEC และค่าอื่นๆ ก็น่าจะทำให้รายละเอียดบางอย่างที่เกี่ยวข้องได้ เช่น ค่าทางอุตุนิยมวิทยา ได้แก่ อุณหภูมิ ความชื้นสัมพัทธ์ ความเร็วลม และความกดอากาศ ค่าความเข้มสนามแม่เหล็กโลก จำนวนจุดดับบนดวงอาทิตย์ (SSN, Smoothed Sunspot Number) ค่าความเข้มฟลักซ์ของดวงอาทิตย์ที่มีความยาวคลื่นเป็น 10.27 เซนติเมตร (10.27 cm Solar flux) เป็นต้น อาจจะมีความสัมพันธ์กับข้อมูล TEC ได้ โดยสังเกตจากแนวโน้มความสัมพันธ์ของข้อมูลที่ได้จากแผนภาพการกระจาย (Scatter Diagram) หากได้ลักษณะแนวโน้มของข้อมูลเป็นแบบเชิงเส้น ก็จะใช้การวิเคราะห์การถดถอยแบบเชิงเส้น แต่ถ้าแนวโน้มของข้อมูลเป็นแบบเส้นโค้ง ก็จะใช้การวิเคราะห์การถดถอยแบบเส้นโค้งแทน

2.8.1 การวิเคราะห์การถดถอยแบบเชิงเส้น

เนื่องจากความสัมพันธ์ของข้อมูล TEC ซึ่งเป็นตัวแปรตาม และตัวแปรอิสระเป็นแบบเชิงเส้น ดังนั้น การวัดระดับความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล TEC กับค่าต่างๆ เหล่านี้ สามารถใช้ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน (Pearson's correlation coefficient) ซึ่งเป็นค่าที่แสดงระดับความสัมพันธ์ของข้อมูลแบบเชิงเส้น ดังแสดงในสมการที่ 31

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{(\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2)(\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2)}} \quad (31)$$

เมื่อ r คือ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

X_i คือ ตัวแปรอิสระตัวที่ i

\bar{X} คือ ค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระ

Y_i คือ ตัวแปรตามตัวที่ i

\bar{Y} คือ ค่าเฉลี่ยของตัวแปรตาม

N คือ จำนวนข้อมูล

ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์นอกจากจะสามารถบอกระดับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระและตัวแปรตามได้แล้ว ยังสามารถบอกทิศทางความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสองได้อีกด้วย คือ ถ้าค่าของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์มีค่าเป็นบวก แสดงว่าความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองเป็นไปในทิศทางเดียวกัน แต่ถ้าค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์มีค่าเป็นลบ จะหมายความว่าความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองเป็นไปในทิศทางตรงข้ามกัน

สมการที่ใช้การวิเคราะห์การถดถอยเมื่อมีตัวแปรอิสระเพียงตัวแปรเดียว จะมีรูปแบบดังสมการที่ 32

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \quad (32)$$

เมื่อ y คือ ตัวแปรตาม

x คือ ตัวแปรอิสระ

β_0 คือ ค่าคงที่ของการถดถอย

β_1 คือ ค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย

ε คือ การรบกวนอย่างสุ่ม

แต่ถ้ามีตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัว รูปแบบการถดถอยจะเปลี่ยนไปดังสมการที่ 33

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p + \varepsilon \quad (33)$$

เมื่อ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ คือ ค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย

x_1, x_2, \dots, x_p คือ ตัวแปรอิสระตัวที่ 1 ถึง p

ในการประมาณค่าของสัมประสิทธิ์การถดถอยสามารถหาได้โดยอาศัยหลักการของเมตริกซ์เข้ามาช่วย ซึ่งสามารถใช้ในการประมาณค่าของสัมประสิทธิ์การถดถอยได้ทั้งรูปแบบในสมการที่ 32 และ 33 ดังนั้น ในการวิเคราะห์จึงยึดสมการที่ 33 เป็นหลัก เนื่องจากสมการที่ 32 สามารถถือได้ว่าเป็นกรณีหนึ่งของสมการที่ 33 และสามารถเขียนสมการที่ 33 ในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ดังสมการที่ 34

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (34)$$

เมื่อ Y คือ เมตริกซ์ของตัวแปรตามขนาด $n \times 1$

X คือ เมตริกซ์ของตัวแปรอิสระขนาด $n \times p$

β คือ เมตริกซ์ค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยขนาด $p \times 1$

ε คือ เมตริกซ์ของการรบกวนอย่างสุ่มขนาด $n \times 1$

จากสมการที่ 34 สามารถประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดได้ ดังสมการที่ 35

$$b = \beta = (X'X)^{-1} X'Y \quad (35)$$

เมื่อ b คือ เมตริกซ์ของค่าประมาณของสัมประสิทธิ์การถดถอยขนาด $p \times 1$

หลังจากได้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอยจากสมการที่ 35 และแทนค่าลงในสมการรูปแบบ ก็จะได้อ่านายออกมา ณ จุดต่างๆ ดังสมการที่ 36

$$\hat{Y} = Xb = HY \quad (36)$$

โดยที่

$$H = X(X'X)^{-1} X' \quad (36)$$

เมื่อ \hat{Y} คือ เมตริกซ์ของค่าที่ทำนายได้ขนาด $n \times 1$

H คือ เมตริกซ์โพรเจกชัน (Projection Matrix) ขนาด $n \times p$

ส่วนค่าผลต่าง (Residual) ระหว่างค่าข้อมูลจริงกับค่าที่ทำนายได้จากสมการที่ 36 แสดงดังสมการที่ 38

$$r = Y - \hat{Y} = (I - H)Y \quad (38)$$

เมื่อ I คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times p$

ในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นที่มีตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัวแปร จะมีสมมติฐานที่เกี่ยวข้องกับค่าพารามิเตอร์ในสมการรูปแบบ โดยการทดสอบที่ใช้ในงานวิจัยจะใช้การทดสอบแบบ t และแบบ F ดังตารางที่ 2.3 และตารางที่ 2.4 ตามลำดับ

ตารางที่ 2.3 สมมติฐาน ตัวทดสอบสถิติและช่วงวิกฤติสำหรับการทดสอบแบบ t

ที่มา: ทรงศิริ 2542

	H_0	H_1	ตัวทดสอบสถิติ	ช่วงวิกฤติ
1.	$\beta_i = \beta_{i0}$	$\beta_i \neq \beta_{i0}$ $> \beta_{i0}$ $< \beta_{i0}$	$t = \frac{b_i - \beta_{i0}}{s_{bi}}$ เมื่อ $s_{bi}^2 = a_{ii} s^2$	$ t \geq t_{\alpha/2, n-k-1}$ $t \geq t_{\alpha, n-k-1}$ $t \leq -t_{\alpha, n-k-1}$
2.	$X'_0 \beta = c$	$X'_0 \beta \neq c$ $> c$ $< c$	$t = \frac{X'_0 b - c}{\sqrt{X'_0 (X'X)^{-1} X_0 s^2}}$	$ t \geq t_{\alpha/2, n-k-1}$ $t \geq t_{\alpha, n-k-1}$ $t \leq -t_{\alpha, n-k-1}$

ตารางที่ 2.4 สมมติฐาน ตัวทดสอบสถิติและช่วงวิกฤติสำหรับการทดสอบแบบ F ในกรณีที่มีตัวแปรอิสระ 3 ชุด
ที่มา: ทรงศิริ 2542

	H ₀	H ₁	ตัวทดสอบสถิติ	ช่วงวิกฤติ
1.	$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$	$\beta_i (i = 1, 2, 3)$ อย่างน้อยหนึ่งค่าไม่เป็นศูนย์	$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{SSR(x_1, x_2, x_3)/3}{SSE(x_1, x_2, x_3)/(n-4)}$	$F \geq F_{\alpha, (3, n-4)}$
2.	$\beta_1 = 0$	$\beta_1 \neq 0$	$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{SSR(x_1, x_2, x_3)}{SSE(x_1, x_2, x_3)/(n-4)}$	$F \geq F_{\alpha, (1, n-4)}$
3.	$\beta_2 = \beta_3 = 0$	β_2 และ β_3 อย่างน้อยหนึ่งค่าไม่เป็นศูนย์	$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{SSR(x_1, x_2, x_3)/2}{SSE(x_1, x_2, x_3)/(n-4)}$	$F \geq F_{\alpha, (2, n-4)}$

หมายเหตุ: SST คือ ผลรวมกำลังสองรวม ซึ่งมีค่าเท่ากับ SSR + SSE

SSR คือ ผลรวมกำลังสองเนื่องจากการถดถอย

SSE คือ ผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อน

2.8.2 การวิเคราะห์การถดถอยแบบเส้นโค้ง

เมื่อความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระและตัวแปรตามเป็นแบบเส้นโค้ง จะต้องใช้วิธีการวิเคราะห์หาสมการถดถอยโดยมีรูปแบบของการถดถอยเป็นแบบเส้นโค้งซึ่งมีรูปแบบดังสมการที่ 39

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \dots + \beta_n X^n + \varepsilon \tag{39}$$

เมื่อ Y คือ ตัวแปรตาม

X คือ ตัวแปรอิสระ

β_n คือ สัมประสิทธิ์การถดถอย

n คือ อันดับของสมการการถดถอยแบบเส้นโค้ง

ε คือ การรบกวนอย่างสุ่ม

ในการแก้สมการเพื่อหาค่าประมาณสัมประสิทธิ์ต่างๆ จะใช้เมตริกซ์เข้ามาช่วยในการคำนวณเช่นเดียวกับกรณีของการวิเคราะห์การถดถอยแบบเชิงเส้น ดังสมการที่กำหนดให้สมการเมตริกซ์เป็นดังสมการที่ 35 โดยรูปแบบของเมตริกซ์จะเปลี่ยนไปดังสมการที่ 40 41 และ 42 ตามลำดับ ซึ่งเป็นตัวอย่างของรูปแบบการถดถอยแบบเส้นโค้งอันดับเป็น 3

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \sum X_i^3 \\ 0 & 0 & \sum X_i^3 & \sum X_i^4 \\ 0 & \sum X_i^3 & \sum X_i^4 & \sum X_i^5 \\ \sum X_i^3 & \sum X_i^4 & \sum X_i^5 & \sum X_i^6 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \\ \sum X_i^2 Y_i \\ \sum X_i^3 Y_i \end{bmatrix} \quad (42)$$

ส่วนการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยจะใช้สมการที่ 35 เช่นเดียวกับการวิเคราะห์การถดถอยแบบเส้นตรง

การทดสอบหาอันดับที่เหมาะสมสำหรับการวิเคราะห์การถดถอยแบบเส้นโค้งสามสามารถทำได้ตามลำดับขั้นตอน ดังนี้

- ก) ทดสอบว่ามีความสัมพันธ์แบบกำลังสามหรือไม่ โดยกำหนดสมมติฐาน $H_0 : \beta_3 = 0$ หรือ $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \varepsilon$ กับ $H_1 : \beta_3 \neq 0$ หรือ $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \varepsilon$ ถ้าปฏิเสธ H_0 แสดงว่าสมการการถดถอยแบบเส้นโค้งอันดับที่ 3 เหมาะสม จึงไม่ต้องทดสอบสมมติฐานต่อ แต่ถ้า

ยอมรับ H_0 แสดงว่าสมการการถดถอยแบบเส้นโค้งอันดับที่ 3 ไม่เหมาะสม ให้ทำการทดสอบต่อในข้อ ข

- ข) ทดสอบว่ามีความสัมพันธ์แบบกำลังสองหรือไม่ โดยกำหนดสมมติฐาน $H_0 : \beta_2 = 0$ หรือ $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ กับ $H_1 : \beta_2 \neq 0$ หรือ $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \varepsilon$ ถ้าปฏิเสธ H_0 แสดงว่าสมการการถดถอยแบบเส้นโค้งอันดับที่ 2 มีความเหมาะสม จึงไม่ต้องทดสอบสมมติฐานต่อ แต่ถ้ายอมรับ H_0 แสดงว่าสมการการถดถอยแบบเส้นโค้งอันดับที่ 2 ไม่เหมาะสม ให้ทำการทดสอบต่อในข้อ ค
- ค) ทดสอบว่ามีความสัมพันธ์แบบกำลังสองหรือไม่ โดยกำหนดสมมติฐาน $H_0 : \beta_1 = 0$ หรือ $Y = \beta_0 + \varepsilon$ กับ $H_1 : \beta_1 \neq 0$ หรือ $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ ถ้าปฏิเสธ H_0 แสดงว่าสมการการถดถอยแบบเส้นโค้งอันดับที่ 1 เหมาะสม แต่ถ้ายอมรับ H_0 แสดงว่าข้อมูลทั้งสองไม่มีความสัมพันธ์กัน

การทดสอบสมมติฐานสำหรับการวิเคราะห์การถดถอยแบบเส้นโค้งจะใช้การทดสอบแบบ F ต่อเนื่อง หรือการทดสอบแบบ t ต่อเนื่อง ตัวทดสอบสถิติ และช่วงวิกฤติที่สัมพันธ์กับแต่ละสมมติฐานหลักและสมมติฐานทางเลือกแสดงในตารางที่ 2.5

ตารางที่ 2.5 สมมติฐาน ตัวทดสอบสถิติ และช่วงวิกฤติสำหรับรูปแบบการถดถอยแบบเส้นโค้งอันดับที่ 3
ที่มา: ทรงศิริ 2542

H_0	H_1	ตัวทดสอบสถิติ	ช่วงวิกฤติ
1. $\beta_3 = 0$	$\beta_3 \neq 0$	$F = \frac{SSR(x^3/x^2, x)}{SSE(x, x^2, x^3)/(n-4)}$ หรือ $t = \frac{b_3}{s_{b_3}}$	$F \geq F_{\alpha, (1, m-4)}$ หรือ $ t \geq t_{\alpha/2, (n-4)}$
2. $\beta_2 = 0$	$\beta_2 \neq 0$	$F = \frac{SSR(x^2/x, x)}{SSE(x, x^2)/(n-3)}$ หรือ $t = \frac{b_2}{s_{b_2}}$	$F \geq F_{\alpha, (1, m-3)}$ หรือ $ t \geq t_{\alpha/2, (n-3)}$
3. $\beta_1 = 0$	$\beta_1 \neq 0$	$F = \frac{SSR(x)}{SSE(x)/(n-2)}$ หรือ $t = \frac{b_1}{s_{b_1}}$	$F \geq F_{\alpha, (1, m-2)}$ หรือ $ t \geq t_{\alpha/2, (n-2)}$

นอกจากนี้ การพิจารณาว่า สมการการถดถอยแบบเส้นโค้งอันดับที่ p ที่สร้างขึ้นนั้น มีความเหมาะสมมากน้อยเพียงใด อาจพิจารณาจากค่าสัมประสิทธิ์ตัวกำหนดของโพลิโนเมียล (Polynomial) อันดับต่างๆ เช่น กรณี $p = 3$ จะหาค่าสัมประสิทธิ์ตัวกำหนดต่างๆ ได้ตามสมการที่ 43, 44 และ 45 ตามลำดับ

$$R_{y,123}^2 = \frac{SSR(x, x^2, x^3)}{SST} \quad (43)$$

$$R_{y,12}^2 = \frac{SSR(x, x^2)}{SST} \quad (44)$$

$$R_{y,1}^2 = \frac{SSR(x)}{SST} \quad (45)$$

เมื่อ R^2 คือ ค่าสัมประสิทธิ์ตัวกำหนด

ในการเปรียบเทียบอันดับนั้น ค่าสัมประสิทธิ์ตัวกำหนด R^2 และผลรวมกำลังสองเนื่องจากการถดถอย SSR จะให้ผลสรุปที่ไม่ต่างกัน เพราะค่าสัมประสิทธิ์ตัวกำหนดเป็นฟังก์ชันของผลรวมกำลังสองเนื่องจากการถดถอย ดังนั้น การพิจารณาหาอันดับที่เหมาะสมจึงพิจารณาได้จากทั้งค่าสัมประสิทธิ์ตัวกำหนด R^2 หรือ SSR โดยอันดับที่เหมาะสมจะเป็นอันดับที่ให้ค่าสัมประสิทธิ์ตัวกำหนดของรูปแบบโพลิโนเมียลสูงที่สุด แต่ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ตัวกำหนดในอันดับที่ใกล้เคียงกันมีค่าไม่ต่างกันมากนัก จะเลือกรูปแบบที่มีโพลิโนเมียลอันดับที่ต่ำกว่าในการวิเคราะห์