บทที่ 3
การแก้ปัญหาวิธีการโปรแกรมเชิงเส้น

3.1 <u>บทนำ</u>

การแก้ปัญหาโดยวิธีการโปรแกรมเชิงเส้นเป็นสาขาหนึ่งที่ใช้ในทางวิทยาศาสตร์ ปกติโดยทั่วไปในปัญหาการผลิตหรือการออกแบบที่มีเงื่อนไขและข้อจำกัดคำตอบอาจได้มาจากการทดลองหาข้อผิดพลาดสำหรับเป็นสมมุติฐานในการตัดสินใจของมนุษย์ แต่ในบางปัญหาอาจต้องการคำตอบที่ช่วยและสนับสนุนการตัดสินใจอย่างมีเหตุผล ซึ่งวิธีการโปรแกรมเชิงเส้นเป็นวิธีที่อาศัยทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ช่วยในการวิเคราะห์ปัญหาที่มีลักษณะเป็นเชิงเส้น โดยแสดงผลลัพธ์เป็นค่าตัวเลขของตัวแปรแต่ละตัวในปัญหา ดังนั้นคำตอบที่ได้รับจะมีความเป็นไปได้สูงสุดถ้าคำตอบนั้นสอดคล้องกับข้อจำกัดที่กำหนดทั้งหมด

3.2 <u>สมมุติฐานของการโปรแกรมเชิงเส้น</u>

รูปแบบของปัญหาที่ต้องการคำตอบที่เป็นไปได้ (Feasible Solution) ที่อาศัยเทคนิคการแก้ปัญหาโดยวิธีการโปรแกรมเชิงเส้น ต้องอยู่ภายใต้สมมุติฐานดังนี้

ก. มีคุณสมบัติเชิงเส้น (Linear Property) หมายถึงฟังก์ชันเป้าหมาย (Object Function) และฟังก์ชันข้อจำกัด(Constraint Function) ต้องมีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นเท่านั้น

ข. พารามิเตอร์มีค่าคงที่ (Deterministic) คือ ค่าพารามิเตอร์ในฟังก์ชันเป้าหมายและฟังก์ชันข้อจำกัดต้องเป็นค่าคงที่และประมาณค่าได้

ค. มีคุณสมบัติแบ่งแยกได้ (Divisionality) หมายถึง ค่าของตัวแปรตัดสินใจของคำตอบที่เป็นไปได้ สามารถเป็นได้ทั้งค่าจำนวนเต็มและเศษส่วน

3.3 <u>ขั้นตอนพื้นฐานของรูปแบบการโปรแกรมเชิงเส้น</u>

(Basic Step in Linear Programming)

พื้นฐานของรูปแบบการโปรแกรมเชิงเส้นมี 3 ขั้นตอน คือ

3.3.1 **กำหนดตัวแปรในการตัดสินใจ**(Decision Variable) **คือการกำหนดตัวแปรในปัญหาและตัวแปรที่กำหนดต้องสามารถควบคุมได้และแปลงให้เป็นตัวแปรทางคณิตศาสตร์ได้**

3.3.2 **กำหนดฟังก์ชันเป้าหมาย** (Object Function) **โดยทั่วไปจะกำหนดรูปแบบฟังก์ชันเพื่อแก้ปัญหาในการตัดสินใจ เช่น**

ก. การออกแบบที่มีความเสี่ยงน้อยที่สุดภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัด

ข. การเลือกใช้ทรัพยากรที่มีอยู่ให้ได้ผลผลิตมากที่สุด

3.3.3 กำหนดสมการข้อจำกัด (Constraint) คือการกำหนดขอบเขตของคำตอบที่เป็นไปได้สูงสุดที่สอดคล้องกับฟังก์ชันเป้าหมาย เช่น

ก. ข้อจำกัดของเวลา

ข. ข้อจำกัดของวัสดุที่ใช้ผลิต

ค. ข้อจำกัดของจำนวนทรัพยากร

3.4 รูปแบบมาตรฐานของการโปรแกรมเชิงเส้น

(The Standard Form of Linear Programming)

การแปลงปัญหาทั่วไปให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของการโปรแกรมเชิงเส้น คือ การแปลงปัญหาให้อยู่ในรูปแบบคณิตศาสตร์เพื่อที่จัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่สำหรับใช้ในกิจกรรมต่าง ๆ เพื่อให้ได้ผลตามที่คาดหมาย ซึ่งมีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

ก. เป็นปัญหาที่ต้องการหาค่าตัวแปรตัดสินใจ ที่มีค่าน้อยที่สุด (Minimization Problem) หรือมีค่ามากที่สุด (Maximization Problem)

ข. แปลงสมการข้อจำกัดที่เป็นอสมการ (Inequality) ให้อยู่ในรูปของสมการ (Equality) โดยปกติสมการข้อจำกัดของปัญหาจะอยู่ในรูปของอสมการ ดังนั้นต้องแปลงให้อยู่ในรูปของสมการ เช่น สมการที่ (3-1) ข้อจำกัดอยู่ในรูปน้อยกว่าหรือเท่ากับ ($\leq$)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{r,j}\, x_j \leq b_r \tag{3-1}$$

เมื่อแปลงให้อยู่ในรูปของสมการจะต้องบวกตัวแปร $s_r \geq 0$ เรียกว่าตัวแปรเพิ่มขึ้น (Slack Variable) เข้าไปในสมการดังนั้นจะได้สมการข้อจำกัดใหม่ตามสมการที่ (3-2)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{r,j}\, x_j + s_r = b_r \tag{3-2}$$

คล้ายกันสมการข้อจำกัดที่อยู่ในรูปมากกว่าหรือเท่ากับ ($\geq$) จะต้องลบด้วยตัวแปรลดลง (Surplus Variable) ทำให้ได้สมการข้อจำกัดใหม่ตามสมการที่ (3-3)

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{r,j}\,\mathbf{x}_j - \mathbf{s}_r = \mathbf{b}_r \qquad (3\text{-}3)$$

ค. ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร $\mathbf{b}_i$ ต้องมีค่าเป็นบวก

<u>แบบมาตรฐานของวิธีการโปรแกรมเชิงเส้น</u>

ฟังก์ชันเป้าหมาย $\mathbf{z} = \mathbf{cx}$

สมการข้อจำกัด $\mathbf{A\,x} = \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq 0$

เมื่อ

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_n$$

$$\mathbf{c\,x} = \mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{c}_n\mathbf{x}_n$$

และกรณีต้องการหาค่าสูงสุดฟังก์ชันเป้าหมายจะได้เป็น $\mathbf{z} = \mathbf{cx}$

กรณีต้องการหาค่าต่ำสุดฟังก์ชันเป้าหมายจะได้เป็น $-\mathbf{z} = -\mathbf{cx}$

$$\mathbf{A\,x} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}_{1,1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{1,2}\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{a}_{1,n}\mathbf{x}_n \{\leq, =, \geq\} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{2,1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{2,2}\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{a}_{2,n}\mathbf{x}_n \{\leq, =, \geq\} \mathbf{b}_2 \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \\ \mathbf{a}_{m,1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m,2}\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{a}_{m,n}\mathbf{x}_n \{\leq, =, \geq\} \mathbf{b}_m \\ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \geq 0 \end{array}\right]$$

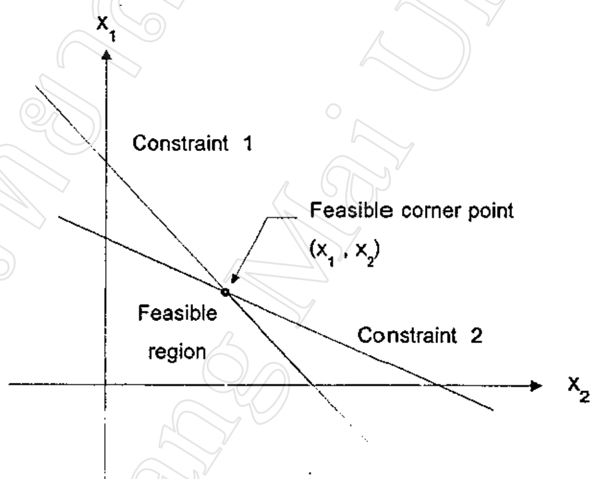
$\mathbf{m}, \mathbf{n} = 1, 2, 3, \ldots$

$\mathbf{a}, \mathbf{c} = 0, 1, 2, \ldots$

3.5 อัลกอริธึมของวิธีซิมเพล็กซ์

(The Simplex Methods Algorithm)

การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นโดยใช้อัลกอริธึมของวิธีซิมเพล็กซ์อาจแสดงได้หลายวิธี เช่น การแก้ปัญหาโดยวิธีกราฟ วิธีเชิงพีชคณิต หรือ วิธีใช้ตาราง เป็นต้น วิธีที่กล่าวมาข้างต้นวิธีซิมเพล็กซ์ในรูปตารางเป็นวิธีที่ดีที่สุดวิธีหนึ่งซึ่งเหมาะสมที่นำไปสร้างเป็นโปรแกรมสำหรับการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น คำตอบพื้นฐานที่เป็นไปได้ (Basic Feasible Solution) ของการแก้ปัญหาก็อยู่ภายใต้เงื่อนไขสมการข้อจำกัดที่กำหนดขึ้นหรือเรียกว่าขอบเขตที่เป็นไปได้ (Feasible Region) ซึ่งการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่เห็นได้ชัดเจนและไม่ซับซ้อนสามารถแสดงได้ด้วยวิธีกราฟดังกราฟในรูปที่ 3-1 จะเห็นได้ว่าคำตอบที่เป็นไปได้จะอยู่บริเวณจุดมุมที่เป็นไปได้ (Feasible Corner Point)



รูปที่ 3-1 กราฟแสดงขอบเขตคำตอบที่เป็นไปได้

จากรูปแบบมาตรฐานการโปรแกรมเชิงเส้นการแปลงข้อจำกัดที่เป็นอสมการ ให้เป็นสมการ $\mathbf{A\,x = b}$ ซึ่งในเมตริกซ์จะประกอบไปด้วยสดมภ์ที่เป็นตัวแปรพื้นฐาน ($\mathbf{x_B}$ (Basic Variable)) และสดมภ์ที่เป็นตัวแปรจร($\mathbf{x_N}$ (Nonbasic Variable)) ดังนั้นเมตริกซ์ $\mathbf{A}$ จะประกอบไปด้วยเมตริกซ์ของตัวแปรพื้นฐาน $\mathbf{B}$ และเมตริกซ์ของตัวแปรจร $\mathbf{N}$ บนพื้นฐานของสมการเชิงเส้นจะได้ตามสมการดังนี้ คือ

$$\mathbf{b = B\,x_B + N\,x_N} \tag{3-4}$$

ดังนั้น

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N} \qquad (3\text{-}5)$$

เมื่อตัวแปรจร $\mathbf{x_N}$ มีค่าเป็นศูนย์ ทำให้ได้ค่าตัวแปรพื้นฐาน $\mathbf{x_B}$ เป็นตามสมการที่ (3-6)

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \qquad (3\text{-}6)$$

ถ้า $\mathbf{x_N}$ มีค่าเท่ากับศูนย์ $\mathbf{x_B}$ จะเท่ากับ $\mathbf{x}$ ซึ่งเป็นคำตอบพื้นฐานที่เป็นไปได้และฟังก์ชันเป้าหมายเขียนใหม่ได้ดังสมการที่ (3-7)

$$\mathbf{z} = \mathbf{c_B}\,\mathbf{x_B} + \mathbf{c_N}\,\mathbf{x_N} \qquad (3\text{-}7)$$

เมื่อแทนค่า $\mathbf{x_B}$ สมการที่ (3-5)ลงในสมการที่ (3-7)จะได้ฟังก์ชันเป้าหมายใหม่ตามสมการที่ (3-8)

$$\mathbf{z} = \mathbf{c_B}\,\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{b} - \left(\mathbf{c_B}\,\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{N} - \mathbf{c_N}\right)\mathbf{x_N} \qquad (3\text{-}8)$$

เมื่อแทนค่าลงในตารางซิมเพล็กซ์จะได้ดังตารางที่ 3-1 โดยแถวบน (row 0) เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเป้าหมายและในแถวต่อไป (row 1-m) เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของสมการข้อจำกัด ซึ่งแบบฟอร์มแสดงได้ตามตารางที่ 3-1 และจากตารางที่ 3-1 เมื่อจัดให้ดูได้ง่ายขึ้นจะได้ตามตารางที่ 3-2

ตารางที่ 3-1 ตารางซิมเพล็กซ์ 1

	$\mathbf{z}$	$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{x_N}$	RHS	
$\mathbf{z}$	1	0	$\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{c_N}$	$\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	(row 0)
$\mathbf{x_{B_1}}$	0	$\mathbf{I_1}$	$\mathbf{B_1}^{-1}\mathbf{N_1}$	$\mathbf{B_1}^{-1}\mathbf{b_1}$	(row 1)
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
$\mathbf{x_{B_m}}$	0	$\mathbf{I_m}$	$\mathbf{B_m}^{-1}\mathbf{N_{ml}}$	$\mathbf{B_m}^{-1}\mathbf{b_m}$	(row m)

ตารางที่ 3-2 ตารางซิมเพล็กซ์ 2

	z	x	RHS	
z	1	$c_B B^{-1} b - c$	$c_B B^{-1} b$	(row 0)
x_{B1}	0	$B_1^{-1} A_1$	$B_1^{-1} b_1$	(row 1)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_{Bm}	0	$B_m^{-1} A_m$	$B_m^{-1} b_m$	(row m)

ถ้าจำแนก B^{-1} ออกจากตารางซิมเพล็กซ์เห็นได้ว่าที่สดมภ์ x_j จะได้ค่าเป็นตามสมการที่ (3-9)

$$x_j = \left(\frac{z_j - c_j}{\alpha_j}\right) = \left(\frac{c_B B^{-1} a_j - c_j}{B^{-1} a_j}\right) \tag{3-9}$$

ดังนั้นในแต่ละสดมภ์ a_j จะปรับค่าโดยการคูณด้วย B^{-1} จะได้เป็น $a_j B^{-1}$ และ $z_j - c_j$ จะหาได้จากการคูณสดมภ์ $a_j B^{-1}$ ด้วย c_B และลบด้วยค่า c_j จากตารางที่ 3-1 เมื่อเมตริกซ์ $I = (a_i, a_j, a_k)$ และ $B^{-1} = B^{-1} I$ นั่นก็ คือ $(B^{-1}a_i, B^{-1}a_j, B^{-1}a_k) = (\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k)$ นำไปจัดค่าตัวแปรใหม่จะได้ตารางซิมเพล็กซ์ตามตารางที่ 3-3 และค่า B^{-1} สามารถที่หาได้จากการจัดค่าในตารางให้เหมาะสมซึ่งสรุปเป็นขั้นตอนดังต่อไปนี้

ตารางที่ 3-3 ตารางซิมเพล็กซ์ 3

	z	x_1	x_2	x_3	. . .	x_n	RHS
z	1	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$z_3 - c_3$	. . .	$z_n - c_n$	$c_B \beta$
x_{B1}	0	α_{11}	α_{12}	α_{13}	. . .	α_{1n}	β_1
x_{B2}	0	α_{21}	α_{22}	α_{23}	. . .	α_{2n}	β_2
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_{Bm}	0	α_{m1}	α_{m2}	α_{m3}	. . .	α_{mn}	β_m

ขั้นตอนการหาค่าผลลัพธ์ที่เป็นไปได้สูงสุด

ขั้นตอนที่ 1 ตรวจสอบความเป็นไปได้ คือ ในแถวแรกของตารางซิมเพล็กซ์ (ตารางที่ 3-3) ถ้า $z_j - c_j$ มีค่าไม่เป็นลบ ดังนั้นจะได้ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ $x_1 \ldots x_n$ หรือถ้า $z_j - c_j$ มีค่าเป็นลบให้ไปทำตามขั้นตอนที่ 2

ขั้นตอนที่ 2 ตรวจสอบขอบเขตของคำตอบ ถ้า $z_j - c_j \le 0$ จะไม่มี α_j ที่เป็นค่าบวก $(\alpha_j \le 0)$ แสดงได้ว่าปัญหานี้มีค่าผลลัพธ์ที่ไม่มีขอบเขต (Unbounded Solution)

ขั้นตอนที่ 3 เลือกตัวแปรพื้นฐานเข้า (Entering Basic Variable) ทำการเลือกตัวแปรพื้นฐานเข้าซึ่งส่วนมากตัวแปรจรส่วนใหญ่จะมีค่าเป็นลบ กรณีฟังก์ชันเป้าหมายต้องการค่าสูงสุดซึ่งต้องพิจารณาจากค่าสัมประสิทธิ์ของ x_k ที่ทำให้ z มีค่าสูงสุด ซึ่งสดมภ์ที่เลือกเรียกว่า สดมภ์สำคัญ (Pivot Column)

ขั้นตอนที่ 4 เลือกตัวแปรพื้นฐานออก (Leaving Basic Variable) โดยใช้การทดสอบหาอัตราส่วนต่ำสุดในการเลือกตัวแปรพื้นฐานออกตามสมการที่ (3-7)

$$\frac{\beta_r}{\alpha_{r,k}} = \min\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{r,k}} : \alpha_{r,k} > 0\right\} \tag{3-7}$$

และแถวที่ r ที่มีอัตราส่วนต่ำสุดเรียกว่าแถวสำคัญ (Pivot Row) และค่าของ $\alpha_{r,k}$ เรียกว่า ตัวเลขสำคัญ(Pivot number)ซึ่งตัวแปรพื้นฐาน $x_{B,r}$ ในแถว r นั้นจะถูกเลือกเป็นตัวแปรพื้นฐานออก

ขั้นตอนที่ 5 จัดรูปสมการและหาค่าผลลัพธ์พื้นฐานที่เป็นไปได้

ก. ให้ตัวแปรพื้นฐานเข้า x_k เป็นตัวแปรพื้นฐานใหม่ในแถว r

ข. แปลงค่าในตารางใหม่ดูจากตารางที่ 3-4 เป็นตารางที่ 3-5 ซึ่งค่า x_k ในตารางใหม่จะมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมดยกเว้นค่า $\alpha_{r,k}$ ในตำแหน่งสำคัญจะมีค่าเท่ากับ 1 การที่ทำให้ฟังก์ชันเป้าหมายมีค่ามากที่สุดเท่าที่จะมากได้ หากค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจตัวใดมีค่าเท่ากับศูนย์หรือมีค่าเป็นลบแสดงว่าคำตอบที่ได้รับยังไม่ใช่คำตอบที่เป็นไปได้มากที่สุด

ค. กลับไปทำตามขั้นตอนที่ 1 จนกว่าจะได้คำตอบที่ดีที่สุด

ตารางที่ 3-4 ตารางซิมเพล็กซ์ 4

	z	$x_{B,1}$	$\cdots$	$x_{B,r}$	$\cdots$	$x_{B,m}$	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_j	$\cdots$	RHS
z	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$z_k - c_k$	$\cdots$	$z_j - c_j$	$\cdots$	$c_\beta \beta$
$x_{B,1}$	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$\alpha_{1,k}$	$\cdots$	$\alpha_{1,j}$	$\cdots$	β_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{B,r}$	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\alpha_{r,k}$	$\cdots$	$\alpha_{r,j}$	$\cdots$	β_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{B,m}$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\alpha_{m,k}$	$\cdots$	$\alpha_{m,j}$	$\cdots$	β_m

ตารางที่ 3-5 ตารางซิมเพล็กซ์ 5

	z	$x_{B,1}$	…	$x_{B,r}$	…	$x_{B,m}$	…	x_k	…	x_j	…	RHS
z	1	0	…	$\frac{-(z_k - c_k)}{\alpha_{r,k}}$	…	0	…	0	…	$z_j - c_j - (z_k - c_k)\frac{\alpha_{r,j}}{\alpha_{r,k}}$	…	$c_\beta\beta - (z_k - c_k)\frac{\beta_r}{\alpha_{r,k}}$
$x_{B,1}$	0	1	…	$\frac{-\alpha_{1,k}}{\alpha_{r,k}}$	…	0	…	0	…	$\alpha_{1,j}$	…	$\beta_1 - \alpha_{1,k}\frac{\beta_r}{\alpha_{r,k}}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮
$x_{B,r}$	0	0		$\frac{1}{\alpha_{r,k}}$	…	0	…	1	…	$\frac{\alpha_{r,j}}{\alpha_{r,k}}$	…	$\frac{\beta_r}{\alpha_{r,k}}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮
$x_{B,m}$	0	0	…	$\frac{-\alpha_{m,k}}{\alpha_{r,k}}$	…	1	…	0	…	$\alpha_{m,j} - \alpha_{m,j}\frac{\alpha_{r,j}}{\alpha_{r,k}}$	…	$\beta_m - \alpha_{m,k}\frac{\beta_k}{\alpha_{r,k}}$