

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Chiang Mai University

ภาคผนวก

ภาคผนวก ข

แผนการสอน

แผนการสอนหน่วยที่ 1 จำนวน 4 คาบ

คาบที่ 1

เรื่อง วงกลมหนึ่งหน่วย และการวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เมื่อกำหนดวงกลมหนึ่งหน่วย นักเรียนสามารถบอกพิกัดจุดตัดบนแกน X หรือ Y ได้
2. นักเรียนสามารถบอกข้อตกลงสำหรับทิศทางของการวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยได้
3. เมื่อกำหนดความยาวส่วนโค้ง นักเรียนสามารถบอกพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งได้
4. เมื่อกำหนดรูปภาพที่แสดงจุดปลายส่วนโค้ง นักเรียนสามารถบอกความยาวส่วนโค้งได้

สาระสำคัญ

1. วงกลมหนึ่งหน่วย (The unit circle) หมายถึง วงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และเป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 1\}$
2. จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใดๆ จะหมายถึง จุดปลายของส่วนโค้งที่เริ่มวัดระยะจากจุด $(1,0)$ ไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ไปยาว $|\theta|$ หน่วยโดยทิศทาง

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

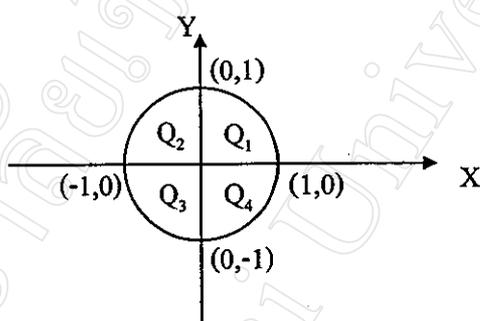
1. ครูคิดแถบข้อความของความสัมพันธ์ บนกระดานดำดังนี้

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 1\}$$

2. ให้นักเรียนช่วยกันบอกรูปภาพของความสัมพันธ์ดังกล่าว [รูปวงกลม]

3. ครูดิกรูปวงกลมที่ระบุดวงครันต์บนกระดานดำ และให้นักเรียนตอบคำถามทีละคน พร้อมทั้งคิดแถบพิกัดจุดตัดบนแกน X และแกน Y

“จุดศูนย์กลางของวงกลมคือพิกัดใด”	[(0,0)]
“รัศมีเท่ากับกี่หน่วย”	[1 หน่วย]
“เส้นโค้งของวงกลมตัดแกน X ที่พิกัดใดบ้าง”	[(1,0), (-1,0)]
“เส้นโค้งของวงกลมตัดแกน Y ที่พิกัดใดบ้าง”	[(0,1), (0,-1)]



ขั้นสอน

1. ครูแนะนำให้นักเรียนทราบว่าวงกลมที่มีลักษณะดังกล่าว เรียกว่า “วงกลมหนึ่งหน่วย” (The unit circle) และให้นักเรียนช่วยกันบอกรูปของวงกลมหนึ่งหน่วยอีกครั้ง

“วงกลมหนึ่งหน่วย หมายถึง วงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด หรือเป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 1\}$ ”

2. ให้นักเรียนตอบคำถามทีละคน

“ความยาวของเส้นรอบวงกลมยาวเท่าใด” [$2\pi r$]

“วงกลมรัศมียาว 1 หน่วย เส้นรอบวงจะยาวเท่าใด” [2π หน่วย]

3. ครูกล่าวถึงการวัดส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย โดยแจกใบความรู้ให้นักเรียนทุกคนอ่าน

ใบความรู้

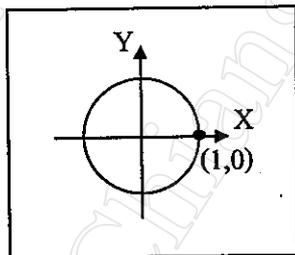
ข้อตกลงสำหรับการวัดความยาวส่วนโค้ง มีดังนี้

1. กำหนดค่า θ (ที่ตัด) ในรูป π หรือ ตัวเลข ซึ่งแทนจำนวนจริงใด ๆ
2. ให้เริ่มวัดจากจุด $(1,0)$ ไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ให้ยาว $|\theta|$ หน่วย จะถึงจุด $P(x,y)$ อยู่บนวงกลม ซึ่งเรียกว่า จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย
3. ถ้า $\theta \geq 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
4. ถ้า $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

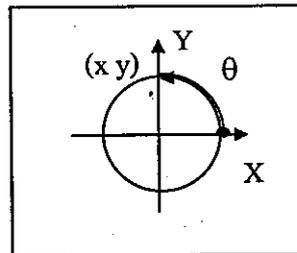
และให้ตัวแทนนักเรียน 4 คน กล่าวข้อสรุปที่ละคน พร้อมกับวาดรูปที่สอดคล้องกับข้อสรุปบนกระดานดำ

“เริ่มต้นวัดส่วนโค้งที่จุด $(1, 0)$ เสมอ”

“(x y) เป็นจุดปลายส่วนโค้ง”

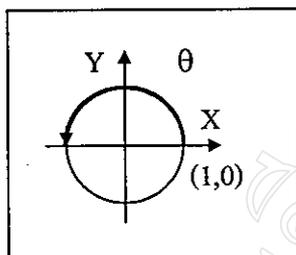


รูป 1



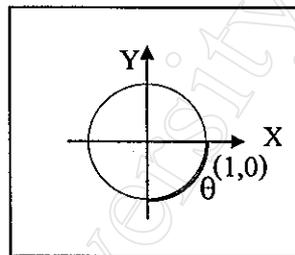
รูป 2

“วัดส่วนโค้งจากจุด (1,0) ไปในทิศทาง
ทวนเข็มนาฬิกาจะได้ $\theta \geq 0$ ”



รูป 3

“วัดส่วนโค้งจากจุด (1,0) ไปในทิศทาง
ตามเข็มนาฬิกาจะได้ $\theta < 0$ ”

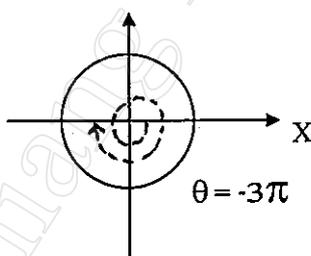


รูป 4

จากรูป 2, 3 และ 4 ให้นักเรียนบอกจุดปลายส่วนโค้ง บอกค่า θ ในรูป π บอกค่า θ ในรูปทศนิยมสี่ตำแหน่ง และเขียนคำตอบบนกระดานที่ละคน

เช่น จากรูป 2 มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่ (0, 1) ค่า $\theta = \frac{\pi}{2}$ หรือประมาณ 1.5708

ครูกล่าวถึง $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่าวัดส่วนโค้งเกิน 1 รอบ เพราะเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย ให้นักเรียนดูรูป 5 และบอกค่า θ ในรูป



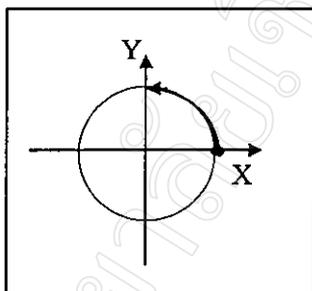
รูป 5

4. ครูบอกข้อตกลงในการทำกิจกรรมรวมกลุ่ม และให้นักเรียนปฏิบัติ ดังนี้
 - 4.1 ให้นักเรียนจับสลากแล้วไปรับแถบข้อความที่ตรงกับข้อความในสลาก
 - 4.2 ให้นักเรียนที่ได้แถบข้อความ “จุดปลายส่วนโค้ง” ไปยืนเป็นคนแรกของแต่ละกลุ่ม และนักเรียนที่ได้แถบข้อความ “ค่า θ ” หรือ “รูปภาพ” ให้ไปหากกลุ่มที่มีความหมายสอดคล้องกัน
 - 4.3 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอหน้าชั้นเรียน ซึ่งในแต่ละกลุ่มให้นำเสนอค่า θ และรูปภาพที่สอดคล้องกันเป็นคู่ๆ ด้วย เช่น

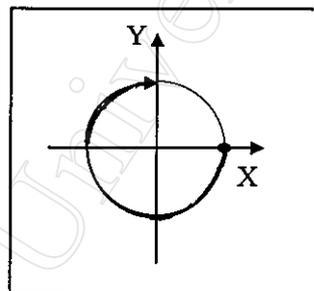
กลุ่มที่ 1

จุดปลายส่วนโค้ง
(0, 1)

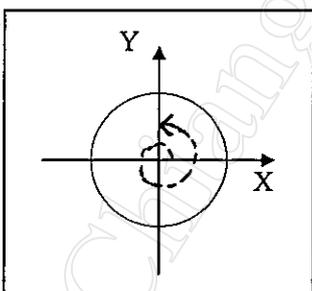
$$\theta = \frac{\pi}{2}$$



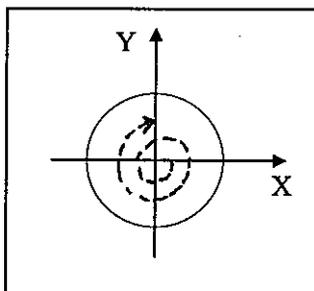
$$\theta = -\frac{3\pi}{2}$$



$$\theta = \frac{5\pi}{2}$$



$$\theta = -\frac{7\pi}{2}$$



ขั้นสรุป

1. ให้นักเรียนนำรูปวงกลมหนึ่งหน่วยติดบนกระดาษสำคัญ และช่วยกันบอกข้อสรุปเกี่ยวกับความยาวเส้นรอบวงกลมหนึ่งหน่วย
2. ให้นักเรียนบอกข้อสรุปข้อตกลงของการวัดส่วนโค้ง และติดรูปบนกระดาษสำคัญ

ขั้นให้งาน

1. ให้นักเรียนทำโจทย์วัดผลในเวลา 10 นาที แล้วให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ โดยครูและนักเรียนช่วยกันเฉลย

สื่อและอุปกรณ์

1. แถบข้อความ
2. แถบพิกัด
3. กระดานสำลี
4. รูปวงกลมหนึ่งหน่วย
5. ใบความรู้
6. รูป 1-5
7. สลาก
8. โจทย์วัดผล

การวัดผลและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	
3. สังเกตจากการทำโจทย์วัดผล	

โจทย์วัดผล

ชื่อ..... ชั้น ม.4/..... เลขที่.....

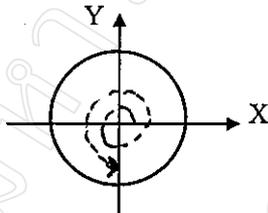
คำสั่ง ให้นักเรียนเขียนคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

1. ความสัมพันธ์ของวงกลมหนึ่งหน่วย (The unit circle) คือ
2. ถ้า θ คือ ความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทาง ทวน เข็มนาฬิกาหนึ่งรอบครึ่ง แสดงว่า $\theta = \dots\dots\dots$ หน่วย

3. เมื่อกำหนดค่า θ ในตารางต่อไปนี้ จงบอกพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง

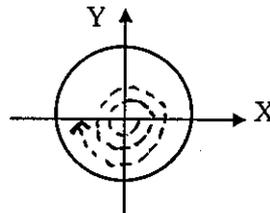
θ	พิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง	θ	พิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง
$-\frac{11\pi}{2}$		17π	
$-\frac{23\pi}{2}$		$\frac{99\pi}{2}$	

4. ให้ θ คือ ความยาวส่วนโค้ง จงบอกค่า θ ของแต่ละรูป



รูป 1

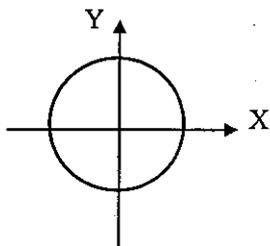
$$\theta = \dots\dots\dots$$



รูป 2

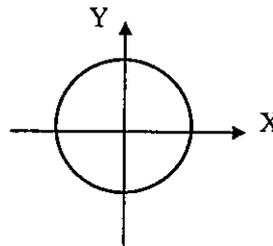
$$\theta = \dots\dots\dots$$

5. จงเขียนส่วนโค้งบนวงกลมเพื่อแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของ θ ที่กำหนด



รูป 1

$$\theta = 4\pi$$



รูป 2

$$\theta = -5\pi$$

เฉลยโจทย์วัดผล

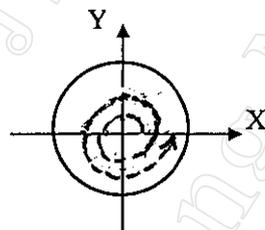
1. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$
2. 3π
- 3.

θ	พิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง	θ	พิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง
$-\frac{11\pi}{2}$	(0,1)	17π	(-1,0)
$-\frac{23\pi}{2}$	(0,1)	$\frac{99\pi}{2}$	(0,-1)

4. รูป 1 ตอบ $\theta = \frac{7\pi}{2}$

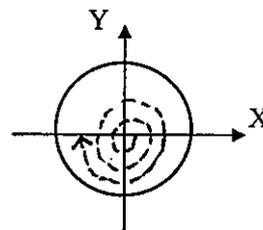
รูป 2 ตอบ $\theta = -\frac{11\pi}{2}$

5.



รูป 1

$$\theta = 4\pi$$



รูป 2

$$\theta = -5\pi$$

คาบที่ 2

เรื่อง ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถบอกนิยามของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ได้
2. นักเรียนสามารถบอกความหมายของ โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ได้
3. นักเรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ได้
4. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนได้
5. เมื่อกำหนดค่า $\sin \theta$ และค่า $\cos \theta$ เป็นจำนวนจริง $0, \pm 1$ นักเรียนสามารถหาจำนวนจริง θ ได้

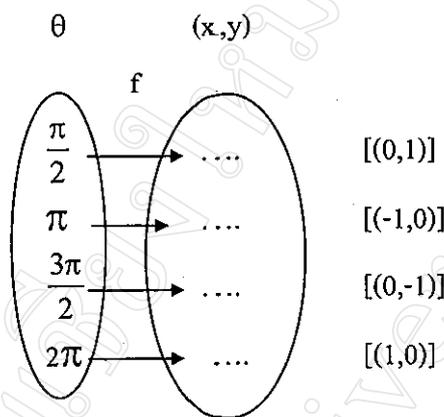
สาระสำคัญ

1. ถ้า (x,y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว θ หน่วย โดยเริ่มวัดจากจุด $(1,0)$ โดยคิดทิศทาง แล้ว $x = \cos \theta$ และ $y = \sin \theta$
2. โดเมนของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เท่ากับ เซตของจำนวนจริง และเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เท่ากับ เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1
3. ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
4. ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ เมื่อ $\theta = \frac{n\pi}{2}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

1. ให้นักเรียนบอกนิยามของฟังก์ชัน [ฟังก์ชัน คือความสัมพันธ์ซึ่งในสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน]
2. ครูคิดแผนภาพ 1 บนกระดานดำดี ให้นักเรียนคิดแถบพิกัดแสดงค่าการจับคู่ระหว่าง θ กับพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง (x,y) และตอบคำถามที่ละคน



แผนภาพ 1

“ยกตัวอย่างค่า θ อื่น ๆ พร้อมทั้งบอกพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง”

$[(-\pi, (-1,0)), (-2\pi, (1,0))$ ฯลฯ]

“สำหรับแต่ละค่าของ θ จะได้พิกัดของจุดปลายส่วนโค้งกี่ค่า”

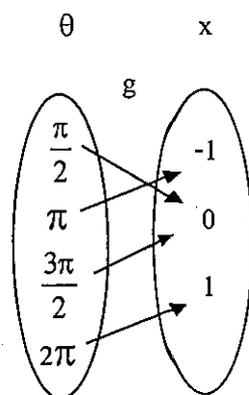
[1 ค่า]

“ความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชันหรือไม่”

[เป็น]

ขั้นสอน

1. ครูตีแผนภาพ 2 บนกระดานดำให้ นักเรียนโยงเส้นแสดงการจับคู่ระหว่าง θ กับ สมาชิกตัวหน้า (x) ของพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง และให้นักเรียนตอบคำถามทีละคน



แผนภาพ 2

“ยกตัวอย่างค่า θ อื่น ๆ พร้อมทั้งบอกค่า x ” $[(3\pi, -1), (-4\pi, 1), \dots]$

“สำหรับแต่ละค่าของ θ จะได้ค่า x กี่ค่า” $[1 \text{ ค่า}]$

“ความสัมพันธ์ g เป็นฟังก์ชันหรือไม่” $[\text{เป็น}]$

ครูกล่าวสรุป สำหรับแต่ละค่าของ θ จะได้ค่า x เพียงค่าเดียว เขียนได้ว่า

$x = g(\theta)$ และมีชื่อเฉพาะว่า “ฟังก์ชันโคไซน์” ให้นักเรียนคิดแถบบทนิยาม และ

อ่านพร้อมกัน

บทนิยาม เมื่อ (x,y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย
ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine) คือ เซตของคู่อันดับ (θ, x)

ครูสรุปบทนิยาม โดยเขียนในรูปสัญลักษณ์

cosine = $\{(\theta, x) \mid \theta \text{ เป็นจำนวนจริง และ } x \text{ เป็นพิกัดแรกของ } (x,y) \text{ ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว } \theta \text{ หน่วย}\}$

ครูกำหนดค่า θ ให้นักเรียนเติมค่า x บนกระดาน คนละ 1 คำตอบ เพื่อให้ได้คู่อันดับที่เป็นสมาชิกของฟังก์ชันโคไซน์

“ $(\frac{\pi}{2}, \dots)$ ” $[0]$ “ (π, \dots) ” $[-1]$

“ $(\frac{3\pi}{2}, \dots)$ ” $[0]$ “ $(2\pi, \dots)$ ” $[1]$

ครูแนะนำการเขียนสัญลักษณ์แทนฟังก์ชันโคไซน์

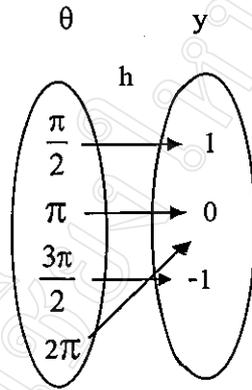
เมื่อ $(\theta, x) \in \text{cosine}$ จะได้ $x = \text{cosine}(\theta)$ เขียนสั้น ๆ ว่า $x = \cos \theta$

ให้นักเรียนเขียนคำตอบบนกระดาน คนละ 1 คำตอบ

“ $\cos \frac{\pi}{2} = \dots$ ” $[0]$ “ $\cos \pi = \dots$ ” $[-1]$

“ $\cos \frac{3\pi}{2} = \dots$ ” $[0]$ “ $\cos 2\pi = \dots$ ” $[1]$

2. ครูคิดแผนภาพ 3 บนกระดานสำคัญ ให้นักเรียนโยงเส้นแสดงการจับคู่ระหว่าง θ กับสมาชิกตัวหลัง (y) ของพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง และให้นักเรียนตอบคำถามทีละคน



แผนภาพ 3

“ยกตัวอย่างค่า θ อื่น ๆ พร้อมทั้งบอกค่า y ” [(3 π , 0), (-4 π , 0), ฯลฯ]

“สำหรับแต่ละค่าของ θ จะได้ค่า y กี่ค่า” [1 ค่า]

“ความสัมพันธ์ h เป็นฟังก์ชันหรือไม่” [เป็น]

ครูกล่าวสรุป สำหรับแต่ละค่าของ θ จะได้ค่า y เพียงค่าเดียว เขียนได้ว่า $y = h(\theta)$ และมีชื่อเฉพาะว่า “ฟังก์ชันไซน์” ให้นักเรียนคิดแถบบทนิยามและอ่านพร้อมกัน

บทนิยาม เมื่อ (x,y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย
ฟังก์ชันไซน์ (sine) คือ เซตของคู่อันดับ (θ, y)

ให้นักเรียนสรุปนิยามในรูปสัญลักษณ์

$$\text{sine} = \{(\theta, y) \mid \theta \text{ เป็นจำนวนจริง และ } y \text{ เป็นพิกัดหลังของ } (x,y) \text{ ซึ่ง}$$

$$\text{ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว } \theta \text{ หน่วย}\}$$

ครูกำหนดค่า θ ให้นักเรียนเติมค่า y บนกระดานคนละ 1 คำตอบ เพื่อให้ได้คู่อันดับที่เป็นสมาชิกของฟังก์ชันไซน์

$$\left(\frac{\pi}{2}, \dots\right) \quad [1] \quad \left(\pi, \dots\right) \quad [0]$$

$$\left(\frac{3\pi}{2}, \dots\right) \quad [-1] \quad \left(2\pi, \dots\right) \quad [0]$$

ครูแนะนำการเขียนสัญลักษณ์แทนฟังก์ชันไซน์

$$\text{เมื่อ } (\theta, y) \in \text{sine} \text{ จะได้ } y = \text{sine}(\theta) \text{ เขียนสั้น ๆ ว่า } y = \sin \theta$$

ให้นักเรียนเขียนคำตอบบนกระดาษคนละ 1 คำตอบ

“ $\sin \frac{\pi}{2} = \dots$ ” [1] “ $\sin \pi = \dots$ ” [0]

“ $\sin \frac{3\pi}{2} = \dots$ ” [-1] “ $\sin 2\pi = \dots$ ” [0]

ครูกล่าวถึงการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ เมื่อ $\theta = \frac{n\pi}{2}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม ให้นักเรียนบอกพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{n\pi}{2}$ หน่วย ซึ่งจุดปลายนั้นจะเป็นจุดใดจุดหนึ่งในสี่จุดที่อยู่บนแกน X และแกน Y

[(1,0),(0,1),(-1,0),(1,0)]

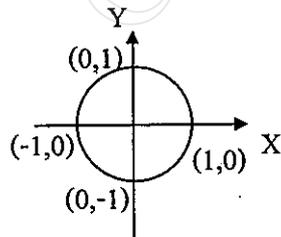
ให้นักเรียนเขียนคำตอบบนกระดาษ คนละ 1 คำตอบ

θ	พิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง	$\sin \theta$	$\cos \theta$
$\frac{27\pi}{2}$ [0,-1] [-1][0]
$-\frac{39\pi}{2}$ [0,1] [1][0]

“เมื่อ $\cos \theta = 0$ และ $2\pi \leq \theta \leq 4\pi$ แล้ว θ มีค่าเท่ากับเท่าไร”

[$\theta = \frac{5\pi}{2}$ หรือ $\frac{7\pi}{2}$]

3. ให้นักเรียนดูรูปวงกลมหนึ่งหน่วยประกอบกับแผนภาพ 2



ครูกล่าวถึงค่า θ ที่เป็นสมาชิกตัวแรกในเซตของคู่อันดับ (θ, x) (ฟังก์ชันโคไซน์) แล้วให้นักเรียนตอบคำถามทีละคน

“ค่า θ ที่เป็นไปได้เท่ากับอะไร”

[ศูนย์ จำนวนลบ จำนวนบวก]

“เซตของสมาชิกตัวแรกเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันโคไซน์อย่างไร” [โดเมนของฟังก์ชันโคไซน์]

“โดเมนของฟังก์ชันโคไซน์ เท่ากับเซตของอะไร”

[เซตของจำนวนจริง]

ครูกล่าวถึงค่า x ที่เป็นสมาชิกตัวหลังในเซตของคู่อันดับ (θ, x) และให้นักเรียนตอบคำถามทีละคน

“ค่า x ที่เป็นไปได้และมากที่สุดเท่ากับเท่าไร” [1]

“ค่า x ที่เป็นไปได้และน้อยที่สุดเท่ากับเท่าไร” [-1]

“เซตของสมาชิกตัวหลังในเซตของคู่อันดับ (θ, x) เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันโคไซน์อย่างไร”
[เรนจ์ของฟังก์ชันโคไซน์]

“เรนจ์ของฟังก์ชันโคไซน์เท่ากับเซตของอะไร” [เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1]

4. ครูกล่าวถึงค่า θ ที่เป็นสมาชิกตัวแรกในเซตของคู่อันดับ (θ, y) (ฟังก์ชันไซน์) และให้นักเรียนตอบคำถามทีละคน

“ค่า θ ที่เป็นไปได้เท่ากับอะไร” [ศูนย์ จำนวนลบ จำนวนบวก]

“เซตของสมาชิกตัวแรกเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันไซน์อย่างไร”
[โดเมนของฟังก์ชันไซน์]

“โดเมนของฟังก์ชันไซน์เท่ากับอะไร” [เซตของจำนวนจริง]

ครูกล่าวถึงค่า y ที่เป็นสมาชิกตัวหลังในเซตของคู่อันดับ (θ, y) และให้นักเรียนตอบคำถามทีละคน

“ค่า y ที่เป็นไปได้และมากที่สุดเท่ากับเท่าไร” [1]

“ค่า y ที่เป็นไปได้และน้อยที่สุดเท่ากับเท่าไร” [-1]

“เซตของสมาชิกตัวหลังในเซตของคู่อันดับ (θ, y) เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันไซน์อย่างไร”
[เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์]

“เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์เท่ากับอะไร” [เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1]

ให้นักเรียนช่วยกันสรุป และนำแถบข้อความคิดบนกระดานสำลี แล้วอ่านพร้อมกัน

โดเมนของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1

5. ครูกล่าวถึงความสัมพันธ์ของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ โดยให้นักเรียนออกมาเขียนคำตอบบนกระดาน คนละ 1 คำตอบ

“จงเขียนสมการของวงกลมหนึ่งหน่วย” $[x^2 + y^2 = 1]$

“จะกล่าวถึงฟังก์ชันโคไซน์เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์อย่างไร” $[x = \cos \theta]$

“จะกล่าวถึงฟังก์ชันไซน์เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์อย่างไร” $[y = \sin \theta]$

ให้นักเรียนช่วยกันสรุปความสัมพันธ์ของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ โดยให้ตัวแทน 1 คน ออกมาเขียนบนกระดาน $[(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1]$

ครูแนะนำถึงการเขียนสัญลักษณ์ $(\cos \theta)^2 = \cos^2 \theta$ และ $(\sin \theta)^2 = \sin^2 \theta$

ให้นักเรียนนำแถบข้อความคำตอบที่ถูกต้องติดบนกระดานสำคัญ

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \text{เมื่อ } \theta \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

ครูเน้นถึงการเขียนประโยคข้อสรุปที่ถูกต้องนั้น ต้องบอกเงื่อนไขของ θ ด้วย

“เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง”

ขั้นสรุป

1. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปและติดแถบข้อความต่าง ๆ บนกระดานสำคัญ และอ่านพร้อมกัน

นิยามของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ขั้นให้งาน

1. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.2 ก ข้อ 1 ในหนังสือ ค 012 หน้า 106

สื่อและอุปกรณ์

1. กระดานสำคัญ
2. แผนภาพ 1-3
3. รูปวงกลมหนึ่งหน่วย
4. แถบบทนิยาม
5. แถบข้อความ
6. หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค 012

การวัดและการประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	
3. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด	

คาบที่ 3

เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถบอกพิกัดของจุดปลายส่วน โค้งที่ยาว θ หน่วยได้
2. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ ได้
3. เมื่อกำหนดค่า $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เป็นจำนวนจริง $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ นักเรียนสามารถหาจำนวนจริง θ ได้

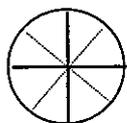
สาระสำคัญ

1. พิกัดของจุดปลายส่วน โค้งที่ยาว θ หน่วย เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม ได้แก่ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ และ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
2. ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม ได้แก่ $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

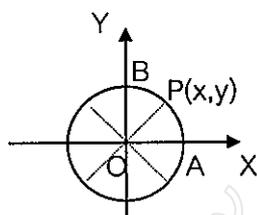
1. ครูแจกกระดาษรูปวงกลมหนึ่งหน่วย ให้ตัวแทนนักเรียน 1 คนออกมาหน้าชั้นเรียน เพื่อแสดงการพับครึ่งกระดาษวงกลมให้ทับกันสนิท 4 รอบ แล้วคลี่ออก นำไปติดบนกระดานดำให้นักเรียนทุกคนตอบคำถามพร้อมกัน



- “วงกลมถูกแบ่งออกเป็นกี่ส่วนเท่า ๆ กัน” [8 ส่วน]
- “วงกลมหนึ่งหน่วยมีเส้นรอบวงยาวเท่าใด” [2π หน่วย]
- “ส่วนโค้งวงกลมที่ถูกแบ่งแล้วแต่ละส่วนยาวเท่าใด” [$\frac{\pi}{4}$ หน่วย]

ขั้นสอน

1. ครูติดกระดาษรูปวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีรอยพับ 8 ส่วน วางทับกับแกน X และแกน Y บนกระดานดำ และติดแถบชื่อจุด O, A, P และ B บนวงกลม



ให้นักเรียนตอบคำถามทีละคน

“ส่วนโค้ง AB ยาวกี่หน่วย” $[\frac{\pi}{2}$ หน่วย]

“ส่วนโค้ง AP ยาวกี่หน่วย” $[\frac{\pi}{4}$ หน่วย]

ครูกล่าวถึงจุด P เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย ให้นักเรียนบอกพิกัดของจุด P ถ้ายังตอบไม่ได้ ครูและนักเรียนช่วยกันหาคำตอบ โดยให้นักเรียนตอบคำถามทีละคน

“เมื่อ OP เป็นแกนสมมาตร รูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง OAP เท่ากับรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง OBP หรือไม่”

[เท่ากัน]

“ส่วนโค้ง AP เท่ากับส่วนโค้ง BP หรือไม่”

[เท่ากัน]

“สรุปได้ว่า คอร์ด AP ยาวเท่ากับคอร์ด BP หรือไม่”

[เท่ากัน]

“ให้นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์คอร์ดที่ยาวเท่ากันบนกระดาน” [AP = BP]

“ให้นักเรียนติดแถบพิกัดของจุด A, P และ B ตามลำดับบนวงกลมหนึ่งหน่วย”

[(1,0) , (x,y) , (0,1)]

ครูกล่าวถึงการหาค่า x, y ที่เป็นพิกัดของจุด P โดยอาศัยการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดของ AP และ BP แล้วให้นักเรียนแทนค่า AP และ BP บนกระดาน

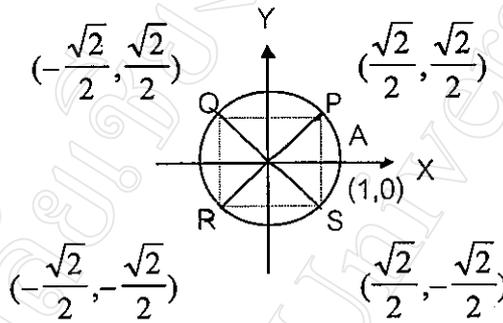
$$[\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}]$$

ให้นักเรียนช่วยกันแก้สมการ เพื่อหาค่า x, y โดยให้ตัวแทนนักเรียน 1 คนเขียนบนกระดาน

เมื่อแก้สมการได้ค่า x, y แล้ว ให้นักเรียนบอกพิกัดของจุด P ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

$[(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})]$

2. ครุติกรูปวงกลมหนึ่งหน่วยที่แบ่งเป็น 8 ส่วนเท่า ๆ กัน บนกระดานดำดี และติดแถบชื่อจุด A, Q, R และ S บนวงกลมหนึ่งหน่วย ให้นักเรียนนำแถบพิกัดของจุด P ติดบนรูปวงกลมหนึ่งหน่วยและให้นักเรียนตอบคำถามทีละคน



“เมื่อแกน Y เป็นแกนสมมาตร จุด P ทับกับจุดใด” [จุด Q]

“เมื่อแกน X เป็นแกนสมมาตร จุด Q ทับกับจุดใด” [จุด R]

“เมื่อแกน X เป็นแกนสมมาตร จุด P ทับกับจุดใด” [จุด S]

“ส่วนโค้ง AQ ยาวเท่าใด” [$\frac{3\pi}{4}$ หน่วย]

“ส่วนโค้ง AR ยาวเท่าใด” [$\frac{5\pi}{4}$ หน่วย]

“ส่วนโค้ง AS ยาวเท่าใด” [$\frac{7\pi}{4}$ หน่วย]

ครูกล่าวถึงจุด Q, R และ S เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ หน่วย ตามลำดับ

ให้นักเรียนบอกพิกัดของจุด Q, R และ S ตามลำดับ และนำแถบพิกัดไปติดบนวงกลมหนึ่งหน่วย

$$\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ และ } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

3. ให้นักเรียนบอกค่า θ อื่น ๆ ที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด P

$$\left[\frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \dots \right]$$

ให้นักเรียนบอกค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่ยกตัวอย่างด้วย

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

ให้นักเรียนบอกค่า θ อื่น ๆ ที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด Q, R, S และบอกค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ นั้น ๆ

ขั้นสรุป

1. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปโดยการถามตอบ การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม หาได้จากพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ หน่วย ซึ่งจุดปลายนั้น จะเป็นจุดใดจุดหนึ่งในสี่จุดต่อไปนี้

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ และ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ และนำแถบพิกัดคิดบนวงกลมหนึ่งหน่วย

ขั้นให้งาน

1. ให้นักเรียนทำโจทย์วัดผล ในเวลา 10 นาที เมื่อเสร็จแล้วเปลี่ยนสมมุติกับเพื่อนเพื่อตรวจคำตอบจากเฉลยคำตอบบนกระดาน และเปิดโอกาสให้ซักถามข้อสงสัย

2. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.2 ก ข้อ 2-4 ในหนังสือ ค 012 หน้า 106-107

สื่อและอุปกรณ์

1. กระดานดำ
2. กระดาษรูปวงกลมหนึ่งหน่วย
3. แถบชื่อจุด
4. แถบพิกัด
5. หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค 012

ชั้นวัดผลและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	
3. สังเกตจากการทำโจทย์วัดผล	
4. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด	

โจทย์วัดผล

คำสั่ง ให้นักเรียนเขียนคำตอบที่ถูกต้องใส่สมุดแบบฝึกหัด

- กำหนด $\theta = \frac{15\pi}{4}$ พิกัดของจุดปลายส่วนโค้งเท่ากับเท่าใด $[(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})]$
- ค่าของ $\sin(-\frac{19\pi}{4})$ เท่ากับเท่าไร $[-\frac{\sqrt{2}}{2}]$
- เมื่อ $\theta = \frac{7\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}$ ค่าของฟังก์ชันไซน์ของ θ ดังกล่าวเท่ากันหรือไม่ $[\text{ไม่เท่ากัน}]$
- ถ้า $|\theta| < 2\pi$ และ $\sin \theta = \cos \theta$ โดยจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่ Q_3 แล้วค่า θ เท่ากับเท่าใด $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$
- เมื่อ $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $-\pi < \theta < \pi$ ค่า θ เท่ากับเท่าใด $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

คาบที่ 4

เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ และ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เมื่อกำหนดค่า $\theta = \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{2\pi}{3}, \pm \frac{4\pi}{3}, \pm \frac{5\pi}{3}, \dots$ และ $\theta = \pm \frac{\pi}{6}, \pm \frac{5\pi}{6}, \pm \frac{7\pi}{6}, \pm \frac{11\pi}{6}, \dots$ นักเรียนสามารถบอกพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งได้

2. เมื่อกำหนดค่า $\theta = \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{2\pi}{3}, \pm \frac{4\pi}{3}, \pm \frac{5\pi}{3}, \dots$ และ $\theta = \pm \frac{\pi}{6}, \pm \frac{5\pi}{6}, \pm \frac{7\pi}{6}, \pm \frac{11\pi}{6}, \dots$ นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ ได้

3. เมื่อกำหนดค่า $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เป็นจำนวนจริง $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ นักเรียนสามารถหาจำนวนจริง θ ได้

สาระสำคัญ

1. พิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ได้แก่ $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ และ $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

2. พิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ได้แก่ $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ และ $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

3. ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ได้แก่ $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{1}{2}$

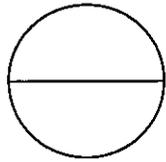
4. ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ได้แก่ $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

1. ครูแจกกระดาษรูปวงกลมหนึ่งหน่วย ให้ตัวแทนนักเรียน 2 คน ออกมาหน้าชั้นเรียน

คนที่ 1 แสดงการพับกระดาษรูปวงกลมในรอบแรกให้พับครึ่ง และในรอบที่สองให้พับครึ่งวงกลมที่ได้เป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน แล้วคลี่ออกนำไปติดบนกระดานดำให้นักเรียนทุกคนตอบคำถามพร้อมกัน

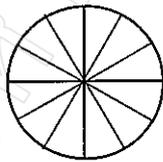


“วงกลมถูกแบ่งออกเป็นกี่ส่วนเท่า ๆ กัน” [6 ส่วน]

“วงกลมหนึ่งหน่วย เส้นรอบวงยาวเท่าใด” [2π หน่วย]

“ความยาวส่วนโค้งแต่ละส่วนเป็นเท่าใด” [$\frac{\pi}{3}$ หน่วย]

คนที่ 2 แสดงการพับกระดาษรูปวงกลมในรอบแรกให้พับครึ่ง และในรอบที่สองให้พับครึ่งวงกลมที่ได้เป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน และรอบที่สามให้พับครึ่งที่ได้จากการพับรอบที่สอง แล้วคลี่ออกนำไปติดบนกระดานดำให้นักเรียนทุกคนตอบคำถามพร้อมกัน



“วงกลมถูกแบ่งออกเป็นกี่ส่วนเท่า ๆ กัน” [12 ส่วน]

“วงกลมหนึ่งหน่วยมีเส้นรอบวงยาวเท่าใด” [2π หน่วย]

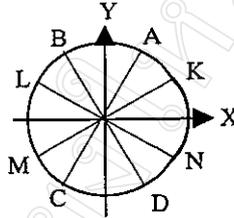
“ความยาวส่วนโค้งแต่ละส่วนเป็นเท่าใด” [$\frac{\pi}{6}$ หน่วย]

ขั้นสอน

1. ครูแบ่งนักเรียนเป็นสองกลุ่ม โดยให้กลุ่มที่ 1 ช่วยกันทำใบงาน 1 คือ หาพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง เมื่อ $\theta = \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{2\pi}{3}, \pm \frac{4\pi}{3}, \pm \frac{5\pi}{3}$ หน่วย และกลุ่มที่ 2 ช่วยกันทำใบงาน 2 คือ หาพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง เมื่อ $\theta = \pm \frac{\pi}{6}, \pm \frac{5\pi}{6}, \pm \frac{7\pi}{6}, \pm \frac{11\pi}{6}$ หน่วย

2. ครูตรวจความถูกต้องแล้วให้ตัวแทนแต่ละกลุ่มช่วยกันอธิบายบนกระดาน เมื่อนักเรียนแต่ละกลุ่มอธิบายจบแล้ว ครูทบทวนโดยการซักถาม และอธิบายเพิ่มเติมในส่วนที่ยังไม่ชัดเจน

3. แบ่งนักเรียนเป็น 8 กลุ่ม ให้นักเรียนแต่ละคนในกลุ่มเลือกตัวอย่างค่า θ อื่น ๆ อีก 5 ค่าที่ไม่ซ้ำกันซึ่งมีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่จุด A, B, C, D, K, L, M และ N ตามลำดับ



4. ให้นักเรียนบอกค่า θ และค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ และ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ โดยเรียงลำดับตามกลุ่ม

ขั้นสรุป

1. ให้นักเรียนคิดรูปร่างกลมหนึ่งหน่วยบนกระดานดำ ครูและนักเรียนช่วยกันสรุป โดยการถามตอบ และให้นักเรียนนำแถบพิกัดติดบนรูปร่างกลมหนึ่งหน่วย

1.1 การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม หาได้จากพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ หน่วย ซึ่งจุดปลายนั้น จะเป็นจุดใดจุดหนึ่งในสี่จุดต่อไปนี้

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ และ } \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

1.2 การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม หาได้จากพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ หน่วย ซึ่งจุดปลายนั้น จะเป็นจุดใดจุดหนึ่งในสี่จุดต่อไปนี้

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ และ } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

ขั้นให้งาน

- ให้นักเรียนทำโจทย์วัดผล ในเวลา 10 นาที เมื่อเสร็จแล้วเปลี่ยนกับเพื่อนเพื่อตรวจคำตอบ โดยครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยบนกระดาน
- ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.2 ก ข้อ 2-4 ในหนังสือ ค 012 หน้า 106-107

สื่อและอุปกรณ์

1. กระดานดำจำนวน 2 แผ่น
2. กระดาษรูปวงกลมหนึ่งหน่วยจำนวน 2 แผ่น
3. ใบงาน 1 และ 2
4. แถบชื่อจุด
5. แถบพิกัด
6. โจทย์วัดผล
7. หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค 012

ขั้นวัดผลและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	
3. สังเกตจากการทำใบงาน	
4. สังเกตจากการอธิบายและข้อสรุป จากการทำใบงาน	
4. สังเกตจากการทำโจทย์วัดผล	
5. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด	

โจทย์วัดผล

ชื่อ..... ชั้น ม.4/..... เลขที่.....

ตอนที่ 1 ให้นักเรียนเขียน ✓ หน้าข้อความที่ถูกต้อง และเขียน ✗ หน้าข้อความที่ผิด

1. ถ้า $\theta = -\frac{13\pi}{3}$ แล้วพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งคือ $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ [✗]
2. ถ้า $\theta = \frac{23\pi}{6}$ แล้วพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งคือ $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ [✓]
3. $\cos \frac{4\pi}{3} = \cos(-\frac{10\pi}{3})$ [✓]
4. $\sin(-\frac{2\pi}{3}) - \cos(-\frac{7\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ [✗]
5. $\sin \frac{17\pi}{6} = \sin(-\frac{17\pi}{6})$ [✗]
6. $\cos(-\frac{11\pi}{6}) < \sin \frac{11\pi}{6}$ [✗]

ตอนที่ 2 ให้นักเรียนเติมคำตอบที่ถูกต้อง ลงในช่องว่างที่กำหนด

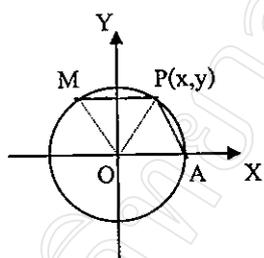
1. $\cos(-\frac{29\pi}{6})$ มีค่าเท่ากับเท่าไร [$-\frac{\sqrt{3}}{2}$]
2. ถ้า θ มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 2π ทำให้ค่า $\sin \theta$ เท่ากับ $\sin(-\frac{5\pi}{6})$
แล้ว θ เท่ากับเท่าไร [$\frac{7\pi}{6}$ และ $\frac{11\pi}{6}$]
3. $\sin \frac{\pi}{3} - 2 \sin \frac{\pi}{6} + \cos(-\frac{17\pi}{6})$ ผลลัพธ์เท่ากับเท่าไร [-1]

ใบงาน 1

คำชี้แจง ให้นักเรียนอ่านและดำเนินงานตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. พับกระดาษรูปวงกลมในรอบแรกให้พับครึ่ง และในรอบที่สองให้พับครึ่งวงกลมที่ได้เป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน แล้วคลี่ออกจะได้รูปวงกลมที่มีรอยแบ่งเป็น 6 ส่วนเท่า ๆ กัน

2. ตัดกระดาษรูปวงกลมหนึ่งหน่วยที่ได้จากข้อ 1. วางทับกับแกน X และแกน Y บนกระดาษสี่เหลี่ยม และติดแถบชื่อจุด O, A, P และ M ตามลำดับ บนวงกลมหนึ่งหน่วย และเขียนคำตอบในช่องว่างที่กำหนด



- “ส่วนโค้งครึ่งวงกลมยาวกี่หน่วย” [π หน่วย]
- “ส่วนโค้ง AP ยาวกี่หน่วย” [$\frac{\pi}{3}$ หน่วย]
- “เมื่อแกน Y เป็นแกนสมมาตร จุด P ทับกับจุดใด” [จุด M]
- “ส่วนโค้ง PM ยาวเท่าใด” [$\frac{\pi}{3}$ หน่วย]
- “จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย คือจุดใด” [จุด P]

หาพิกัดของจุด P ดำเนินการดังนี้

- “เมื่อ OP เป็นแกนสมมาตร รูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง OAP เท่ากับรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง OMP หรือไม่” [เท่ากัน]
- “ส่วนโค้ง PA ทับกับส่วนโค้งใดได้สนิท” [ส่วนโค้ง PM]
- “สรุปได้ว่า คอร์ด PA เท่ากับคอร์ดใด” [PM]
- “ให้เขียนประโยคสัญลักษณ์คอร์ดที่ยาวเท่ากันลงในกระดาษ” [PA = PM]
- “ให้เขียนพิกัดของจุด A, P และ M ตามลำดับบนวงกลมหนึ่งหน่วย” [(1,0), (x,y), (-x,y)]

3. จากประโยค PA = PM และพิกัดของ A, P และ M จงเขียนสมการ

$$\dots\dots [\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-(-x))^2}]$$

4. จงแก้สมการในข้อ 3 จะได้ค่า x, y และจงบอกพิกัดของจุด P ซึ่งเป็นจุดปลาย ส่วนโค้งที่

ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย [$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$]

5. ให้นักเรียนเขียนคำตอบในช่องว่างที่กำหนด

“เมื่อแกน Y เป็นแกนสมมาตร จุด P ทับกับจุดใด” [จุด M]

เมื่อแกน X เป็นแกนสมมาตร ให้จุด M ทับกับจุด C และจุด P ทับกับจุด D

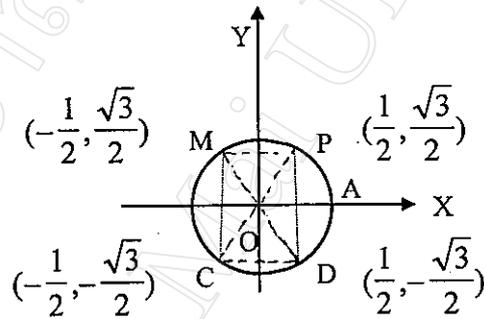
จงเขียนชื่อจุด C และ D ลงบนวงกลมหนึ่งหน่วย

“ส่วนโค้ง AM ยาวเท่าใด” [$\frac{2\pi}{3}$ หน่วย]

“ส่วนโค้ง AC ยาวเท่าใด” [$\frac{4\pi}{3}$ หน่วย]

“ส่วนโค้ง AD ยาวเท่าใด” [$\frac{5\pi}{3}$ หน่วย]

6. เขียนพิกัดของจุด P, M, C และ D ตามลำดับ ลงบนวงกลมหนึ่งหน่วย

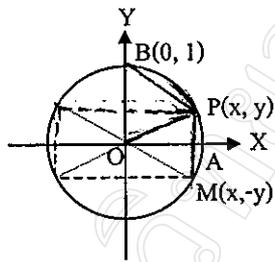


ใบงาน 2

คำชี้แจง ให้นักเรียนอ่านและดำเนินงานตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. พับกระดาษสี่รูปวงกลมในรอบแรกให้พับครึ่ง และในรอบที่สองให้พับครึ่งวงกลมที่ได้เป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน และรอบที่สามให้พับครึ่งที่ได้จากการพับรอบที่สอง แล้วคลี่ออกจะได้รูปวงกลมที่มีรอยแบ่งเป็น 12 ส่วนเท่า ๆ กัน

2. ตัดกระดาษรูปวงกลมหนึ่งหน่วยที่ได้จากข้อ 1. วางทับกับแกน X และแกน Y บนกระดาษสี่เหลี่ยม และติดแถบชื่อจุด O, A, B, P และ M บนวงกลมหนึ่งหน่วย และช่วยกันตอบคำถาม



“ส่วนโค้งครึ่งวงกลมยาวกี่หน่วย” [π หน่วย]

“ส่วนโค้ง AP ยาวกี่หน่วย” [$\frac{\pi}{6}$ หน่วย]

“ส่วนโค้ง BP ยาวกี่หน่วย” [$\frac{\pi}{3}$ หน่วย]

“เมื่อแกน X เป็นแกนสมมาตร จุด P ทับกับจุดใด” [จุด M]

“ส่วนโค้ง PM ยาวกี่หน่วย” [$\frac{\pi}{3}$ หน่วย]

“จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย คือจุดใด” [จุด P]

หาพิกัดของจุด P โดยอาศัยวิธีการเดียวกันกับการหาพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง เมื่อ θ เท่ากับ $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

“เมื่อ OP เป็นแกนสมมาตร รูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง OPB เท่ากับรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง OPM หรือไม่” [เท่ากัน]

“ส่วนโค้ง PB ทับกับส่วนโค้งใดได้สนิท” [ส่วนโค้ง PM]

“สรุปได้ว่า คอร์ด PB เท่ากับคอร์ดใด” [PM]

“จงเขียนประโยคสัญลักษณ์คอร์ดที่ยาวเท่ากันลงในกระดาษ” [PB = PM]

“ให้ตัวแทนนักเรียน 3 คน ติดแถบพิกัดของจุด B, P และ M ตามลำดับ บนวงกลมหนึ่งหน่วย” [(0,1), (x,y), (x,-y)]

3. จากประโยค PB = PM และพิกัดของ B, P และ M จงเขียนสมการ

$$\dots\dots\dots [\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(y-(-y))^2}]$$

4. จงแก้สมการในข้อ 3 จะได้ค่า x, y และจงบอกพิกัดของจุด P ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้ง
ที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย $[(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})]$

5. ให้นักเรียนช่วยกันตอบคำถามที่ละคน

“เมื่อแกน X เป็นแกนสมมาตร จุด P ทับกับจุดใด” [จุด M]

เมื่อแกน Y เป็นแกนสมมาตร ให้จุด P ทับกับจุด C และจุด M ทับกับจุด D

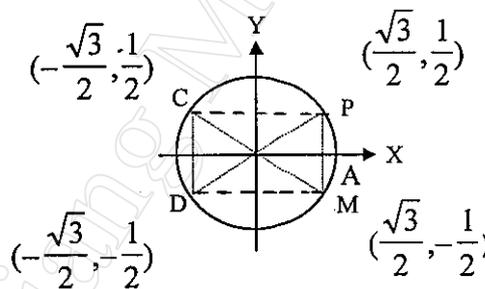
จงเขียนชื่อจุด C และ D ลงบนวงกลมหนึ่งหน่วย

“ส่วนโค้ง AC ยาวเท่าใด” $[\frac{5\pi}{6} \text{ หน่วย}]$

“ส่วนโค้ง AD ยาวเท่าใด” $[\frac{7\pi}{6} \text{ หน่วย}]$

“ส่วนโค้ง AM ยาวเท่าใด” $[\frac{11\pi}{6} \text{ หน่วย}]$

เขียนพิกัดของจุด P, C, D และ M ลงบนวงกลมหนึ่งหน่วย



คาบที่ 5 คาบสอนซ่อมเสริม โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน
บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนซ่อมเสริม

หน่วยที่ 1 เรื่องวงกลมหนึ่งหน่วย และฟังก์ชัน ไซน์และโคไซน์

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เมื่อกำหนดวงกลมหนึ่งหน่วย นักเรียนสามารถบอกจุดตัดบนแกน X หรือแกน Y ได้
2. เมื่อกำหนดค่า θ นักเรียนสามารถบอกพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยได้
3. นักเรียนสามารถบอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน ไซน์และโคไซน์ได้
4. นักเรียนสามารถบอกค่าของฟังก์ชัน ไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนได้

สาระสำคัญ

1. จุดตัดบนแกน X หรือ Y ได้แก่ $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ และ $(0,-1)$
2. พิกัดของจุดปลายส่วนโค้งของ θ เมื่อ $\theta = \frac{n\pi}{2}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม ได้แก่ $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ และ $(0,-1)$
3. ค่าของฟังก์ชัน ไซน์และโคไซน์ของ θ เมื่อ $\theta = \frac{n\pi}{2}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม ได้แก่ $0, \pm 1$
4. พิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม ได้แก่ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ และ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
5. ค่าของฟังก์ชัน ไซน์และโคไซน์ของ θ เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ได้แก่ $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
6. พิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ได้แก่ $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ และ $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
7. พิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ได้แก่ $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ และ $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$
8. ค่าของฟังก์ชัน ไซน์และโคไซน์ของ θ เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ได้แก่ $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

9. ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ได้แก่ $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{1}{2}$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

- ครูแนะนำการใช้คอมพิวเตอร์เพื่อศึกษาบทเรียน ดังนี้
 เมื่อหน้าจอปรากฏ กรุณาเติมรหัสประจำตัว ให้นักเรียนเติมรหัสแล้วกด ENTER
 เมื่อหน้าจอปรากฏ ชื่อไฟล์ ให้นักเรียนเติมชื่อไฟล์ U1 แล้วกด ENTER
- ครูแนะนำการใช้บทเรียนเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 หน่วย ได้แก่
 หน่วยที่ 1 วงกลมหนึ่งหน่วยและฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
 หน่วยที่ 2 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน
 หน่วยที่ 3 ฟังก์ชันไซน์ตรีโกณมิติอื่น ๆ และฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม
 ในแต่ละหน่วยประกอบด้วย
 - แบบทดสอบประจำหน่วยครั้งที่ 1
 - บทเรียนคอมพิวเตอร์สำหรับซ่อม
 - บทเรียนคอมพิวเตอร์สำหรับเสริม
 - แบบทดสอบประจำหน่วยครั้งที่ 2
- ครูแนะนำการใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนซ่อมเสริม สำหรับหน่วยที่ 1 ให้นักเรียนอ่านคำแนะนำแต่ละกรอบบนหน้าจอ และ กดปุ่ม ENTER หรือ ปุ่ม ESC เพื่อศึกษากรอบต่อไป
 - เมื่อปรากฏแบบทดสอบประจำหน่วยที่ 1 ครั้งที่ 1 มีคำแนะนำการทำแบบทดสอบ ดังนี้
 - ให้นักเรียนอ่านคำถามแต่ละข้อให้เข้าใจ
 - เมื่อได้คำตอบแล้วให้กดหมายเลข 1, 2, 3, 4 หรือใช้ปุ่มลูกศร (\leftarrow , \rightarrow) เลื่อนให้ตรงกับหมายเลขที่เลือก แล้วกดปุ่ม ENTER
 - นักเรียนมีเวลาในการทำแบบทดสอบข้อละ 90 วินาที โดยจะบอกเวลาอยู่ตรงมุมซ้ายด้านบนของจอภาพ
 - เมื่อนักเรียนทำแบบทดสอบครบ 10 ข้อแล้ว นักเรียนจะทราบคะแนนในรอบต่อไปทันที
 - ถ้านักเรียนได้คะแนนต่ำกว่า 5 คะแนน ให้นักเรียนอ่านคำแนะนำ และกดหมายเลข 1 เพื่อศึกษาบทเรียนสำหรับซ่อม

3.4 ถ้านักเรียนได้คะแนนตั้งแต่ 5 คะแนนขึ้นไป ให้นักเรียนอ่านคำแนะนำ และกดหมายเลข 2 เพื่อศึกษาบทเรียนสำหรับเสริม

3.5 บทเรียนสำหรับซ่อม ประกอบด้วยเฉลยแบบทดสอบ ข้อสรุปคำถามเพิ่มเติม

3.6 บทเรียนสำหรับเสริม ประกอบด้วยเฉลยแบบทดสอบเฉพาะข้อที่ถูก แบบฝึกหัดเพิ่มเติม เฉลยแบบฝึกหัดเพิ่มเติมพร้อมทั้งข้อสรุป

3.7 นักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบประจำหน่วยที่ 1 ครั้งที่ 2 จำนวน 10 ข้อ

สื่อและอุปกรณ์

บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนซ่อมเสริม

การวัดผลและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตั้งใจเรียน	
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	
3. สังเกตจากความซื่อสัตย์	
4. สังเกตจากคะแนนในการทดสอบประจำหน่วย ครั้งที่ 1 และครั้งที่ 2	

แบบทดสอบหน่วยที่ 1 ครั้งที่ 1 (10 ข้อ)

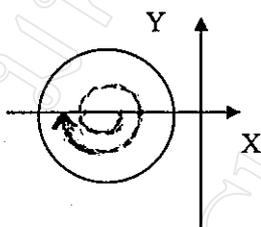
จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด ข้อละ 1 คำตอบ

1. พิกัดจุดตัดของวงกลมหนึ่งหน่วยบนแกน Y คือข้อใด

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1. (1,0) และ (0,-1) | 2. (-1,0) และ (1,0) |
| 3. (0,1) และ (0,-1) | 4. (0,1) และ (-1,0) |

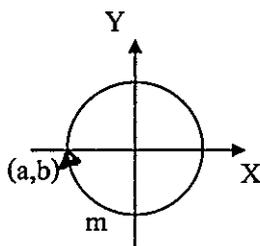
2. กึ่งวัดค่า θ ได้เท่ากับ 7π หน่วย แสดงว่ากึ่งวัดค่า θ อย่างไร

1. วัดส่วนโค้งจากจุด (0,1) ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา
2. วัดส่วนโค้งจากจุด (1,0) ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา
3. วัดส่วนโค้งจากจุด (0,1) ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
4. วัดส่วนโค้งจากจุด (1,0) ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

3. จากรูปค่า θ คือจำนวนในข้อใด

- | | |
|------------|------------|
| 1. -2π | 2. -3π |
| 3. 2π | 4. 3π |

4. จากรูป (a,b) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว m หน่วย ข้อใดเป็นสมาชิกของฟังก์ชันไซน์



- | | |
|----------|----------|
| 1. (a,b) | 2. (a,m) |
| 3. (m,a) | 4. (m,b) |

5. เรนจ์ของฟังก์ชันโคไซน์คือข้อใด

1. $[-1,1]$
2. $[0,\infty)$
3. $(-\infty,1]$
4. \mathbb{R}

6. ถ้าพิกัด $(\square, \frac{1}{7})$ อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย และอยู่ในควอดรันต์ที่ 1 แล้วค่าของจำนวนใน \square เท่ากับข้อใด

1. $1 - \frac{1}{7}$
2. $1 - \frac{1}{49}$
3. $\sqrt{1 - \frac{1}{7}}$
4. $\sqrt{1 - \frac{1}{49}}$

7. ถ้า $\cos \theta = -1$ และ $-4\pi < \theta < 0$ แล้ว θ คือจำนวนในข้อใด

1. $-\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}$
2. $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}$
3. $-\pi, -3\pi$
4. $-2\pi, -4\pi$

8. เมื่อ $\theta = -\frac{23\pi}{4}$ จุดปลายส่วนโค้งคือข้อใด

1. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
2. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
3. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
4. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

9. $\cos(-\frac{2\pi}{3})$ มีค่าสอดคล้องกับจำนวนในข้อใด

1. มีค่าน้อยกว่า $\sin \frac{2\pi}{3}$
2. มีค่ามากกว่า $\cos \frac{2\pi}{3}$
3. มีค่าเท่ากับ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$

10. ถ้า $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$ แล้ว θ มีค่าเท่ากับจำนวนในข้อใด

1. $\frac{\pi}{3}$
2. $\frac{2\pi}{3}$
3. $\frac{\pi}{6}$
4. $\frac{5\pi}{6}$

เฉลยคำตอบแบบทดสอบ หน่วยที่ 1 ครั้งที่ 1

ข้อ 1. ตอบ 3

ข้อ 2. ตอบ 4

ข้อ 3. ตอบ 2

ข้อ 4. ตอบ 4

ข้อ 5. ตอบ 1

ข้อ 6. ตอบ 4

ข้อ 7. ตอบ 3

ข้อ 8. ตอบ 1

ข้อ 9. ตอบ 1

ข้อ 10. ตอบ 2

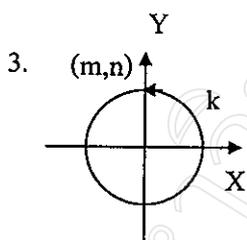
แบบทดสอบหน่วยที่ 1 ครั้งที่ 2 (10 ข้อ)

1. ปอวัดความยาวส่วนโค้งไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาได้ $\frac{3}{4}$ ของความยาวเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย จุดปลายส่วนโค้งคือข้อใด

- | | |
|----------|-----------|
| 1. (1,0) | 2. (-1,0) |
| 3. (0,1) | 4. (0,-1) |

2. ถ้า $\theta = -5\pi$ จุดปลายส่วนโค้งคือข้อใด

- | | |
|----------|-----------|
| 1. (1,0) | 2. (-1,0) |
| 3. (0,1) | 4. (0,-1) |



จากรูป k คือความยาวส่วนโค้ง และ (m,n) คือจุดปลายส่วนโค้ง แล้วข้อใดถูกต้อง

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 1. $\cos k = m$ | 2. $\cos n = k$ |
| 3. $\sin k = m$ | 4. $\sin n = k$ |

4. โดเมนของฟังก์ชันไซน์คือข้อใด

- | | |
|-------------------------|-----------------|
| 1. $[-1,1]$ | 2. $[0,\infty]$ |
| 3. $\mathbb{R} - \{0\}$ | 4. \mathbb{R} |

5. ถ้า $\cos^2 \theta = 1 - \frac{4}{81}$ แล้ว $\sin^2 \theta$ เท่ากับจำนวนในข้อใด

- | | |
|-------------------|--------------------|
| 1. $-\frac{2}{9}$ | 2. $-\frac{4}{81}$ |
| 3. $\frac{2}{9}$ | 4. $\frac{4}{81}$ |

6. ถ้า $\theta = 8\pi$ ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ตามลำดับ คือข้อใด

1. 1, 0

2. -1, 0

3. 0, 1

4. 0, -1

7. เมื่อ $\theta = -\frac{17\pi}{4}$ จุดปลายส่วนโค้งคือข้อใด

1. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

2. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

3. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

4. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

8. เมื่อ $\theta = -\frac{10\pi}{3}$ จุดปลายส่วนโค้งคือข้อใด

1. $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

2. $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

3. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

4. $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

9. ถ้า $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ และจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_2 แล้ว θ มีค่าเท่ากับจำนวนในข้อใด

1. $-\frac{5\pi}{3}$

2. $-\frac{19\pi}{6}$

3. $\frac{5\pi}{3}$

4. $\frac{19\pi}{6}$

10. $\sin \frac{13\pi}{6}$ มีค่าเท่ากับจำนวนในข้อใด

1. $\frac{1}{2}$

2. $-\frac{1}{2}$

3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

เฉลยคำตอบแบบทดสอบหน่วยที่ 1 ครั้งที่ 2

ข้อ 1. ตอบ 3

ข้อ 2. ตอบ 1

ข้อ 3. ตอบ 1

ข้อ 4. ตอบ 4

ข้อ 5. ตอบ 4

ข้อ 6. ตอบ 3

ข้อ 7. ตอบ 4

ข้อ 8. ตอบ 2

ข้อ 9. ตอบ 2

ข้อ 10. ตอบ 1

แผนการสอนหน่วยที่ 2 จำนวน 3 คาบ

คาบที่ 6

เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบให้เป็นฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกที่เป็นจำนวนตรงข้ามกันได้
2. เมื่อกำหนดฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ ซึ่ง $\theta > 2\pi$ นักเรียนสามารถเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ โดยที่ θ อยู่ในรูป $2n\pi + \alpha$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$ และ $0 \leq \alpha < 2\pi$ ได้
3. นักเรียนสามารถหาค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนได้

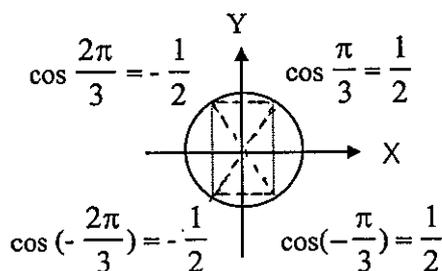
สาระสำคัญ

1. $\sin(-\theta) = -\sin \theta$
2. $\cos(-\theta) = \cos \theta$
3. $\sin \theta = \sin(2n\pi + \alpha) = \sin \alpha$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$ และ $0 \leq \alpha < 2\pi$
4. $\cos \theta = \cos(2n\pi + \alpha) = \cos \alpha$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$ และ $0 \leq \alpha < 2\pi$

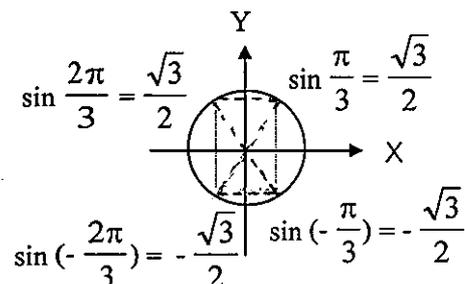
กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

1. แบ่งนักเรียนเป็นสองกลุ่ม ครูแจกแถบข้อความให้นักเรียนกลุ่มละ 4 ใบ และให้ตัวแทนนักเรียนกลุ่มที่ 1-2 นำแถบข้อความไปติดบนรูป 1-2 ตามลำดับ



รูป 1



รูป 2

ชั้นสอน

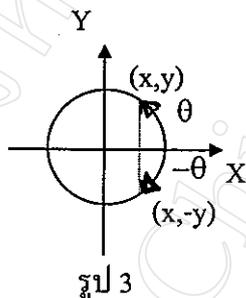
1. จากรูป 1 และ 2 ให้นักเรียนเปรียบเทียบฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบกับฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกที่เป็นจำนวนตรงข้ามกัน เพื่อให้สมการที่เป็นจริงคนละ 1 คำตอบบนกระดาน

“ $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \dots\dots$ ”	$[\cos \frac{\pi}{3}]$
“ $\cos(-\frac{2\pi}{3}) = \dots\dots$ ”	$[\cos \frac{2\pi}{3}]$
“ $\sin(-\frac{\pi}{3}) = \dots\dots$ ”	$[-\sin \frac{\pi}{3}]$
“ $\sin(-\frac{2\pi}{3}) = \dots\dots$ ”	$[-\sin \frac{2\pi}{3}]$

2. ให้นักเรียนยกตัวอย่างฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบกับค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกที่เป็นจำนวนตรงข้ามกัน อีก 2 ตัวอย่าง

$$\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4}, \quad \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4}$$

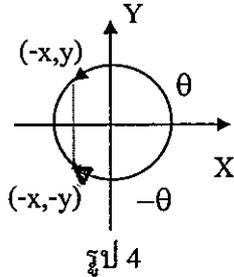
3. ให้ตัวแทนนักเรียนกลุ่ม 1 บอกพิกัดจุดปลายส่วนโค้งที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 1, 4 โดยมีแกน X เป็นแกนสมมาตร และนำแถบข้อความ (x,y) และ (x,-y) ไปติดบนรูป 3



จากรูป 3 ให้นักเรียนบอกค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

$\cos \theta = \dots\dots\dots$	$[x]$
$\cos(-\theta) = \dots\dots\dots$	$[x]$
$\sin \theta = \dots\dots\dots$	$[y]$
$\sin(-\theta) = \dots\dots\dots$	$[-y]$

ให้ตัวแทนนักเรียนกลุ่ม 2 บอกพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 2 และ 3 โดยมีแกน X เป็นแกนสมมาตร และนำแถบข้อความ (-x,y) และ (-x,-y) ไปติดบนรูป 4



รูป 4

จากรูป 4 ให้นักเรียนบอกค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

$$\cos \theta = \dots\dots\dots [-x]$$

$$\cos (-\theta) = \dots\dots\dots [-x]$$

$$\sin \theta = \dots\dots\dots [y]$$

$$\sin (-\theta) = \dots\dots\dots [-y]$$

จากรูป 3 และ 4 ให้นักเรียนช่วยกันบอกข้อสรุปค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบ และค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกที่เป็นจำนวนตรงข้ามกัน และเขียนบนกระดาน

$$\sin (-\theta) = -\sin \theta ,$$

$$\cos (-\theta) = \cos \theta$$

4. ครุคิดแผนภูมิคำถามบนกระดานให้นักเรียนเขียนค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ ที่กำหนด คนละ 1 คำตอบ

$$\sin \frac{\pi}{3} = \dots\dots\dots \quad \sin \frac{7\pi}{3} = \dots\dots\dots \quad \sin \frac{13\pi}{3} = \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \dots\dots\dots \quad \cos \frac{7\pi}{3} = \dots\dots\dots \quad \cos \frac{13\pi}{3} = \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} \right]$$

ให้นักเรียนสังเกตค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ ที่ได้เท่ากัน ครูชี้แนะการเขียนค่า θ ที่มากกว่า 2π ให้อยู่ในรูป $2n\pi + \alpha$ เมื่อ $n \in I^+$ และ $0 \leq \alpha < 2\pi$ โดยยกตัวอย่างจากแผนภูมิคำถาม

$$1. \sin \frac{7\pi}{3} = \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$2. \cos \frac{13\pi}{3} = \cos \left(2(2\pi) + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3}$$

จาก 1 และ 2 ให้นักเรียนบอกพิกัดจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{7\pi}{3}$ และ $\frac{\pi}{3}$, $\frac{13\pi}{3}$ และ $\frac{\pi}{3}$ และสรุปได้ว่า พิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ และ α จะมีจุดปลายเป็นจุดเดียวกัน แล้วนำแถบข้อความไปติดบนกระดาน

$$\sin \theta = \sin (2n\pi + \alpha) = \sin \alpha \quad \text{เมื่อ } n \in I^+ \text{ และ } 0 \leq \alpha < 2\pi$$

$$\cos \theta = \cos (2n\pi + \alpha) = \cos \alpha \quad \text{เมื่อ } n \in I^+ \text{ และ } 0 \leq \alpha < 2\pi$$

ครูกล่าวถึงข้อสรุปจากแถบข้อความและข้อสรุปของ $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, $\cos(-\theta) = \cos \theta$ โดยชี้ให้เห็นว่า ถ้าสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้แล้ว จะหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกทุกจำนวนได้ด้วย และหาค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบทุกจำนวนได้เช่นเดียวกัน ยกตัวอย่างการหาค่าของ $\sin \frac{25\pi}{4}$ และ $\cos(-\frac{11\pi}{3})$ ดังนี้

$$\begin{aligned} \sin \frac{25\pi}{4} &= \sin(3(2\pi) + \frac{\pi}{4}) && \text{และ} && \cos(-\frac{11\pi}{3}) &= \cos \frac{11\pi}{3} \\ &= \sin \frac{\pi}{4} && && &= \cos(2\pi + \frac{5\pi}{3}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} && && &= \cos \frac{5\pi}{3} \\ &&& && &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสูตร โดยการถามตอบ และคิดแถบข้อความบนกระดาน

ขั้นให้งาน

ให้นักเรียนทำโจทย์วัดผล ในเวลา 10 นาที เมื่อเสร็จแล้วเปลี่ยนกับเพื่อน เพื่อตรวจคำตอบ โดยครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบบนกระดาน

สื่อและอุปกรณ์

1. แถบข้อความ
2. รูป 1-4
3. แผนภูมิคำถาม
4. โจทย์วัดผล
5. หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค 012

ขั้นวัดผลและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	
3. สังเกตจากการทำโจทย์วัดผล	
4. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด	

โจทย์วัดผล

ชื่อ..... ชั้น ม.4/..... เลขที่.....

คำสั่ง จงเขียนคำตอบลงในช่องว่างที่กำหนด

1. จงเขียนฟังก์ชันต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวก

1.1 $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \dots\dots\dots \left[-\sin\frac{5\pi}{3}\right]$

1.2 $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \dots\dots\dots \left[-\sin\frac{11\pi}{3}\right]$

1.3 $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \dots\dots\dots \left[\cos\frac{5\pi}{3}\right]$

1.4 $\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \dots\dots\dots \left[\cos\frac{11\pi}{3}\right]$

2. จงเขียนฟังก์ชันต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ โดยที่ $\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$ และ $0 \leq \alpha < 2\pi$ พร้อมทั้งหาค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ

2.1 $\sin\frac{83\pi}{6} = \dots\dots\dots$

$$\left[\sin\frac{83\pi}{6} = \sin\left(6(2\pi) + \frac{11\pi}{6}\right) = \sin\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2} \right]$$

2.2 $\cos\frac{83\pi}{6} = \dots\dots\dots$

$$\left[\cos\frac{83\pi}{6} = \cos\left(6(2\pi) + \frac{11\pi}{6}\right) = \cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

2.3 $\sin\left(-\frac{47\pi}{3}\right) = \dots\dots\dots$

$$\left[\sin\left(-\frac{47\pi}{3}\right) = -\sin\frac{47\pi}{3} = -\sin\left(7(2\pi) + \frac{5\pi}{3}\right) = -\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

2.4 $\cos\left(-\frac{47\pi}{3}\right) = \dots\dots\dots$

$$\left[\cos\left(-\frac{47\pi}{3}\right) = \cos\frac{47\pi}{3} = \cos\left(7(2\pi) + \frac{5\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} \right]$$

คาบที่ 7

เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_2, Q_3, Q_4 ให้เป็นฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1 ได้
2. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_2, Q_3, Q_4 โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1 ได้

สาระสำคัญ

1. การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_2 ($\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$) โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1 ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) มีสูตรดังนี้

1. $\sin \theta = \sin (\pi - \theta)$

2. $\cos \theta = -\cos (\pi - \theta)$

2. การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_3 ($\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$) โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1 ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) มีสูตรดังนี้

1. $\sin \theta = -\sin (\theta - \pi)$

2. $\cos \theta = -\cos (\theta - \pi)$

3. การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_4 ($\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$) โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1 ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) มีสูตรดังนี้

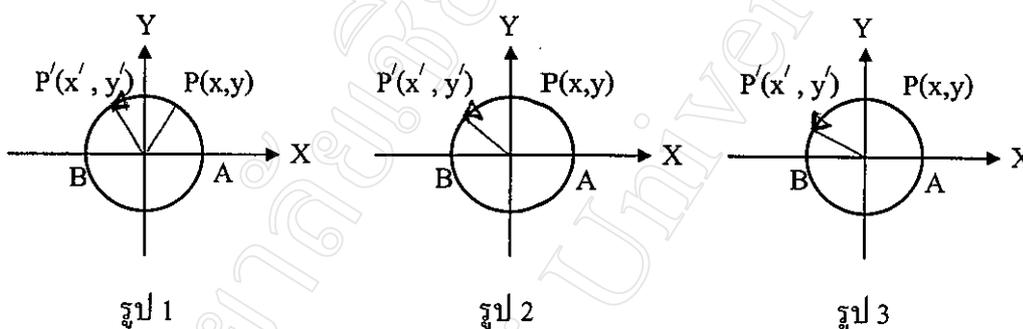
1. $\sin \theta = -\sin (2\pi - \theta)$

2. $\cos \theta = \cos (2\pi - \theta)$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ให้นักเรียนพิจารณา รูป 1, 2 และ 3 ซึ่งกำหนดจุด $P(x,y)$ สมมาตรกับจุด $P'(x',y')$ โดยมีแกน Y เป็นแกนสมมาตร และตอบคำถามที่ละคน



จากรูป 1 ถ้า AP' ยาว $\frac{2\pi}{3}$ หน่วย แล้ว $P'B$ ยาวกี่หน่วย	$[\frac{\pi}{3}]$
จากรูป 2 ถ้า AP' ยาว $\frac{3\pi}{4}$ หน่วย แล้ว $P'B$ ยาวกี่หน่วย	$[\frac{\pi}{4}]$
จากรูป 3 ถ้า AP' ยาว $\frac{5\pi}{6}$ หน่วย แล้ว $P'B$ ยาวกี่หน่วย	$[\frac{\pi}{6}]$

ขั้นสอน

- ให้นักเรียนดูรูป 1 ครูกำลังถึงข้อความที่โจทย์กำหนด และให้นักเรียนตอบคำถามที่ละคน
 - ให้ $P'(x',y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย
ดังนั้น $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เท่ากับเท่าไรตามลำดับ $[y', x']$
 - เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย ส่วนโค้ง $P'B$ จึงยาวกี่หน่วย $[\pi - \theta]$
 - เมื่อ $P(x,y)$ สมมาตรกับจุด $P'(x',y')$ ดังนั้น AP ยาวกี่หน่วย $[\pi - \theta]$
- ครูกำลังนำถึงการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_2 ($\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$) โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1 ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) และให้นักเรียนนำแถบข้อความติดบนกระดานดำ

2.1 $P'(x', y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ใน Q_2

2.2 $y' = \sin \theta$

$x' = \cos \theta$

2.3 $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $(\pi - \theta)$ หน่วย อยู่ใน Q_1

2.4 $y = \sin(\pi - \theta)$

$x = \cos(\pi - \theta)$

2.5 จุด $P(x, y)$ สมมาตรกับจุด $P'(x', y')$

2.6 $y' = y$

$x' = -x$

ให้นักเรียนช่วยกันกล่าวข้อสรุปและนำแถบข้อความติดบนกระดานดำ

$\sin \theta = \sin(\pi - \theta)$

$\cos \theta = -\cos(\pi - \theta)$

ครูยกตัวอย่างการหาค่าของ $\sin \frac{11\pi}{12}$ และ $\cos \frac{11\pi}{12}$

เมื่อกำหนด $\sin \frac{\pi}{12} = 0.26$ และ $\cos \frac{\pi}{12} = 0.96$

$$\left[\sin \frac{11\pi}{12} = \sin\left(\pi - \frac{11\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12} = 0.26 \right]$$

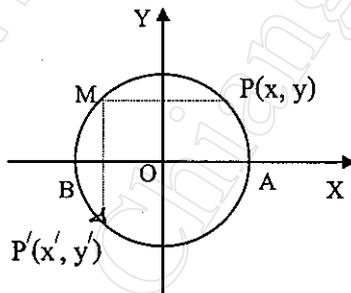
$$\left[\cos \frac{11\pi}{12} = -\cos\left(\pi - \frac{11\pi}{12}\right) = -\cos \frac{\pi}{12} = -0.96 \right]$$

ครูเขียน โจทย์บนกระดาน ให้ตัวแทนนักเรียนเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_2 ($\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$) โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1 ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} \sin \frac{2\pi}{3} &= \dots\dots\dots & [\sin (\pi - \frac{2\pi}{3}) &= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}] \\ \cos \frac{2\pi}{3} &= \dots\dots\dots & [-\cos (\pi - \frac{2\pi}{3}) &= -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}] \end{aligned}$$

3. ให้นักเรียนคิดรูป 2 บนกระดานสำคัญ ครูกล่าวนำถึงการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_3 ($\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$) โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1 ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) และให้นักเรียนตอบคำถามที่ละคน พร้อมนำแถบข้อความติดบนกระดานสำคัญ

$P'(x', y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ใน Q_3



$$y' = \sin \theta$$

$$y = \sin (\theta - \pi)$$

$$y' = -y$$

รูป 2

ให้นักเรียนช่วยกันกล่าวข้อสรุปและนำแถบข้อความติดบนกระดานดำ

$$\sin \theta = -\sin(\theta - \pi)$$

และ $x' = \cos \theta$

$$x = \cos(\theta - \pi)$$

$$x' = -x$$

ให้นักเรียนช่วยกันกล่าวข้อสรุปและนำแถบข้อความติดบนกระดานดำ

$$\cos \theta = -\cos(\theta - \pi)$$

ครูยกตัวอย่างการหาค่าของ $\sin \frac{13\pi}{12}$ และ $\cos \frac{13\pi}{12}$

เมื่อกำหนด $\sin \frac{\pi}{12} = 0.26$ และ $\cos \frac{\pi}{12} = 0.96$

$$\left[\sin \frac{13\pi}{12} = -\sin\left(\frac{13\pi}{12} - \pi\right) = -\sin \frac{\pi}{12} = -0.26 \right]$$

$$\left[\cos \frac{13\pi}{12} = -\cos\left(\frac{13\pi}{12} - \pi\right) = -\cos \frac{\pi}{12} = -0.96 \right]$$

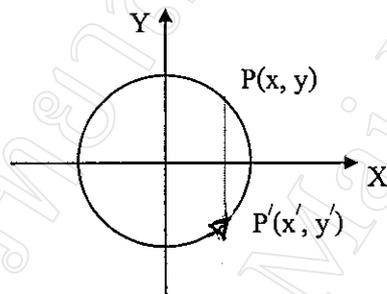
ครูเขียนโจทย์บนกระดาน ให้ตัวแทนนักเรียนเขียนวิธีหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_3 ($\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$) โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1 ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

$$\sin \frac{4\pi}{3} = \dots\dots\dots \left[-\sin\left(\frac{4\pi}{3} - \pi\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} = \dots\dots\dots \left[-\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \pi\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \right]$$

4. ให้นักเรียนคิดรูป 3 บนกระดาน ครูกล่าวนำถึงการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_4 ($\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$) โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1 ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) และให้นักเรียนตอบคำถามพร้อมนำแถบข้อความติดบนกระดานสำคัญ

$P'(x', y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ใน Q_4



รูป 3

$$y' = \sin \theta$$

$$y = \sin(2\pi - \theta)$$

$$y' = -y$$

ให้นักเรียนช่วยกันกล่าวข้อสรุปและนำแถบข้อความติดบนกระดานสำคัญ

$$\sin \theta = -\sin(2\pi - \theta)$$

และ $x' = \cos \theta$

$$x = \cos(2\pi - \theta)$$

$$x' = x$$

ให้นักเรียนช่วยกันกล่าวข้อสรุปและแถบข้อความติดบนกระดานสำคัญ

$$\cos \theta = \cos(2\pi - \theta)$$

ครูยกตัวอย่างการหาค่าของ $\sin \frac{23\pi}{12}$ และ $\cos \frac{23\pi}{12}$

$$\text{เมื่อกำหนด } \sin \frac{\pi}{12} = 0.26 \text{ และ } \cos \frac{\pi}{12} = 0.96$$

$$\left[\sin \frac{23\pi}{12} = -\sin \left(2\pi - \frac{\pi}{12} \right) = -\sin \frac{\pi}{12} = -0.26 \right]$$

$$\left[\cos \frac{23\pi}{12} = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{12} = 0.96 \right]$$

ครูเขียนโจทย์บนกระดาน ให้ตัวแทนนักเรียนเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_4 ($\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$) โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1 ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

$$\sin \frac{5\pi}{3} = \dots\dots\dots \left[-\sin \left(2\pi - \frac{5\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \dots\dots\dots \left[\cos \left(2\pi - \frac{5\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \right]$$

5. ครูกล่าวนำถึงการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่ไม่อยู่ในรูปของ π โดยใช้วิธีการเดียวกัน และให้นักเรียนตอบคำถาม และเขียนคำตอบบนกระดานทีละคน

“ π มีค่าประมาณเท่าไร” [3.1416]

“เมื่อ $\theta = 2$ หน่วย จุดปลายส่วนโค้งอยู่ในควอดรันต์ใด” [Q_2]

“จงเขียน $\sin 2$ และ $\cos 2$ ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1 ” [$\sin(\pi-2)$ และ $-\cos(\pi-2)$]

“จงเขียน $\sin(-6)$ ให้เป็นฟังก์ชันไซน์ของจำนวนจริงบวก” [$-\sin 6$]

“ความยาวส่วนโค้ง 6 หน่วย จะมีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ในควอดรันต์ใด” [Q_4]

“จงเขียน $\cos(-6)$ ให้เป็นฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงบวก” [$\cos 6$]

“จงเขียน $\cos 6$ ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1 ”

[$\cos(2\pi - 6)$]

ขั้นสรุป

ให้นักเรียนนำเสนอหน้าชั้นเรียนทีละ 2 คน โดยนำรูป 1, 2, 3 จับคู่กับแถบข้อความ

ขั้นให้งาน

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.2 ข

สื่อและอุปกรณ์

1. กระดานดำ
2. รูป 1-3
3. แถบข้อความ
4. หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค 012

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	
3. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด	

คาบที่ 8 คาบสอนซ่อมเสริม โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน
บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนซ่อมเสริม หน่วยที่ 2 เรื่อง

1. ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน
2. ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบให้เป็นฟังก์ชันและโคไซน์ของจำนวนจริงบวกที่เป็นจำนวนตรงข้ามกันได้
2. เมื่อกำหนดฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ ซึ่ง $\theta > 2\pi$ นักเรียนสามารถเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ โดยที่ θ อยู่ในรูป $2n\pi + \alpha$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$ และ $0 \leq \alpha < 2\pi$ ได้
3. นักเรียนสามารถหาค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนได้
4. นักเรียนสามารถเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_2, Q_3, Q_4 ให้เป็นฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1 ได้
5. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_2, Q_3, Q_4 โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1 ได้

สาระสำคัญ

1. $\sin(-\theta) = -\sin \theta$
2. $\cos(-\theta) = \cos \theta$
3. $\sin \theta = \sin(2n\pi + \alpha) = \sin \alpha$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$ และ $0 \leq \alpha < 2\pi$
4. $\cos \theta = \cos(2n\pi + \alpha) = \cos \alpha$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$ และ $0 \leq \alpha < 2\pi$
5. การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_2 ($\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$) โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1 ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) มีสูตรดังนี้
 1. $\sin \theta = \sin(\pi - \theta)$
 2. $\cos \theta = -\cos(\pi - \theta)$

6. การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_3 ($\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$) โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1 ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) มีสูตรดังนี้

$$1. \sin \theta = -\sin(\theta - \pi)$$

$$2. \cos \theta = -\cos(\theta - \pi)$$

7. การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_4 ($\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$) โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1 ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) มีสูตรดังนี้

$$1. \sin \theta = -\sin(2\pi - \theta)$$

$$2. \cos \theta = \cos(2\pi - \theta)$$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ครูแนะนำการใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนซ่อมเสริม ดังนี้

1. เมื่อนำจอปรากฏ กรุณาเติมรหัสประจำตัว ให้นักเรียนเติมรหัสแล้วกด ENTER
2. เมื่อนำจอปรากฏ ชื่อไฟล์ ให้นักเรียนเติมชื่อไฟล์ U2 แล้วกด ENTER
3. ให้นักเรียนศึกษาบทเรียนหน่วยที่ 2 เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง บางจำนวน โดยทำแบบทดสอบประจำหน่วยที่ 2 ครั้งที่ 1 จำนวน 8 ข้อ
4. เมื่อนักเรียนทำแบบทดสอบครบ 8 ข้อแล้ว นักเรียนจะทราบคะแนนในรอบต่อไปทันที ถ้านักเรียนได้คะแนนต่ำกว่า 4 คะแนน ให้นักเรียนอ่านคำแนะนำ และกดหมายเลข 1 เพื่อศึกษาบทเรียนสำหรับซ่อม และถ้านักเรียนได้คะแนนตั้งแต่ 4 คะแนนขึ้นไป ให้นักเรียนอ่านคำแนะนำ และกดหมายเลข 2 เพื่อศึกษาบทเรียนสำหรับเสริม
5. นักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบประจำหน่วยที่ 2 ครั้งที่ 2 จำนวน 8 ข้อ และจะทราบคะแนนในรอบต่อไปทันที

สื่อและอุปกรณ์

บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนซ่อมเสริม

การวัดผลและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สัมผัสจากการตั้งใจเรียน	
2. สัมผัสจากการร่วมกิจกรรม	
3. สัมผัสจากความซื่อสัตย์	
4. สัมผัสจากคะแนนในการทดสอบประจำหน่วย ครั้งที่ 1 และครั้งที่ 2	

แบบทดสอบหน่วยที่ 2 ครั้งที่ 1 (8 ข้อ)

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด ข้อละ 1 คำตอบ

1. ข้อใดถูกต้อง

1. $\sin(-\theta) = \sin \theta$ และ $\cos(-\theta) = \cos \theta$
2. $\sin(-\theta) = \sin \theta$ และ $\cos(-\theta) = -\cos \theta$
3. $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ และ $\cos(-\theta) = \cos \theta$
4. $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ และ $\cos(-\theta) = -\cos \theta$

2. ถ้าเขียน $\cos \frac{79\pi}{6}$ ให้อยู่ในรูป $\cos(2n\pi + \alpha)$, $n \in \mathbb{I}^+$ และ $0 \leq \alpha < 2\pi$ แล้วค่า n และ α

เท่ากับเท่าไรตามลำดับ

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 1. $12, \frac{\pi}{6}$ | 2. $12, \frac{7\pi}{6}$ |
| 3. $6, \frac{\pi}{6}$ | 4. $6, \frac{7\pi}{6}$ |

3. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. $\cos\left(-\frac{21\pi}{4}\right) = -\cos\left(2(2\pi) + \frac{5\pi}{4}\right)$
- ข. $\cos \frac{22\pi}{6} = \cos\left(2\pi + \frac{10\pi}{6}\right)$

ข้อใดถูกต้อง

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1. ข้อ ก ถูกข้อเดียว | 2. ข้อ ข ถูกข้อเดียว |
| 3. ข้อ ก และ ข ถูก | 4. ข้อ ก และ ข ผิด |

4. $\cos\left(-\frac{41\pi}{12}\right)$ เท่ากับข้อใด

- | | |
|--|---|
| 1. $-\cos\left(2\pi + \frac{17\pi}{12}\right)$ | 2. $-\cos\left(3\pi + \frac{5\pi}{12}\right)$ |
| 3. $\cos\left(2\pi + \frac{17\pi}{12}\right)$ | 4. $\cos\left(3\pi + \frac{17\pi}{12}\right)$ |

5. $\cos\left(\frac{-32\pi}{3}\right)$ เท่ากับข้อใด

- | | |
|--|---|
| 1. $-\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ | 2. $-\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right)$ |
| 3. $\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \pi\right)$ | 4. $\cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right)$ |

6. $\sin \frac{55\pi}{6}$ เท่ากับข้อใด

1. $-\sin \left(\frac{7\pi}{6} - \pi \right)$

3. $\sin \left(\pi - \frac{5\pi}{6} \right)$

7. $\sin 4$ เท่ากับข้อใด

1. $-\sin (4 - \pi)$

3. $\sin (4 - \pi)$

8. $\sin \frac{2\pi}{7} = 0.78$ แล้ว $\sin \frac{37\pi}{7}$ เท่ากับข้อใด

1. 0.22

3. -0.22

2. $-\sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right)$

4. $\sin \left(2\pi - \frac{11\pi}{6} \right)$

2. $-\sin (\pi - 4)$

4. $\sin (2\pi - 4)$

2. 0.78

4. -0.78

เฉลยคำตอบแบบทดสอบหน่วยที่ 2 ครั้งที่ 1

ข้อ 1. ตอบ 3

ข้อ 2. ตอบ 4

ข้อ 3. ตอบ 2

ข้อ 4. ตอบ 3

ข้อ 5. ตอบ 2

ข้อ 6. ตอบ 1

ข้อ 7. ตอบ 1

ข้อ 8. ตอบ 4

แบบทดสอบหน่วยที่ 2 ครั้งที่ 2 (8 ข้อ)

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด ข้อละ 1 คำตอบ

1. ข้อใดถูกต้อง

1. $\sin\left(-\frac{8\pi}{9}\right) = \sin\frac{8\pi}{9}$ และ $\cos\left(-\frac{8\pi}{9}\right) = \cos\frac{8\pi}{9}$

2. $\sin\left(-\frac{8\pi}{9}\right) = \sin\frac{8\pi}{9}$ และ $\cos\left(-\frac{8\pi}{9}\right) = -\cos\frac{8\pi}{9}$

3. $\sin\left(-\frac{8\pi}{9}\right) = -\sin\frac{8\pi}{9}$ และ $\cos\left(-\frac{8\pi}{9}\right) = \cos\frac{8\pi}{9}$

4. $\sin\left(-\frac{8\pi}{9}\right) = -\sin\frac{8\pi}{9}$ และ $\cos\left(-\frac{8\pi}{9}\right) = -\cos\frac{8\pi}{9}$

2. ถ้าเขียน $\sin\frac{71\pi}{3}$ ให้อยู่ในรูป $\sin(2n\pi + \alpha)$, $n \in \mathbb{I}^+$ และ $0 \leq \alpha < 2\pi$ แล้วค่า n และ α

เท่ากับเท่าไรตามลำดับ

1. 11, $\frac{2\pi}{3}$

2. 11, $\frac{5\pi}{3}$

3. 22, $\frac{5\pi}{3}$

4. 23, $\frac{2\pi}{3}$

3. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\cos\left(-\frac{21\pi}{4}\right) = -\cos\left(2(2\pi) + \frac{5\pi}{4}\right)$

ข. $\cos\frac{19\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6}$

ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อ ก ถูกข้อเดียว

2. ข้อ ข ถูกข้อเดียว

3. ข้อ ก และ ข ถูก

4. ข้อ ก และ ข ผิด

4. $\sin\left(-\frac{46\pi}{3}\right)$ เท่ากับข้อใด

1. $\sin\frac{4\pi}{3}$

2. $-\sin\frac{\pi}{3}$

3. $\sin\left(10\pi + \frac{16\pi}{3}\right)$

4. $-\sin\left(14\pi + \frac{4\pi}{3}\right)$

5. $\cos \frac{37\pi}{7}$ เท่ากับข้อใด

1. $\cos (2\pi - \frac{12\pi}{7})$

3. $-\cos (\frac{9\pi}{7} - \pi)$

6. $\sin \frac{78\pi}{5}$ เท่ากับข้อใด

1. $-\sin (\frac{8\pi}{5} - 2\pi)$

3. $\sin (2\pi - \frac{8\pi}{5})$

7. $\cos (-3)$ เท่ากับข้อใด

1. $-\cos (\pi - 3)$

3. $\cos (\pi - 3)$

8. $\cos \frac{\pi}{7} = 0.901$ แล้ว $\cos \frac{34\pi}{7}$ เท่ากับข้อใด

1. -0.901

3. 0.901

2. $\cos (\pi - \frac{5\pi}{7})$

4. $-\cos (\pi - \frac{2\pi}{7})$

2. $-\sin (\frac{8\pi}{5} - \pi)$

4. $\sin (\pi - \frac{3\pi}{5})$

2. $-\cos (3 - 2\pi)$

4. $\cos (3 - \pi)$

2. -0.099

4. 0.099

เฉลยคำตอบแบบทดสอบหน่วยที่ 2 ครั้งที่ 2

ข้อ 1. ตอบ 3

ข้อ 2. ตอบ 2

ข้อ 3. ตอบ 4

ข้อ 4. ตอบ 4

ข้อ 5. ตอบ 3

ข้อ 6. ตอบ 2

ข้อ 7. ตอบ 1

ข้อ 8. ตอบ 1

แผนการสอนหน่วยที่ 3 จำนวน 4 คาบ

คาบที่ 9

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ครบทั้งหกฟังก์ชัน

สาระสำคัญ

1. นิยามของฟังก์ชันแทนเจนต์ ซีแคนท์ โคซีแคนท์ โคแทนเจนต์

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใดๆ

$$\text{tangent } \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\text{secant } \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\text{cosecant } \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

$$\text{cotangent } \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

2. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งหกฟังก์ชัน ได้แก่ $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$, $\sec \theta$, $\csc \theta$, $\cot \theta$ เมื่อ $\theta = \frac{n\pi}{2}$, $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ และ $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนความรู้เรื่องพีชคณิตฟังก์ชัน โดยกำหนดตัวอย่างฟังก์ชันดังนี้

$$g = \{(\theta, y)/y = \sin \theta\} \quad \text{และ} \quad h = \{(\theta, y)/y = \cos \theta\}$$

ให้นักเรียนเขียนผลหารของฟังก์ชัน $\frac{g}{h}$ บนกระดาน และครูแนะนำการเรียกชื่อฟังก์ชัน

ผลหารว่า ฟังก์ชันแทนเจนต์

ขั้นสอน

1. ให้นักเรียนนำแถบข้อความชื่อฟังก์ชันตรีโกณมิติให้ตรงกับผลหารของฟังก์ชัน $\frac{g}{h}$

$$[\text{ฟังก์ชันแทนเจนต์ (tangent)} = \{(\theta, y)/y = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0 \}]$$

ครูแนะนำการเขียนถึงฟังก์ชันแทนเจนต์ และให้นักเรียนเติมคำตอบในช่องว่าง ดังนี้
เนื่องจาก $(\theta, y) \in \text{tangent}$ ดังนั้น $y = \dots\dots\dots[\text{tangent } \theta]$

การเขียน “tangent θ ” ย่อเป็น “tan θ ” อ่านว่า “แทนทีต้า”

2. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ เวลา 5 นาที

ใบความรู้

นิยาม

1. ฟังก์ชันซีแคนต์ที่ได้จากผลหารของฟังก์ชันคงที่ 1 และฟังก์ชันโคไซน์ จะได้ว่า

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ แต่ฟังก์ชันซีแคนต์จะหาค่าไม่ได้เมื่อฟังก์ชันโคไซน์เท่ากับ}$$

$$\text{ศูนย์ เขียนโดยย่อได้ว่า } \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

2. ฟังก์ชันโคซีแคนต์ที่ได้จากผลหารของฟังก์ชันคงที่ 1 และฟังก์ชันไซน์ จะได้ว่า

$$\text{cosecant } \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ แต่ฟังก์ชันโคซีแคนต์จะหาค่าไม่ได้เมื่อฟังก์ชันไซน์}$$

$$\text{เท่ากับศูนย์ เขียนโดยย่อได้ว่า } \text{cosec } \theta \text{ หรือ } \text{csc } \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

3. ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ที่ได้จากผลหารของฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันไซน์ จะได้ว่า

$$\text{cotangent } \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \text{ แต่ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ จะหาค่าไม่ได้เมื่อฟังก์ชันไซน์}$$

$$\text{เท่ากับศูนย์ เขียนโดยย่อได้ว่า } \text{cosec } \theta \text{ หรือ } \text{csc } \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

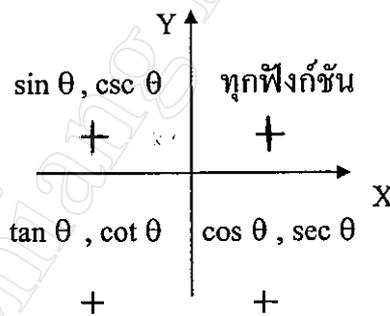
3. ครูทบทวนการเขียนแต่ละฟังก์ชันแบบย่อ โดยให้นักเรียนเขียนบนกระดานคนละ 1 ฟังก์ชัน ได้แก่ “secant θ ” ย่อเป็น “sec θ ”
 “cosecant θ ” ย่อเป็น “cosec θ หรือ csc θ ”
 “cotangent θ ” ย่อเป็น “cot θ ”

4. ครูซักถามประกอบอธิบายจากใบความรู้ ให้นักเรียนหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยเขียนคำตอบบนกระดานคนละ 1 คำตอบ $\sin \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{3}$, $\tan \frac{\pi}{3}$, $\cot \frac{\pi}{3}$, $\sec \frac{\pi}{3}$ และ $\csc \frac{\pi}{3}$ และให้นักเรียนแต่ละคนบอกวิธีหาคำตอบ

[$\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$ หาได้จากพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง สำหรับ $\tan \frac{\pi}{3}$, $\cot \frac{\pi}{3}$, $\sec \frac{\pi}{3}$ และ $\csc \frac{\pi}{3}$ หาได้จากการแทนค่า $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$ ในนิยาม]

5. ให้นักเรียนทำใบงาน 1 ในเวลา 10 นาที แล้วเปลี่ยนกับเพื่อนเพื่อตรวจคำตอบ โดยครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยบนกระดาน และจากตารางคำตอบในใบงาน

6. ครูแนะให้นักเรียนสังเกตค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของ θ ในควอดรันต์ต่าง ๆ จากตารางในใบงาน แล้วช่วยกันสรุป และเขียนรูปช่วยในการจำ ดังนี้



รูป 1

- เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ใน Q_1 ค่าของทุกฟังก์ชันเป็นจำนวนบวก
- เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ใน Q_2 ค่าของ $\sin \theta$, $\csc \theta$ เท่านั้น ที่เป็นจำนวนบวก ส่วนค่าของฟังก์ชันที่เหลือจะเป็นจำนวนลบ
- เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ใน Q_3 ค่าของ $\tan \theta$, $\cot \theta$ เท่านั้น ที่เป็นจำนวนบวก ส่วนค่าของฟังก์ชันที่เหลือจะเป็นจำนวนลบ

4. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยอยู่ใน Q_4 ค่าของ $\cos \theta$, $\sec \theta$ เท่านั้น ที่เป็นจำนวนบวก ส่วนค่าของฟังก์ชันที่เหลือจะเป็นจำนวนลบ

7. ครูเขียน โจทย์บนกระดาน

จงบอกผลคูณของสองฟังก์ชันต่อไปนี้ ว่าเป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบ

$$\left(\csc \frac{7\pi}{6} \right) \left(\tan \left(-\frac{5\pi}{3} \right) \right) \quad [\text{จำนวนลบ}]$$

ให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบ และครูแนะแนวทางในการคิด โดยการถามตอบ

วิธีทำ เนื่องจาก $\theta = \frac{7\pi}{6}$ จุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_3

นั่นคือ $\csc \frac{7\pi}{6}$ มีค่าเป็นจำนวนลบ

และเนื่องจาก $\theta = \left(-\frac{5\pi}{3} \right)$ จุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_1

นั่นคือ $\tan \left(-\frac{5\pi}{3} \right)$ มีค่าเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น ผลคูณของฟังก์ชันทั้งสองมีค่าเป็นจำนวนลบ

8. ครูทบทวนการเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบให้อยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวก โดยให้นักเรียนเขียนบนกระดาน

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

ให้นักเรียนช่วยกันตอบคำถาม โดยอาศัยบทนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ และให้ตัวแทนนักเรียนเขียนข้อสรุปเกี่ยวกับการเปลี่ยนฟังก์ชันของจำนวนลบให้เป็นฟังก์ชันของจำนวนบวก

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\cot(-\theta) = -\cot \theta$$

$$\csc(-\theta) = -\csc \theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec \theta$$

9. ให้นักเรียน 2 คนที่นั่งติดกัน ทำใบงาน 2 หรือใบงาน 3 คนละ 1 ใบ ใช้เวลา 5 นาที เสร็จแล้วแลกกันตรวจคำตอบ

ใบงาน 2

จงหาค่าของ $\cot\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

วิธีทำ

.....

.....

ใบงาน 3

จงหาค่าของ $\operatorname{cosec}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

วิธีทำ

.....

.....

10. ครุฑตามประกอบการอธิบายเฉลยใบงาน 2 และ ใบงาน 3 บนกระดาน

เฉลย ใบงาน 2

จงหาค่าของ $\cot\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

วิธีทำ $\cot\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -\cot\frac{11\pi}{6}$

เมื่อ $\theta = \frac{11\pi}{6}$ จุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_4

$\cot\frac{11\pi}{6}$ มีค่าเป็นลบ ดังนั้น $-\cot\frac{11\pi}{6}$ มีค่าเป็นบวก

$$-\cot\frac{11\pi}{6} = \sqrt{3}$$

เฉลย ใบงาน 3

จงหาค่าของ $\operatorname{cosec} \left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \operatorname{cosec} \left(-\frac{11\pi}{6}\right) &= -\operatorname{cosec} \frac{11\pi}{6} \\ &= -[-\operatorname{csc} \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)] \\ &= \operatorname{csc} \frac{\pi}{6} \\ &= 2 \end{aligned}$$

ขั้นให้งาน

- ให้นักเรียนทำโจทย์วัดผลในเวลา 10 นาที เมื่อเสร็จแล้วเปลี่ยนกับเพื่อนเพื่อตรวจคำตอบ โดยครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยบนกระดาน
- ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.3 หน้า 120 ข้อ 1-2

สื่อและอุปกรณ์

- แถบข้อความ
- ใบงาน 1, 2, 3
- โจทย์วัดผล
- หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค 012

ขั้นวัดผลและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	
3. สังเกตจากการทำใบงาน	
4. สังเกตจากคะแนนจากการทำโจทย์วัดผล	
5. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด	

ใบงาน 1

ชื่อ..... ชั้น ม.4/..... เลขที่.....

คำสั่ง เมื่อกำหนด เป็นความยาวส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วย จงเติมคำตอบในตาราง

θ	จุดปลายส่วนโค้ง อยู่ในควอรันต์ที่	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\csc \theta$	$\sec \theta$
$\frac{\pi}{4}$							
$\frac{3\pi}{4}$							
$\frac{5\pi}{4}$							
$\frac{7\pi}{4}$							

เฉลยคำตอบใบงาน

θ	จุดปลายส่วนโค้ง อยู่ในควอรันต์ที่	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\csc \theta$	$\sec \theta$
$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	3	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	4	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

โจทย์วัดผล

ชื่อ..... ชั้น ม.4/..... เลขที่.....

คำสั่ง จงเขียนคำตอบลงในช่องว่าง

1. จงบอกผลคูณของฟังก์ชันทั้งสองต่อไปนี้ ว่าเป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบ

$$\left(\cot \frac{5\pi}{6}\right) \left(\sin \left(\frac{-4\pi}{5}\right)\right) \dots\dots\dots$$

2. จงเปรียบเทียบค่าของ $\tan \left(\frac{-2\pi}{3}\right)$ และ $\sec \left(\frac{-2\pi}{3}\right)$

3. จงเรียงลำดับค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้ จากน้อยไปหามาก

$$\csc^2 \left(\frac{-5\pi}{3}\right), \sin^2 \left(\frac{-5\pi}{3}\right), \cos^2 \left(\frac{-5\pi}{3}\right) \dots\dots\dots$$

4. จงหาผลลัพธ์ของ $\cos \left(\frac{-5\pi}{4}\right) + \tan \frac{11\pi}{6}$

5. จงหาผลลัพธ์ของ $\sec \left(\frac{-7\pi}{4}\right) - \csc \left(\frac{-5\pi}{6}\right)$

เฉลยโจทย์วัดผล

1. จำนวนบวก

2. $\tan \left(\frac{-2\pi}{3}\right) > \sec \left(\frac{-2\pi}{3}\right)$

3. $\cos^2 \left(\frac{-5\pi}{3}\right), \sin^2 \left(\frac{-5\pi}{3}\right), \csc^2 \left(\frac{-5\pi}{3}\right)$

4. $\frac{-3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{6}$

5. $\sqrt{2} + 2$

คาบที่ 10

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ได้

สาระสำคัญ

ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ มีดังนี้

1. $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ เมื่อ $\sin \theta, \cos \theta \neq 0$
2. $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ เมื่อ $\cos \theta \neq 0$
3. $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$ เมื่อ $\sin \theta \neq 0$

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

1. ให้นักเรียนบอกนิยามของฟังก์ชันแทนเจนต์และโคแทนเจนต์
2. ให้นักเรียนบอกค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$ แล้วนำไปแทนค่าในนิยามของฟังก์ชันแทนเจนต์และโคแทนเจนต์เพื่อหาค่าของฟังก์ชัน

ขั้นสอน

1. ครูกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ เช่น $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ซึ่งเป็นส่วนกลับของ $\cot \frac{\pi}{3}$ ให้นักเรียนยกตัวอย่างค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์และโคแทนเจนต์ที่มีค่าเป็นส่วนกลับกันอีกสองสามตัวอย่าง
2. ให้นักเรียนบอกชื่อสรุปของฟังก์ชันแทนเจนต์และโคแทนเจนต์ โดยให้ตัวแทนนักเรียนเขียนชื่อสรุปบนกระดาน โดยครูเน้นเงื่อนไข $[\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ เมื่อ $\sin \theta, \cos \theta \neq 0]$

3. ให้นักเรียนบอกความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ [$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$] ครูกำหนดโจทย์บนกระดาน $\sin \theta = \frac{1}{3}$ ให้นักเรียนช่วยกันบอกขั้นตอนการหาค่าของ $\cos \theta$ เมื่อจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_2 โดยมีตัวแทนนักเรียนเขียนบนกระดาน

$$\text{เนื่องจาก } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\text{ถ้า } \sin \theta = \frac{1}{3}$$

$$\text{แล้ว } \cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} \quad \because \text{จุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน } Q_2$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{8}}{3}$$

4. ให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ 1 เวลา 5 นาที

ใบความรู้ 1

ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันแทนเจนต์และโคแทนเจนต์

$$1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

ให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย เสร็จแล้วเก็บใบความรู้ 1 คืน และให้นักเรียนช่วยกันบอกขั้นตอนการหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันแทนเจนต์และโคแทนเจนต์ โดยมีตัวแทนนักเรียนเขียนบนกระดานเพื่อให้ได้ข้อสรุปเหมือนในใบความรู้ 1

5. ครูเขียนโจทย์บนกระดาน $1 + \cot^2 \theta$ ให้นักเรียนกลุ่มละ 2 คน ช่วยกันคิดและเขียนใส่กระดาษอธิบายขั้นตอนการหาข้อสรุปของความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันโคแทนเจนต์และโคซีแคนท์ เมื่อทุกกลุ่มส่งงานแล้ว ครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยบนกระดาน ชมเชยกลุ่มที่ทำถูกต้อง และเสร็จก่อนเป็นอันดับแรก

$$[1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0]$$

6. ครูกำหนดโจทย์ ถ้า $\sec \theta = -2$ และ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ แล้ว $\tan \theta$ เท่ากับเท่าไร ให้นักเรียนกลุ่มละ 2 คน ช่วยกันคิดและเขียนขั้นตอนวิธีหาคำตอบใส่กระดาษส่งครู แล้วให้นักเรียนช่วยกันเฉลยบนกระดาน ชมเชยนักเรียนกลุ่มที่ทำถูกต้องและเสร็จก่อน

7. ครูกำหนดโจทย์ ถ้า $\sin \theta = 0.3$ และ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ให้นักเรียนแต่ละแถวช่วยกันหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของ θ แล้วให้ตัวแทนนักเรียนแต่ละแถวออกมาเขียนขั้นตอนวิธีหาคำตอบบนกระดานแถวละหนึ่งฟังก์ชัน ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจคำตอบ

ขั้นสรุป

ให้นักเรียนบอกข้อสรุปความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ แล้วเขียนติดไว้ที่บอร์ดช่วยความจำ 1 สัปดาห์

ขั้นให้งาน

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.3 หน้า 120 ข้อ 3-5

สื่อและอุปกรณ์

1. ใบความรู้ 1
2. หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค 012

ขั้นวัดผลและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	
3. สังเกตจากศึกษาใบความรู้	
4. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด	

คาบที่ 11

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เปลี่ยนขนาดของมุมในหน่วยองศาให้เป็นหน่วยเรเดียน และเปลี่ยนขนาดของมุมในหน่วยเรเดียนให้เป็นหน่วยองศา
2. บอกค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมบางมุมได้

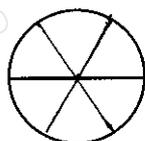
สาระสำคัญ

1. ความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมในหน่วยองศาและหน่วยเรเดียน
 $360 \text{ องศา} = 2\pi$
2. การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม เช่น $0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 90^\circ, \pm 180^\circ, \pm 270^\circ, \dots$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

1. ให้นักเรียนดูรูปวงกลม 1, 2 และ 3 และบอกขนาดของมุมแต่ละรูป

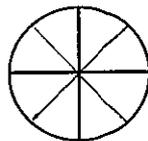


รูป 1

วงกลมแบ่งออกเป็น

หกส่วนเท่า ๆ กัน

แต่ละมุมมีขนาด.....องศา

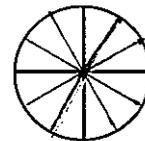
[60°]

รูป 2

วงกลมแบ่งออกเป็น

แปดส่วนเท่า ๆ กัน

แต่ละมุมมีขนาด.....องศา

[45°]

รูป 3

วงกลมแบ่งออกเป็น

สิบสองส่วนเท่า ๆ กัน

แต่ละมุมมีขนาด.....องศา

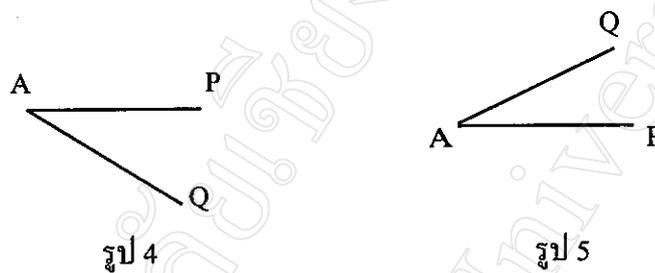
[30°]

ขั้นสอน

1. ให้นักเรียนศึกษาจากใบความรู้ 1 เวลา 5 นาที

ใบความรู้ 1

การเกิดมุม และการเรียกส่วนที่เกี่ยวข้องกับมุม



เรียกจุด A ว่าจุดยอด (vertex) ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AP ว่า ด้านเริ่มต้น (initial side) ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AQ ว่าด้านสิ้นสุด (terminal side) ของมุม

เมื่อนักเรียนศึกษาใบความรู้ 1 จบแล้ว ให้ตัวแทนนักเรียนหญิงเขียนรูป 4 บนกระดานให้นักเรียนชายช่วยกันบอกส่วนที่เกี่ยวข้องกับมุม และให้ตัวแทนนักเรียนชายเขียนรูป 5 ให้นักเรียนหญิงช่วยกันบอกส่วนที่เกี่ยวข้องกับมุม

2. ให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ 2 เวลา 5 นาที

ใบความรู้ 2

ความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมในหน่วยองศาและหน่วยเรเดียน

$$360 \text{ องศา} = 2\pi \text{ เรเดียน}$$

$$\text{หรือ } 180 \text{ องศา} = \pi \text{ เรเดียน}$$

$$\text{ดังนั้น } 1 \text{ องศา} = \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน} \approx 0.01745 \text{ เรเดียน}$$

$$\text{และ } 1 \text{ เรเดียน} = \frac{180}{\pi} \text{ องศา} \approx 57^{\circ} 18'$$

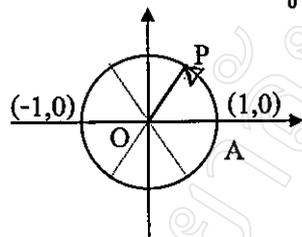
เมื่อนักเรียนศึกษาไปความรู้ 2 จบแล้ว ครูกำหนดโจทย์บนกระดาน

ก. จงเปลี่ยนขนาดของมุม 2 เรเดียน ให้เป็นหน่วยองศา

ข. จงเปลี่ยนขนาดของมุม 135 องศา ให้เป็นหน่วยเรเดียน

ให้ตัวแทนนักเรียนชายเขียนคำตอบข้อ ก. บนกระดาน [114 องศา 36 ลิปดา] และ
ตัวแทนนักเรียนหญิงเขียนคำตอบข้อ ข. บนกระดาน [$\frac{3\pi}{4}$ เรเดียน]

3. ให้นักเรียนดูรูป 6 และตอบคำถามที่ละคน



รูป 6

จากรูป วงกลมแบ่งออกเป็นหกส่วนเท่าๆกัน

AOP มีขนาดกี่องศา [60°]

ส่วนโค้ง AP ยาวกี่หน่วย [$\frac{\pi}{3}$ หน่วย]

จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุม AOP ตัดกับวงกลม

หนึ่งหน่วยและจุดปลายของส่วนโค้งของ

$\theta = \frac{\pi}{3}$ หน่วย เป็นจุดเดียวกันหรือไม่ [เป็น]

4. ให้นักเรียนเติมขนาดของมุมในตาราง

ส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ขนาดของมุม (องศา)							
ที่รองรับ
ด้วยส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย	[30°]	[45°]	[60°]	[90°]	[180°]	[270°]	[360°]

จากตาราง ให้นักเรียนบอกค่าของฟังก์ชันโคไซน์และไซน์ในตารางข้อ 4 คนละ 1 คำตอบ โดยแสดงการเปรียบเทียบจำนวนที่แสดงค่าของมุมจะเป็นจำนวนเดียวกับจำนวนจริงที่แทนความยาวของส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมนั้น

เช่น ค่าของ $\cos \frac{\pi}{3}$ และค่าของ $\cos 60^\circ$ เท่ากับ $\frac{1}{2}$ หรือ

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$ และค่าของ $\sin 60^\circ$ เท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ให้นักเรียนบอกข้อสรุปในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศา
[หาได้โดยเปลี่ยนค่าของมุมจากหน่วยองศาให้เป็นหน่วยเรเดียนก่อน แล้วจึงหาค่าของฟังก์ชันนั้น
เช่นเดียวกับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงทั่ว ๆ ไป เพราะจะช่วยให้การจำ]

5. ครูเขียนโจทย์บนกระดาน ค่าของ $\sin(-240^\circ)$ เท่ากับเท่าไร ให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบโดยเปลี่ยนหน่วยองศาให้เป็นหน่วยเรเดียนก่อน และให้ตัวแทนนักเรียนออกมาเขียนบนกระดาน

$$\begin{aligned}\sin(-240^\circ) &= -\sin 240^\circ \\ &= -\sin \frac{4\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

6. ครูเขียนขั้นตอนการหาผลลัพธ์ของ $\sin 150^\circ + \tan 315^\circ$ ที่ไม่ถูกต้องบนกระดานให้นักเรียนบอกที่ผิดทีละคน

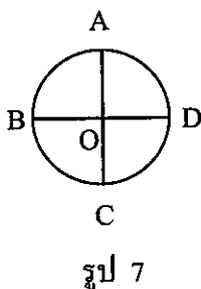
$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } \sin 150^\circ &= -\sin(180^\circ - 30^\circ) && \text{ [ที่ถูกต้องเป็น } \sin(180^\circ - 30^\circ) \text{]} \\ &= -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) && \text{ [ที่ถูกต้องเป็น } \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \text{]} \\ &= -\sin \frac{5\pi}{6} && \text{ [ที่ถูกต้องเป็น } \sin \frac{5\pi}{6} \text{]} \\ &= -\frac{1}{2} && \text{ [ที่ถูกต้องเป็น } \frac{1}{2} \text{]}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 315^\circ &= -\tan(360^\circ - 45^\circ) \\ &= -\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\tan \frac{\pi}{4} && \text{ [ที่ถูกต้องเป็น } \tan \frac{\pi}{4} \text{]} \\ &= -1 && \text{ [ที่ถูกต้องเป็น } 1 \text{]}\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \sin 150^\circ + \tan 315^\circ = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{[ที่ถูกต้องเป็น } \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \text{]}$$

ขั้นสรุป



รูป 7

1. จากรูป 7 ให้นักเรียนบอกขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นองศา และเทียบกับหน่วยเป็นเรเดียน เมื่อ OD เป็นด้านเริ่มต้นของมุม ซึ่งจุด A, B, C และ D เป็นจุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วย ตามลำดับ

$$[90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ เรเดียน}, 180^\circ = \pi \text{ เรเดียน},$$

$$270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ เรเดียน}, 360^\circ = 2\pi \text{ เรเดียน}]$$

2. จากคำตอบข้อ 1 ให้นักเรียนบอกค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

$$\text{เช่น } \sin 90^\circ = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \cos 90^\circ = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

ขั้นให้งาน

1. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.4 หน้า 129 ข้อ 1 - 5

สื่อและอุปกรณ์

1. ใบความรู้ 1-2
2. รูป 1-7
3. หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค 012

ขั้นวัดผลและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	
3. สังเกตจากการศึกษาใบความรู้	
4. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด	

คาบที่ 12

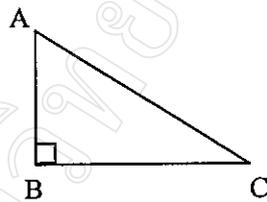
เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เมื่อกำหนดความยาวของด้านให้
2. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยอาศัยฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระสำคัญ

1. ความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีความสัมพันธ์กันเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมแหลมภายในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก กล่าวคือ จากรูป



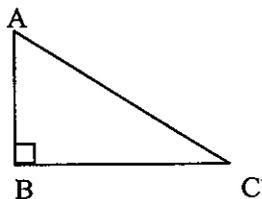
จะได้ $\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

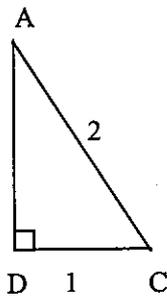
ให้นักเรียนดูรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC และบอกนิยามของ $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ 

$\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}$

ขั้นสอน



รูป 1

1. ให้นักเรียนดูรูป 1 แล้วตอบคำถามทีละคน

$AD^2 = \dots\dots\dots [AC^2 - CD^2]$

$AD^2 = \dots\dots\dots$ หน่วย $[\sqrt{3}]$

$\sin C = \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$\cos C = \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2}\right]$

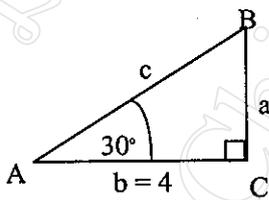
$\tan C = \dots\dots\dots [\sqrt{3}]$

$\sin A = \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2}\right]$

$\cos A = \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$\tan A = \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

2. ครูกล่าวนำถึงการหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยม โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ให้นักเรียนอ่าน โจทย์ และให้ตัวแทนนักเรียนเขียนรูปบนกระดาน โจทย์ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก AC ยาว 4 หน่วย และมุม A มีขนาด 30°



จากรูป ให้นักเรียนตอบทีละคน

จงเขียน $\tan A$ ด้วยอัตราส่วนความยาวของด้าน

$\left[\frac{a}{b}\right]$

ให้นักเรียนแทนค่ามุม A ด้วย 30°

และแทนความยาวด้าน b เท่ากับ 4 หน่วย

$[\tan 30^\circ = \frac{a}{4}]$

ให้นักเรียนแทนค่า $\tan 30^\circ$ แล้วหาค่า a

$\left[a = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ จะได้ } a \approx 2.309\right]$

จงเขียน $\cos A$ ด้วยอัตราส่วนความยาวของด้าน

$\left[\frac{b}{c}\right]$

ให้นักเรียนแทนค่ามุม A ด้วย 30° และความยาวด้าน b เท่ากับ 4 หน่วย

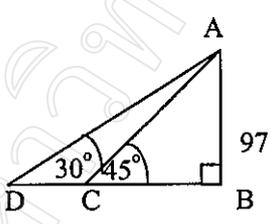
$[\cos 30^\circ = \frac{4}{c}]$

ให้นักเรียนแทนค่า $\cos 30^\circ$ แล้วหาค่า c [$c = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ จะได้ $c \approx 4.618$]

3. ให้นักเรียนกลุ่มละ 2 คน ช่วยกันคิดและเขียนขั้นตอนวิธีทำในใบงาน 1 เวลา 5 นาที

ใบงาน 1

โจทย์ ชายสองคนยืนอยู่ห่างจากตึกหลังหนึ่ง ซึ่งสูง 97 ฟุต ทั้งสองวัดมุมเงยของตึกได้ 30° และ 45° ตามลำดับ ชายสองคนนี้อยู่ห่างกันประมาณกี่ฟุต
ให้นักเรียนเขียนรูป และวิธีทำหาคำตอบ



วิธีทำ $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD}$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{97}{97 + CD}$$

$$CD \approx 71$$

ชายสองคนอยู่ห่างกันประมาณ 71 ฟุต

4. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเปลี่ยนใบงาน 1 กับกลุ่มอื่น เพื่อตรวจคำตอบจากแผ่นป้ายเฉลย ชมเชยนักเรียนที่ทำถูกต้องและเสร็จก่อน และให้อธิบายบนกระดาน

ขั้นให้งาน

1. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.4 หน้า 129 ข้อ 6 - 11

สื่อและอุปกรณ์

1. ใบงาน 1
2. หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค 012

ชั้นวัดผลและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม 3. สังเกตจากการทำใบงาน 4. สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด	

คาบที่ 13 คาบสอนซ่อมเสริม โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน
บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนซ่อมเสริม หน่วยที่ 3 เรื่อง

1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ
2. ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ
3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมบางมุม
4. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ครบทั้งหกฟังก์ชัน
2. บอกความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ได้
3. เปลี่ยนขนาดของมุมในหน่วยองศาให้เป็นหน่วยเรเดียน และเปลี่ยนขนาดของมุมในหน่วยเรเดียนให้เป็นหน่วยองศาได้
4. บอกค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมบางมุมได้
5. บอกค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เมื่อกำหนดความยาวของด้านให้ได้
6. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยอาศัยฟังก์ชันตรีโกณมิติได้

สาระสำคัญ

1. นิยามของฟังก์ชันแทนเจนต์ ซีแคนท์ โคซีแคนท์ โคแทนเจนต์

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใดๆ

$$\text{tangent } \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\text{secant } \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\text{cosecant } \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

$$\text{cotangent } \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

2. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งหกฟังก์ชัน ได้แก่ $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$, $\sec \theta$, $\csc \theta$, $\cot \theta$

เมื่อ $\theta = \frac{n\pi}{2}, n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ และ $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม

3. ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ

$$1. \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta, \cos \theta \neq 0$$

$$2. 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$3. 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

4. ความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมในหน่วยองศาและหน่วยเรเดียน

$$360 \text{ องศา} = 2\pi$$

5. การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม เช่น $0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 90^\circ, \pm 180^\circ, \pm 270^\circ, \dots$

6. การหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยอาศัยฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ครูแนะนำการใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนซ่อมเสริม ดังนี้

1. เมื่อหน้าจอปรากฏ กรุณาเติมรหัสประจำตัว ให้นักเรียนเติมรหัสแล้วกด ENTER

2. เมื่อหน้าจอปรากฏ ชื่อไฟล์ ให้นักเรียนเติมชื่อไฟล์ U3 แล้วกด ENTER

3. ให้นักเรียนศึกษาบทเรียนหน่วยที่ 3 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ และฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม โดยทำแบบทดสอบประจำหน่วยที่ 3 ครั้งที่ 1 จำนวน 10 ข้อ

4. เมื่อนักเรียนทำแบบทดสอบครบ 10 ข้อแล้ว นักเรียนจะทราบคะแนนในรอบต่อไปทันที ถ้านักเรียนได้คะแนนต่ำกว่า 5 คะแนน ให้นักเรียนอ่านคำแนะนำ และกดหมายเลข 1 เพื่อศึกษาบทเรียนสำหรับซ่อม และถ้านักเรียนได้คะแนนตั้งแต่ 5 คะแนนขึ้นไป ให้นักเรียนอ่านคำแนะนำ และกดหมายเลข 2 เพื่อศึกษาบทเรียนสำหรับเสริม

5. นักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบประจำหน่วยที่ 3 ครั้งที่ 2 จำนวน 10 ข้อ และจะทราบคะแนนในรอบต่อไปทันที

สื่อและอุปกรณ์

บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนซ่อมเสริม

การวัดผลและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สัมผัสจากการตั้งใจเรียน	
2. สัมผัสจากการร่วมกิจกรรม	
3. สัมผัสจากความซื่อสัตย์	
4. สัมผัสจากคะแนนในการทดสอบประจำหน่วย ครั้งที่ 1 และครั้งที่ 2	

แบบทดสอบหน่วยที่ 3 ครั้งที่ 1 (10 ข้อ)

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด ข้อละ 1 คำตอบ

1. $\sec(-7\pi)$ เท่ากับข้อใด

1. $\frac{1}{\sin 7\pi}$

2. $-\frac{1}{\sin 7\pi}$

3. $\frac{1}{\cos 7\pi}$

4. $-\frac{1}{\cos 7\pi}$

2. $\csc\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

1. 2

2. -2

3. $\frac{1}{2}$

4. $-\frac{1}{2}$

3. ถ้า $\tan \theta = -\sqrt{5}$ และ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ แล้ว $\sec \theta$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

1. $\sqrt{6}$

2. $-\sqrt{6}$

3. $\sqrt{26}$

4. $-\sqrt{26}$

4. ถ้า $\sin \theta = \frac{2}{3}$ และ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $2 \csc \theta \cos \theta$ เท่ากับเท่าไร

1. 3

2. 5

3. $\sqrt{3}$

4. $\sqrt{5}$

5. ถ้า $\sin \theta = -\frac{5}{13}$ และ $\cos \theta > 0$ แล้ว $\cot \theta + \csc \theta$ เท่ากับเท่าไร

1. -5

2. 5

3. $-\frac{12}{5}$

4. $\frac{12}{5}$

6. เปลี่ยนขนาดของมุม 270° ให้เป็นหน่วยเรเดียน ได้ตรงกับข้อใด

1. $\frac{3\pi}{2}$ เรเดียน

2. $\frac{3\pi}{4}$ เรเดียน

3. $\frac{4\pi}{5}$ เรเดียน

4. $\frac{5\pi}{6}$ เรเดียน

7. $\cot(-300^\circ)$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

1. $-\sqrt{3}$

2. $\sqrt{3}$

3. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. $\cos(-120^\circ) - \tan^2 315^\circ$ ผลลัพธ์เป็นเท่าไร

1. $\frac{1}{2}$

2. $-\frac{1}{2}$

3. $\frac{3}{2}$

4. $-\frac{3}{2}$

9. ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มุม A มีขนาด 30° มุม B เป็นมุมฉาก และ AC ยาว 6 หน่วย แล้วความยาว BC เท่ากับเท่าไร

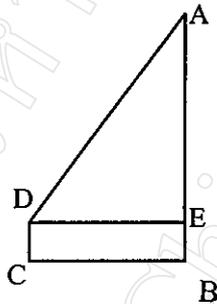
1. 3 หน่วย

2. 6 หน่วย

3. 39 หน่วย

4. 12 หน่วย

10. จากรูป CD ยาว 6 หน่วย BC ยาว 12 หน่วย และ $\angle ADE = 60^\circ$ ความยาวของ AB เท่ากับข้อใด



1. $6\sqrt{3} + 6$ หน่วย

2. $12\sqrt{3}$ หน่วย

3. $12\sqrt{3} + 6$ หน่วย

4. 36 หน่วย

เฉลยคำตอบแบบทดสอบหน่วยที่ 3 ครั้งที่ 1

ข้อ 1. ตอบ 3

ข้อ 2. ตอบ 2

ข้อ 3. ตอบ 2

ข้อ 4. ตอบ 4

ข้อ 5. ตอบ 1

ข้อ 6. ตอบ 1

ข้อ 7. ตอบ 4

ข้อ 8. ตอบ 4

ข้อ 9. ตอบ 1

ข้อ 10. ตอบ 3

แบบทดสอบหน่วยที่ 3 ครั้งที่ 2 (10 ข้อ)

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด ข้อละ 1 คำตอบ

1. จงพิจารณาประโยคต่อไปนี้

ก. $\cot\left(-\frac{13\pi}{9}\right) > \sec\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$

ข. $\csc\frac{3\pi}{8} > \tan\frac{4\pi}{7}$

ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อ ก ถูกข้อเดียว

2. ข้อ ข ถูกข้อเดียว

3. ข้อ ก และ ข ถูก

4. ข้อ ก และ ข ผิด

2. ค่าของ $\tan\frac{7\pi}{6}$ และ $\sec\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ ตามลำดับ คือข้อใด

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2. $\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$

3. ถ้า $\csc\theta = -\sqrt{1.8}$ และจุดปลายส่วนโค้งอยู่ใน Q_3 แล้ว $\cot\theta$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

1. 0.8

2. -0.8

3. $\sqrt{0.8}$ 4. $-\sqrt{0.8}$ 4. ถ้า $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ และ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ แล้ว $\sec\theta + 2\tan\theta$ เท่ากับเท่าไร

1. 1

2. $-\frac{13}{3}$

3. 3

4. -3

5. ถ้า $\sec\theta = -\sqrt{7}$ และ $\csc\theta < 0$ แล้วค่าของ $\sin\theta$ และ $\tan\theta$ ตามลำดับ คือข้อใด

1. $-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{42}}{7}$

2. $-\sqrt{6}, \frac{\sqrt{42}}{7}$

3. $-\frac{\sqrt{42}}{7}, -\sqrt{6}$

4. $-\frac{\sqrt{42}}{7}, \sqrt{6}$

6. เปลี่ยนขนาดของมุม $\frac{5\pi}{12}$ ให้เป็นหน่วยองศา ได้ตรงกับข้อใด

- | | |
|----------------|----------------|
| 1. 150° | 2. 100° |
| 3. 75° | 4. 50° |

7. $\csc(-315^\circ)$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1. $\sqrt{2}$ | 2. $-\sqrt{2}$ |
| 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 4. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

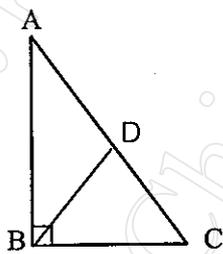
8. $\sin^2(-150^\circ) (-2 \cot^2(-210^\circ))$ ผลลัพธ์เป็นเท่าไร

- | | |
|------------------|-------------------|
| 1. $\frac{1}{2}$ | 2. 2 |
| 3. -6 | 4. $-\frac{3}{2}$ |

9. ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มุม A เป็นมุมฉาก มุม B มีขนาด 60° และ AB ยาว 3 หน่วย แล้วความยาว AC ตรงกับข้อใด

- | | |
|--------------------------|------------------|
| 1. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | 2. $\frac{3}{2}$ |
| 3. $3\sqrt{3}$ | 4. $\sqrt{3}$ |

10. จากรูป AB ยาว 8 หน่วย BC ยาว 6 หน่วย แล้วความยาวของ CD ตรงกับข้อใด



- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1. $\frac{5}{18}$ | 2. $\frac{18}{5}$ |
| 3. $\frac{5}{32}$ | 4. $\frac{32}{5}$ |

เฉลยคำตอบแบบทดสอบหน่วยที่ 3 ครั้งที่ 2

ข้อ 1. ตอบ 2

ข้อ 2. ตอบ 1

ข้อ 3. ตอบ 3

ข้อ 4. ตอบ 2

ข้อ 5. ตอบ 4

ข้อ 6. ตอบ 3

ข้อ 7. ตอบ 1

ข้อ 8. ตอบ 4

ข้อ 9. ตอบ 3

ข้อ 10. ตอบ 2

ภาคผนวก ค

ตารางการวิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้

เนื้อหา	จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับการเรียนรู้				รวม	ร้อยละ
		ความรู้ ความจำ	ความ เข้าใจ	การนำ ไปใช้	การ วิเคราะห์		
1. วงกลม หนึ่งหน่วย	นักเรียนสามารถ 1. บอกความยาวส่วนโค้งของ วงกลมหนึ่งหน่วยได้		2 (1-2)			2	8%
2. ฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์	2. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ได้ เมื่อ $\theta = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \pi$		1 (3)			1	4%
	3. หาค่าของจำนวนจริง θ บาง จำนวนได้ เมื่อกำหนดค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เป็นจำนวน จริง $0, \pm 1$		1 (4)			1	4%
3. ค่าของ ฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์	4. บอกพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง ที่ยาว θ หน่วยได้ (เมื่อ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ หรือ $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ หรือ $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ โดยที่ n เป็น จำนวนเต็ม	1 (5)				1	4%
	5. หาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ได้ เมื่อ $\theta = 0, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{\pi}{6}$	1 (6)	1 (7)	1 (8)		3	12%
	6. หาค่าของจำนวนจริง θ บาง จำนวนได้ เมื่อกำหนดค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เป็นจำนวน จริง $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$		1 (9)			1	4%

เนื้อหา	จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับการเรียนรู้				รวม	ร้อยละ
		ความรู้ ความจำ	ความ เข้าใจ	การนำ ไปใช้	การ วิเคราะห์		
4. ฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ อื่น ๆ	นักเรียนสามารถ 7. เขียน ฟังก์ชัน ไซน์และโคไซน์ ของ θ ซึ่ง θ อยู่ในรูป $2n\pi + \alpha$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$ และ $0 \leq \alpha < 2\pi$ ได้		1 (10)	1 (11)		2	8%
	8. เขียนฟังก์ชัน ไซน์และโคไซน์ ของจำนวนจริงที่กำหนดให้ ให้ อยู่ในรูปของฟังก์ชัน ไซน์และ โคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ หรือเป็นจำนวนจริงที่ไม่ อยู่ในรูปของ π ได้		1 (12)	2 (13-14)		3	12%
	9. หาค่าฟังก์ชัน ไซน์และโคไซน์ ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π โดยอาศัยค่าของฟังก์ชัน ไซน์ และโคไซน์ของจำนวนตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ ได้				1 (15)	1	14%
	10. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของจำนวนจริงบางจำนวนได้ ครบทั้ง 6 ฟังก์ชัน		1 (16)	1 (17)		2	8%
	11. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่าง ฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ		1 (18)	1 (19)		2	8%

เนื้อหา	จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับการเรียนรู้				รวม	ร้อยละ
		ความรู้ ความจำ	ความ เข้าใจ	การนำ ไปใช้	การ วิเคราะห์		
5. ฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ ของมุม	นักเรียนสามารถ 12. เปลี่ยนขนาดของมุมในหน่วย องศาให้เป็นหน่วยเรเดียนและ เปลี่ยนขนาดของมุมในหน่วย เรเดียนให้เป็นหน่วยองศา	1 (26)	1 (21)			2	8%
	13. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของมุมบางมุม เช่น $0^\circ, 30^\circ,$ $45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ ฯลฯ ได้		1 (22)	1 (25)		2	8%
	14. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของมุมของรูปสามเหลี่ยม มุมฉากได้ เมื่อกำหนดความ ยาวของด้านให้				1 (24)	1	4%
	15. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับรูป สามเหลี่ยมมุมฉาก โดยอาศัย ฟังก์ชันตรีโกณมิติได้			1 (25)		1	100%
	จำนวนข้อรวม	3	12	9	1	25	
	ร้อยละ	12%	48%	36%	4%		100%

ภาคผนวก ง

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

คำชี้แจงในการทำแบบทดสอบ

1. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบแบบปรนัยชนิดตัวเลือก 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ เวลา 50 นาที คะแนนเต็ม 20 คะแนน
2. ห้ามขีดเขียนใดๆ ในแบบทดสอบนี้
3. ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องข้อละ 1 คำตอบ แล้วเขียนเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในช่องที่ตรงกับตัวอักษรที่เลือก โดยทำในกระดาษคำตอบที่แจกให้

ตัวอย่าง ข้อ 100. เมื่อความยาวส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยเท่ากับ π หน่วย จุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วย คือข้อใด

ก. (1,0) ข. (0,1) ค. (-1,0) ง. (0,-1)

ถ้าต้องการเลือกคำตอบข้อ ก ให้ทำดังนี้

ข้อ	ก	ข	ค	ง
100	X			

ถ้าต้องการเปลี่ยนคำตอบจากข้อ ก. เป็นข้อ ค. ให้ทำดังนี้

ข้อ	ก	ข	ค	ง
100	X		X	

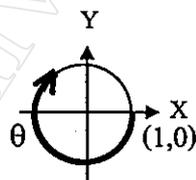
แบบทดสอบ เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. วัดความยาวส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาสามสิบรอบครึ่ง ความยาวส่วนโค้งยาวเท่ากับจำนวนในข้อใด

ก. 16π หน่วย
ข. $30\frac{1}{2}\pi$ หน่วย
ค. $60\frac{1}{2}\pi$ หน่วย
ง. 61π หน่วย

2. จากรูป ความยาวส่วนโค้งยาวประมาณเท่าใด

ก. -2.7
ข. -4.8
ค. 2.7
ง. 4.8



3. จงพิจารณาประโยคต่อไปนี้

1. $\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right) + \cos 0 = 1$

2. $\sin(-\pi) - \cos\frac{5\pi}{2} = 0$

3. $\sin 2\pi (\cos(-3\pi)) = 0$

ข้อใดถูกต้อง

ก. ผิดทั้งสามข้อ
ข. ถูกทั้งสามข้อ
ค. ถูกเพียงสองข้อ
ง. ถูกเพียงข้อเดียว

4. ถ้า $\sin \theta = -1$ และ $-4\pi \leq \theta < 0$ แล้ว θ คือจำนวนในข้อใด

ก. $-\frac{\pi}{2}$
ข. $-\frac{3\pi}{2}$
ค. $-\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}$
ง. $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}$

5. ค่า θ ในข้อใดที่มีจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ก. $-\frac{20\pi}{3}$
ข. $-\frac{49\pi}{3}$
ค. $-\frac{34\pi}{6}$
ง. $-\frac{56\pi}{6}$

6. $\sin \frac{35\pi}{3}$ มีค่าเท่ากับจำนวนในข้อใด

ก. $-\frac{1}{2}$

ค. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ข. $\frac{1}{2}$

ง. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. $\cos\left(-\frac{41\pi}{6}\right)$ มีค่าสอดคล้องกับข้อใด

ก. มีค่าเท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ค. มีค่าน้อยกว่า $\sin\left(-\frac{41\pi}{6}\right)$

ข. มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$

ง. มีค่ามากกว่า $\sin\left(-\frac{41\pi}{6}\right)$

8. ผลลัพธ์ของ $\left(\cos \frac{3\pi}{4}\right)^2 - \left[\sin \frac{11\pi}{3} \sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)\right]$ เท่ากับข้อใด

ก. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

ค. $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

ข. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

ง. $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

9. ถ้า $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$ แล้ว θ มีค่าเท่ากับจำนวนในข้อใด

ก. $\frac{\pi}{3}$

ค. $\frac{2\pi}{3}$

ข. $\frac{\pi}{6}$

ง. $\frac{5\pi}{6}$

10. จงพิจารณาประโยคต่อไปนี้

1. $\cos \frac{14\pi}{3} = \cos\left(4\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3}$

2. $\sin \frac{21\pi}{6} = \sin\left(3\pi + \frac{3\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{2}$

ข้อใดถูกต้อง

ก. ข้อ 1 ถูกข้อเดียว

ค. ถูกทั้งข้อ 1 และ 2

ข. ข้อ 2 ถูกข้อเดียว

ง. ผิดทั้งข้อ 1 และ 2

11. ถ้าเขียน $\cos \frac{79\pi}{6}$ ให้อยู่ในรูป $\cos(2n\pi + \alpha)$, $n \in \mathbb{I}^+$ และ $0 \leq \alpha < 2\pi$ แล้ว n และ α เท่ากับเท่าไรตามลำดับ

ก. $6, \frac{\pi}{6}$

ข. $12, \frac{\pi}{6}$

ก. $6, \frac{7\pi}{6}$

ข. $12, \frac{7\pi}{6}$

12. $\cos(-\frac{5\pi}{4})$ เท่ากับข้อใด

ก. $\cos(\pi - \frac{5\pi}{4})$

ข. $-\cos(\frac{5\pi}{4} - \pi)$

ก. $\cos(\frac{5\pi}{4} - \pi)$

ข. ถูกทุกข้อ

13. จงพิจารณาประโยคต่อไปนี้

1. $\sin \frac{82\pi}{3} = \sin(\frac{4\pi}{3} - \pi)$

ข้อใดถูกต้อง

ก. ข้อ 1 ถูกข้อเดียว

ข. ถูกทั้งข้อ 1 และ 2

2. $\cos \frac{107\pi}{6} = \cos(2\pi - \frac{11\pi}{6})$

ก. ข้อ 2 ถูกข้อเดียว

ข. ผิดทั้งข้อ 1 และ 2

14. ข้อใดผิด

ก. $\cos 2 = -\cos(\pi - 2)$

ข. $\sin 3 = \sin(\pi - 3)$

ก. $\cos 4 = -\cos(4 - \pi)$

ข. $\sin 4 = \sin(4 - \pi)$

15. ถ้า $\sin \frac{2\pi}{7} = 0.78$ แล้ว $\sin \frac{37\pi}{7}$ เท่ากับข้อใด

ก. -0.78

ข. 0.78

ก. -0.22

ข. หาค่าไม่ได้

16. ผลลัพธ์ของ $\csc^2 \frac{\pi}{2} - 3 \tan \left(-\frac{21\pi}{4}\right)$ เท่ากับข้อใด

ก. 0

ข. 2

ค. -2

ง. 4

17. ค่าของ $\sec\left(-\frac{62\pi}{3}\right)$ เท่ากับข้อใด

ก. $-\sec\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right)$

ข. $-\sec \frac{2\pi}{3}$

ค. $\sec\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right)$

ง. $\sec \frac{\pi}{3}$

18. ถ้า $\sin \theta = \frac{1}{3}$ และ $\sec \theta < 0$ แล้ว $\tan \theta$ เท่ากับข้อใด

ก. $-\frac{2\sqrt{3}}{8}$

ข. $\frac{2\sqrt{3}}{8}$

ค. $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$

ง. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

19. ถ้า $\csc \theta = \frac{5}{2}$ และ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้วค่าของ $\sec^2 \theta + 5 \sin \theta$ เท่ากับข้อใด

ก. 2

ข. 3

ค. $\frac{46}{21}$

ง. $\frac{67}{21}$

20. จงเปลี่ยน $\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right)$ เรเดียน ให้มีหน่วยเป็นองศา

ก. 105 องศา

ข. 120 องศา

ค. 135 องศา

ง. 150 องศา

21. $\cot(-580^\circ)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $-\cot \frac{9\pi}{11}$

ข. $-\cot \frac{11\pi}{9}$

ค. $\cot \frac{9\pi}{11}$

ง. $\cot \frac{11\pi}{9}$

เฉลยแบบทดสอบ

- | | |
|-------|-------|
| 1) ง | 13) ข |
| 2) ข | 14) ง |
| 3) ค | 15) ก |
| 4) ค | 16) ง |
| 5) ง | 17) ก |
| 6) ค | 18) ก |
| 7) ค | 19) ง |
| 8) ค | 20) ข |
| 9) ค | 21) ข |
| 10) ก | 22) ก |
| 11) ข | 23) ง |
| 12) ค | 24) ง |
| | 25) ข |

ภาคผนวก จ

ตารางการวิเคราะห์หาค่าความเที่ยงของข้อสอบ

ตารางการวิเคราะห์หาค่าความเที่ยงของแบบทดสอบแบบอิงกลุ่ม

ข้อที่	ตอบถูก	ตอบผิด	p_i	q_i	$p_i q_i$
1	26	14	0.65	0.35	0.23
2	13	27	0.33	0.68	0.22
3	21	19	0.53	0.48	0.25
4	20	20	0.50	0.50	0.25
5	13	27	0.33	0.68	0.22
6	24	16	0.60	0.40	0.24
7	14	26	0.35	0.65	0.23
8	14	26	0.35	0.65	0.23
9	22	18	0.55	0.45	0.25
10	21	19	0.53	0.48	0.25
11	24	16	0.60	0.40	0.24
12	19	21	0.48	0.53	0.25
13	9	31	0.23	0.78	0.17
14	15	25	0.38	0.63	0.23
15	17	23	0.43	0.58	0.24
16	15	25	0.38	0.63	0.23
17	13	27	0.33	0.68	0.22
18	14	26	0.35	0.65	0.23
19	11	29	0.28	0.73	0.20
20	32	8	0.80	0.20	0.16
21	11	29	0.28	0.73	0.20

ตารางการวิเคราะห์หาค่าความเที่ยงของแบบทดสอบแบบอิงกลุ่ม (ต่อ)

ข้อที่	ตอบถูก	ตอบผิด	p_i	q_i	$p_i q_i$
22	17	23	0.43	0.58	0.24
23	26	14	0.65	0.35	0.23
24	15	25	0.38	0.63	0.23
25	24	16	0.60	0.40	0.24
r_{tt}	=	0.7491			
r_{cc}	=	0.7663			

ตารางการวิเคราะห์หาค่าความเที่ยงของแบบทดสอบแบบอิงเกณฑ์

คนที่	x	x^2	x-c	$(x-c)^2$
1	5	25.00	-7.50	56.25
2	12	144.00	-0.50	0.25
3	15	225.00	2.50	6.25
4	6	36.00	-6.50	42.25
5	9	81.00	-3.50	12.25
6	11	121.00	-1.50	2.25
7	5	25.00	-7.50	56.25
8	16	256.00	3.50	12.25
9	20	400.00	7.50	56.25
10	9	81.00	-3.50	12.25
11	13	169.00	0.50	0.25
12	14	196.00	1.50	2.25
13	11	121.00	-1.50	2.25
14	10	100.00	-2.50	6.25
15	15	225.00	2.50	6.25
16	7	49.00	-5.50	30.25
17	11	121.00	-1.50	2.25
18	8	64.00	-4.50	20.25
19	17	289.00	4.50	20.25
20	6	36.00	-6.50	42.25
21	17	289.00	4.50	20.25
22	5	25.00	-7.50	56.25
23	6	36.00	-6.50	42.25
24	8	64.00	-4.50	20.25
25	13	169.00	0.50	0.25

ตารางการวิเคราะห์หาค่าความเที่ยงของแบบทดสอบแบบอิงเกณฑ์ (ต่อ)

คนที่	x	x ²	x-c	(x-c) ²
26	8	64.00	-4.50	20.25
27	10	100.00	-2.50	6.25
28	13	169.00	0.50	0.25
29	7	49.00	-5.50	30.25
30	15	225.00	2.50	6.25
31	7	49.00	-5.50	30.25
32	7	49.00	-5.50	30.25
33	18	324.00	5.50	30.25
34	14	196.00	1.50	2.25
35	11	121.00	-1.50	2.25
36	8	64.00	-4.50	20.25
37	18	324.00	5.50	30.25
38	8	64.00	-4.50	20.25
39	17	289.00	4.50	20.25
40	21	441.00	8.50	72.25
	451	5875.00		850.00

$$\bar{X} = 11.2750$$

$$S.D. = 4.5006$$

$$S^2 = 20.2558$$

ค่าความเที่ยงของแบบทดสอบอิงกลุ่ม

$$r_u = \frac{k}{k-1} \left[1 - \frac{\sum p_i q_i}{s_i^2} \right]$$

$$r_u = \frac{25}{25-1} \left[1 - \frac{5.69}{20.26} \right]$$

$$r_u = 0.7491$$

ค่าความเที่ยงของแบบทดสอบอิงเกณฑ์

$$r_{cc} = \frac{r_u S_i^2 + (\bar{x} - c)^2}{S_i^2 + (\bar{x} - c)^2}$$

$$r_{cc} = \frac{(0.7491)(20.26) + (11.28 - 12.5)^2}{20.26 + (11.28 - 12.5)^2}$$

$$r_{cc} = 0.7663$$

ภาคผนวก ฉ

ตารางบันทึกพฤติกรรม

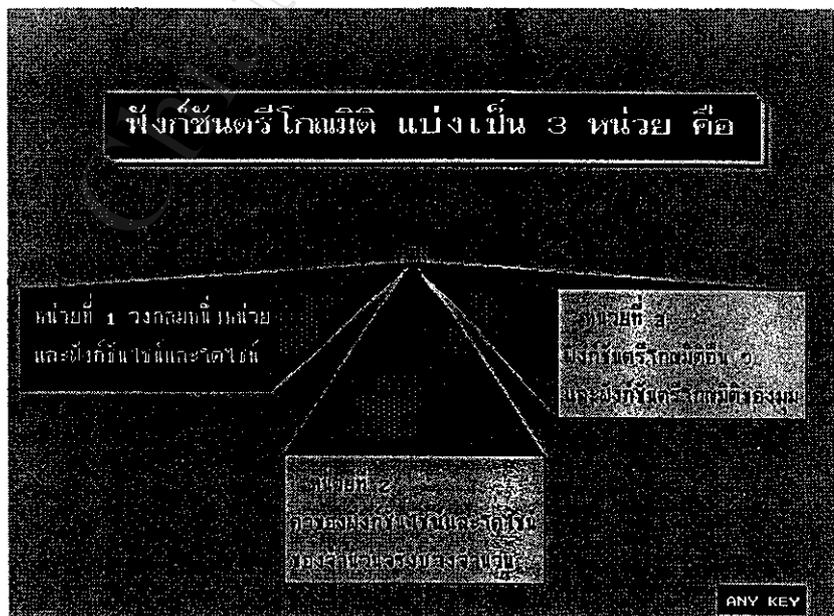
แบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรมทางการเรียน

ชั้น..... ครั้งที่..... วันเดือนปีที่บันทึก.....

ความสนใจ	ความมีวินัย	ความรับผิดชอบ

ภาคผนวก ข

ตัวอย่างกรอบบทเรียนคอมพิวเตอร์



แต่ละหน่วยประกอบด้วย

- 1) แบบทดสอบครั้งที่ 1
- 2) แบบทดสอบครั้งที่ 2
- 3) แบบทดสอบครั้งที่ 2

ANY KEY

คำแนะนำการใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์

- ให้นักเรียนแต่ละคนทำแบบทดสอบครั้งที่ 1 และเมื่อทำเสร็จแล้ว
นักเรียนจะทราบคะแนนทันที
- นักเรียนที่ได้อันดับที่ 5 ของแต่ละห้องไปศึกษาบทเรียนล่วงหน้าพร้อม
และนักเรียนที่ได้อันดับที่ 5 ของแต่ละห้องไปศึกษาบทเรียนล่วงหน้าพร้อม
- นักเรียนที่เรียนได้ทั้งหมดเรียนล่วงหน้าพร้อมเสร็จเรียบร้อยแล้ว
ใช้บทเรียนทวนแบบทดสอบครั้งที่ 2

อ่านให้เข้าใจนะคะ ถ้าเข้าใจแสดงตอบได้

ANY KEY

หน่วยที่ 1
วงกลมหนึ่งหน่วย
&
ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

จุดประสงค์การเรียนรู้
ประจำหน่วยที่ 1

1. เมื่อกำหนดวงกลมหนึ่งหน่วย นักเรียนสามารถบอกจุดตัดบนแกน x หรือ y ได้
2. เมื่อกำหนดความยาวส่วนโค้ง นักเรียนสามารถบอกมิกัดของจุดปลายส่วนโค้งได้
3. นักเรียนสามารถบอกโคไซน์และเรอจ็องฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ได้
4. นักเรียนสามารถบอกค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนได้

กวดปูมิต ๑

คำแนะนำในการทำแบบทดสอบ

1. แบบทดสอบมี 10 ข้อ ให้ทำเรียงแล้วแต่คำถามแต่ละข้อให้เข้าใจ
2. เมื่อได้คำตอบแล้วให้กดหมายเลข 1, 2, 3 หรือ 4
หรือใช้แป้นลูกศร (<, >) เลื่อนให้ตรงกับหมายเลขที่เลือก
แล้วกด ENTER
3. ถ้าเริ่มมีเวลาในการทำแบบทดสอบข้อจะ 100 วินาที
โดยจะบอกเวลาอยู่ตรงมุมซ้ายบนของจอภาพ

ตั้งสมาธิให้ดี แล้วกดปุ่มใด ๆ เพื่อไปทำแบบทดสอบกันนะคะ

แบบทดสอบ

ประจำหน่วยที่ 1

เรื่อง

วงกลมหนึ่งหน่วย

๕

ฟังก์ชันไซน์และ โคไซน์

COUNT:178

ข้อ 1. พิกัดจุดตัดของวงกลมหนึ่งหน่วยกับแกน y คือข้อใด

1. $(1, 0)$ และ $(0, -1)$
2. $(-1, 0)$ และ $(1, 0)$
3. $(0, 1)$ และ $(0, -1)$
4. $(0, 1)$ และ $(-1, 0)$

โปรดเลือก 1 2 3 4

COUNT:179

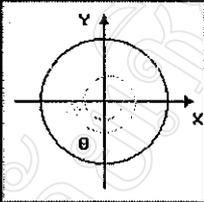
ข้อ 2. กิ่งวงรีค่า a ให้เท่ากับ $5a$ หน่วย แสดงว่า กิ่งวงรีค่า a อย่างไร

1. จุดศูนย์กลางวงรี (ค) a และ b มีค่าเท่ากัน
2. จุดศูนย์กลางวงรี (ค) a และ b มีค่าต่างกัน
3. จุดศูนย์กลางวงรี (ค) a และ b มีค่าต่างกัน
4. จุดศูนย์กลางวงรี (ค) a และ b มีค่าต่างกัน

โปรดเลือก 1 2 3 4

COUNT:176

ข้อ 3. จากรูปค่า θ เท่ากับจำนวนในข้อใด

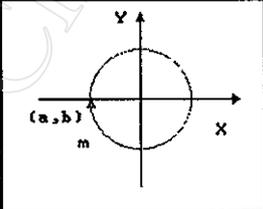


1. -2π
2. -3π
3. 2π
4. 3π

โปรดเลือก 1 2 3 4

COUNT:173

ข้อ 4. จากรูปค่า a และ b ในพิกัดเชิงขั้วของจุด P คือ (a, b) แล้วค่า a และ b มีค่าเป็นเท่าไร



1. (a, b)
2. (a, m)
3. (m, a)
4. (m, b)

โปรดเลือก 1 2 3 4

COUNT:088

ข้อ 5.

เรนจ์ของฟังก์ชัน โคไซน์คอสโค ได

1. $[-1, 1]$

2. $[0, -\infty)$

3. $(-\infty, 1]$

4. R

โปรดเลือก

1 2 3 4

COUNT:179

ข้อ 6.

ถ้าฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{7} \ln(x)$ หาผลต่างปริมาตรของทรงกลม
 ผลคูณปริมาตรของทรงกลมที่มีรัศมี r และ $2r$
 สามารถเป็น $\frac{1}{7}$ แล้ว r มีค่าเป็นเท่าใด

1. $1 - \frac{1}{7}$

2. $1 - \frac{1}{49}$

3. $\sqrt{1 - \frac{1}{7}}$

4. $\sqrt{1 - \frac{1}{49}}$

โปรดเลือก

1 2 3 4

COUNT: 889

ข้อ 7. ถ้า $\cos \theta = -1$ และ $-4\pi < \theta < 0$
แล้ว θ คือจำนวนในข้อใด

1. $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2}$ 2. $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{2}$
3. $-\pi$, -3π 4. -2π , -4π

โปรดเลือก 1 2 3 4

COUNT: 179

ข้อ 8. ถ้า $\sin \theta = \frac{1}{2}$ และ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$
แล้ว $\cos \theta$ มีค่าเป็นเท่าใด

1. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
2. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
3. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
4. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

โปรดเลือก 1 2 3 4

COUNT:099

ข้อ 9. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ มีค่าสอดคล้องกับจำนวนในข้อใด

1. มีค่าน้อยกว่า $\sin\frac{2\pi}{3}$

2. มีค่ามากกว่า $\cos\frac{2\pi}{3}$

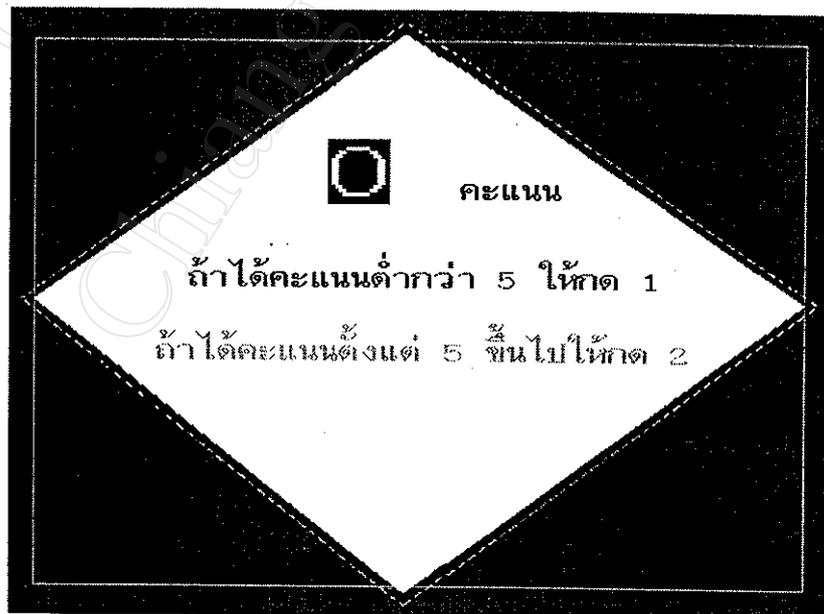
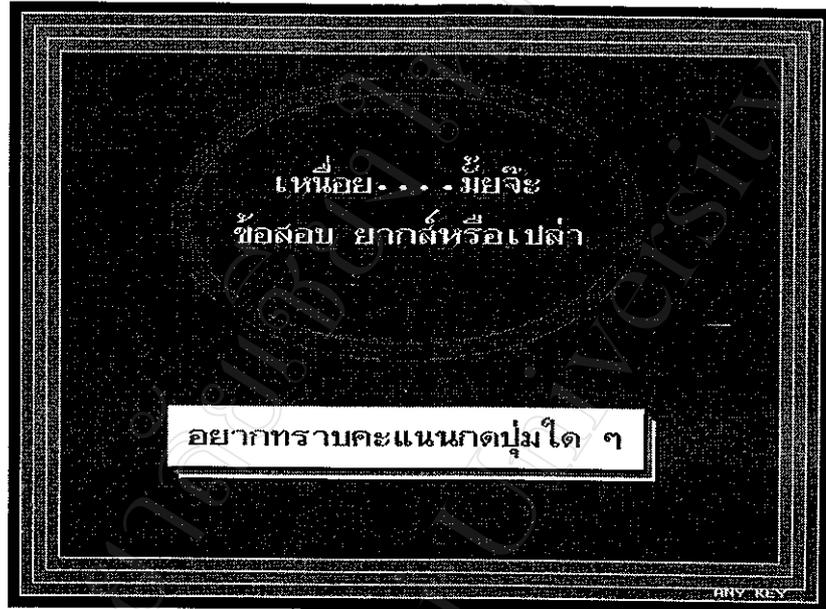
3. มีค่าเท่ากับ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

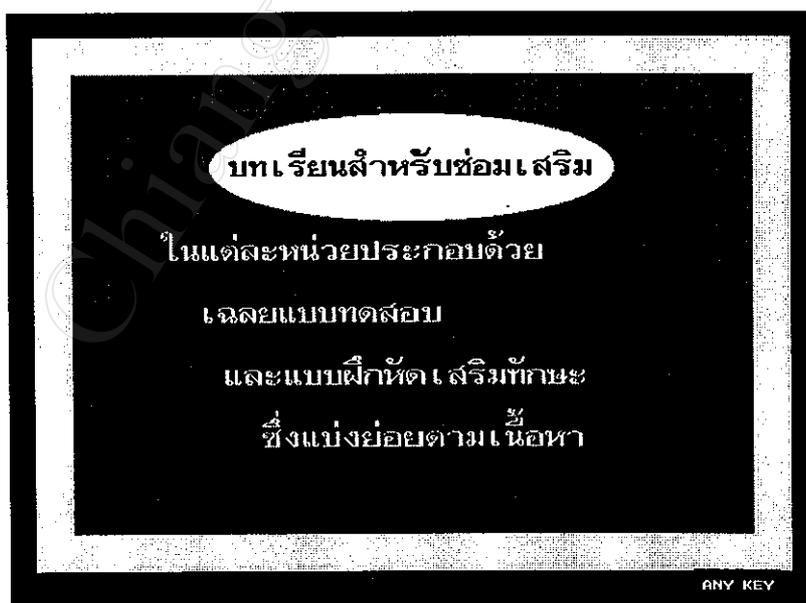
4. มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$

โปรดเลือก 1 2 3 4

ข้อ 10. ถ้า $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$
แล้ว θ มีค่าเท่ากับจำนวนในข้อใด

โปรดเลือก 1 2 3 4





COUNT: 889

หน่วยที่ 1

โปรดเลือกหัวข้อศึกษา

1. วงกลมหนึ่งหน่วย
2. ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

1 2

กดปุ่มใดๆบนคีย์บอร์ด

เฉลยแบบทดสอบ
และแบบฝึกหัด เสริมทักษะ
เรื่อง
วงกลมหนึ่งหน่วย

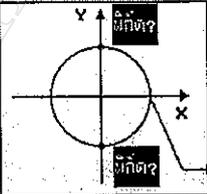
ANY KE

คำถาม พิกัดจุดตัดของวงกลมหนึ่งหน่วยบนแกน Y คือข้อใด ?

1- (1,0) และ (0,-1)
 2- (-1,0) และ (0,1)
 3- (0,-1) และ (0, 1)
 4- (0,-1) และ (-1,0)

เฉลย.. ข้อ 3 (ถูกต้อง).. กด Enter เพื่อดูเฉลย

คำถาม พิกัดจุดตัดของวงกลมหนึ่งหน่วยบนแกน Y คือข้อใด ?



เลือก 1. (1,0) และ (0,-1)
 ผิด
 เฉลย
 (0,-1) ได้อยู่บนแกน Y

โจทย์ต้องการหาพิกัดบนแกน Y ทั้งสอง
 เมื่อเลือกข้อ 1 หรือข้อใดก็ได้ ข้อ 2 ถูกเฉลย

คำถาม พิกัดจุดตัดของวงกลมหนึ่งหน่วยบนแกน Y คือข้อใด ?

เลือก 2. $(-1,0)$ และ $(1,0)$

ไม่ต้องตอบ เพราะ $(1,0)$ ไม่อยู่บนแกน Y

$(-1,0)$ ไม่อยู่บนแกน Y

จำเป็นต้องกรณพิกัดบนแกน Y

มี 2 ปกติของวงกลมคือ คือ 1 และ 0

กด Enter

คำถาม พิกัดจุดตัดของวงกลมหนึ่งหน่วยบนแกน Y คือข้อใด ?

เลือก 3. $(0,1)$ และ $(0,-1)$

$(0,1)$ อยู่บนแกน Y

$(0,-1)$ อยู่บนแกน Y

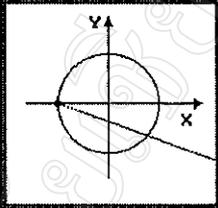
ทุกข้อถูกประการ

เมื่อ 1... แล้วข้อ 1,2,4 มีแต่ข้ออย่างไร่งนี้

ถ้าอยากกรัดเลข 1 เพื่อไปคลิก

ไม่อย่างกรัดเลข 2 เพื่อติ๊กขาคือ

คำถาม พิกัดจุดตัดของวงกลมหนึ่งหน่วยบนแกน Y คือข้อใด ?



เลือก 4. $(0,1)$ และ $(-1,0)$

ผิดจ้า

แฉ่จาก $(-1,0)$ ไม่อยู่บนแกน Y

Enter

สรุป

จุดตัดของวงกลมหนึ่งหน่วย แกน x
อยู่ที่ $(1,0)$ และ $(-1,0)$

จุดตัดของวงกลมหนึ่งหน่วย แกน y
อยู่ที่ $(0,1)$ และ $(0,-1)$

คำถาม ก้องวัดค่า θ ได้เท่ากับ 5π หน่วย
แสดงว่าก้องวัดค่า θ อย่างไร

1. วัดส่วนโค้ง
จากจุด $(0,1)$
ไปทิศทวน
ตามเข็มนาฬิกา

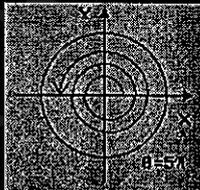
2. วัดส่วนโค้ง
จากจุด $(1,0)$
ไปทิศทวน
ตามเข็มนาฬิกา

3. วัดส่วนโค้ง
จากจุด $(0,1)$
ไปทิศทวน
ทวนเข็มนาฬิกา

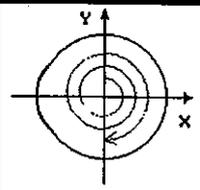
4. วัดส่วนโค้ง
จากจุด $(1,0)$
ไปทิศทวน
ทวนเข็มนาฬิกา

เฉลย...ข้อ 4 (ถูกต้อง)...กด Enter เพื่อดูเฉลยค่ะ

คำถาม ก้องวัดค่า θ ได้เท่ากับ 5π หน่วย
แสดงว่าก้องวัดค่า θ อย่างไร



ลองคิดแบบนี้



ผิดจ๊ะ

ลองคิด
วัดส่วนโค้ง
จากจุด $(0,0)$
ไปทิศทวน
ทวนเข็มนาฬิกา

กดปุ่มใด ๆ ดูรูปประกอบคำอธิบายสัจจะ

COUNT:088

...ก่อนดูเฉลย...

บอกหน่วยได้ไหม $5x > 0$
ต้องวัดส่วนโค้งไปในทิศทางใด

1. ตามเข็มนาฬิกา 2. ทวนเข็มนาฬิกา

1 2

คำถาม กิ่งวัดค่า θ ได้เท่ากับ 5π หน่วย
แสดงว่ากิ่งวัดค่า θ อย่างไร

ไม่ใช่จุดเริ่มต้นในการวัด

หมุนแบบนี้ตามเข็มนาฬิกา

$\theta < 0$

เลือก 1.
วัดส่วนโค้ง
จากจุด $(0, 1)$
ไปทิศทาง
ตามเข็มนาฬิกา

กิ่งวัดค่า เริ่มต้นและทิศทางในการวัด

กิ่ง เริ่มต้นวัดและหมุนในทิศทางนี้จะ

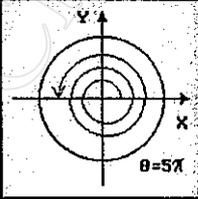
กดปุ่มวัด ๑ เพื่อดูเฉลยตัวเลือก 2 ต่อตะ

$\theta > 0$ ต้องวัดทวนเข็มนาฬิกา

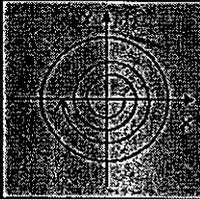
เลือกไว้ตอนแรก วัดตามเข็มนาฬิกา

กดปุ่มใด ๆ ไปดูรูปเปรียบเทียบ

คำถาม ก้อนวัดค่า θ ได้เท่ากับ 5π หน่วย แสดงว่าก้อนวัดค่า θ อย่างไร



ก้อนวัดส่วนดังแบบนี้



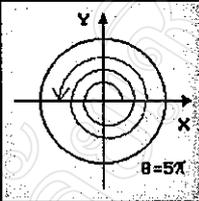
เลือก 2. วัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

ผิดวิธี

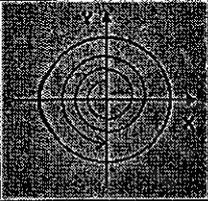
ผิดทิศทาง

กดปุ่มใด ๆ เพื่อดูเฉลยตัวเลือก 3 ต่อค่ะ

คำถาม ก้องวัดค่า θ ได้เท่ากับ 5π หน่วย แสดงว่าก้องวัดค่า θ อย่างไร



ก้องวัดแบบนี้



เกือก 3. วัดค่าได้ตั้งจากจุด (0,1)
ไปเรื่อยๆตามแกนเริ่มวัดค่า

พิดจะ

คงลืมสัญญาที่ตกลงกันได้ กดปุ่มใดๆ ดูสัญญาก่อนนะ

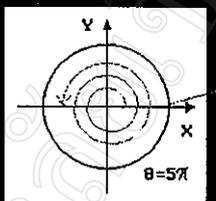
คำถาม ก้องวัดค่า θ ได้เท่ากับ 5π หน่วย แสดงว่าก้องวัดค่า θ อย่างไร



เกือก 3.
วัดค่าได้ตั้งจากจุด (0,1)
ไปเรื่อยๆตั้งเริ่มวัดค่าการวัดค่าได้
เราสัญญากันไว้ตรงนี้
จะเริ่มต้นกันตรงนี้

นักเรียนทราบแล้วนะคะว่า ข้อ 1,2,3 พิดอย่างไร
ให้นักเรียนกดปุ่ม Enter เพื่อศึกษาเนื้อหาต่อนะคะ

คำถาม ก้องวัดค่า θ ได้เท่ากับ 5π หน่วย แสดงว่า ก้องวัดค่า θ อย่างไร



ก้องวัดแบบนี้

เลือก 4.

วัดส่วนรัศมีจากจุด $(1, 0)$

ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

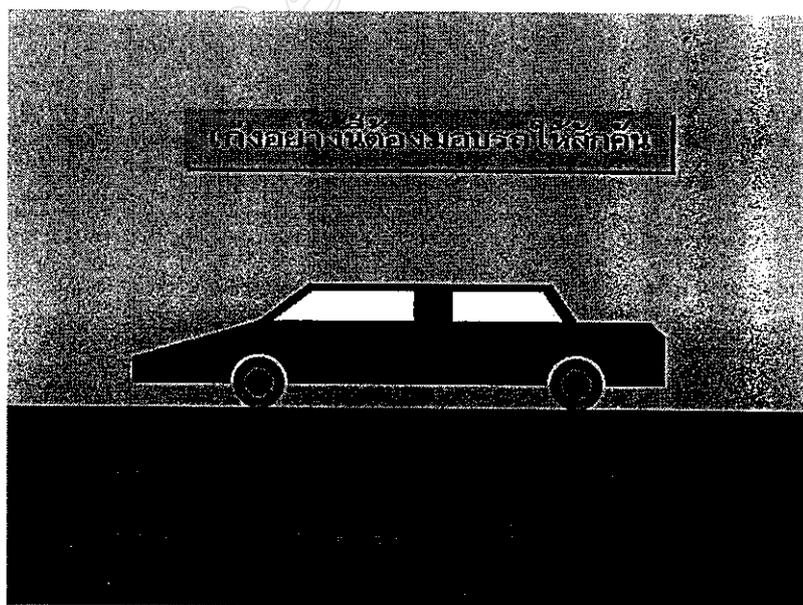
ไว้เลย * ไว้เลย* ก้องวัดแบบนี้แหละ

ถูกต้องทั้งจุดเริ่มต้นและทิศทางการหมุน

กดปุ่มวัด θ เมื่อรับรางวัลนะจ๊ะ

ลูกจ๊ะ

GMY KEY



ประวัติผู้เขียน

ชื่อ - สกุล	นางสาวนุปผา เขียวสกุล
วัน เดือน ปีเกิด	2 สิงหาคม 2499
ที่อยู่ปัจจุบัน	620/9 ถนนสุขเกษม อำเภอเมือง จังหวัดสกลนคร
ประวัติการศึกษา	
2526	ครุศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์) สถาบันราชภัฏสกลนคร
2528	ศึกษาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช
ประวัติการทำงาน	
2522	ครู 2 ระดับ 2 โรงเรียนสกลราชวิทยานุกูล จังหวัดสกลนคร
2543	อาจารย์ 2 ระดับ 7 โรงเรียนสกลราชวิทยานุกูล จังหวัดสกลนคร