

บทที่ 2

การวิเคราะห์ความผิดปกติของมอเตอร์เหนี่ยวนำแบบ 3 เฟส

ความผิดปกติของมอเตอร์เหนี่ยวนำแบบ 3 เฟส ในวิทยานิพนธ์นี้แบ่งได้เป็น 3 ชนิดคือ ความผิดปกติที่เกิดขึ้นเนื่องจากการแตกหักของแท่งตัวนำในโรเตอร์ (Broken bars of rotor) ความผิดปกติที่เกิดขึ้นเนื่องจากความไม่สม่ำเสมอของช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์ (Air-gap eccentricity) และความผิดปกติที่เกิดขึ้นเนื่องจากการลัดวงจรระหว่างรอบของขดลวดสเตเตอร์ (Stator winding turn-to-turn short circuit) ในบทนี้จะขอกล่าวรายละเอียดการวิเคราะห์ความผิดปกติของมอเตอร์ทั้ง 3 แบบดังนี้

2.1 การแตกหักของแท่งตัวนำในโรเตอร์

เมื่อสงสัยว่าแท่งตัวนำในโรเตอร์เกิดการแตกหัก จำเป็นต้องหาวิธีในการตรวจสอบเพื่อหาขนาดของความผิดปกติ ทำให้สามารถตัดสินใจและวางแผนในการซ่อมได้ มีหลายวิธีการที่ได้พัฒนาสำหรับใช้ในการตรวจจับความผิดปกติ โดยใช้หลักการที่ต่าง ๆ กัน เพื่อให้สามารถวินิจฉัยความผิดปกติได้ง่ายและรวดเร็ว

การตรวจจับความผิดปกติของแท่งตัวนำในโรเตอร์โดยไม่ต้องหยุดการทำงานของมอเตอร์ สามารถดูได้จากกระแสของสเตเตอร์ ซึ่งเป็นผลเนื่องมาจากความผิดปกติของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นบนโรเตอร์

2.1.1 กระแสสเตเตอร์

เมื่อโรเตอร์ชนิดกรงกระรอกที่มีจำนวนสล๊อต N หมุนด้วยความถี่เชิงมุม ω อิมพีแดนซ์เมื่อมองมาจากทางด้านสเตเตอร์จะแปรผันตามความถี่มูลฐานของ $N \cdot \omega$ ถ้าหากโรเตอร์ผิดปกติ ความถี่มูลฐานจะมีค่าเป็น $2 \cdot \omega$

สำหรับขดลวดสเตเตอร์ที่มีจำนวนคู่ขั้ว P ความถี่ของแหล่งจ่าย ω แรงเคลื่อนแม่เหล็กไฟฟ้าที่องศาทางกล θ สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (1)

$$m_1 = M_1 \cdot \sin(\omega t - P\theta) \quad (1)$$

แรงเคลื่อนแม่เหล็กไฟฟ้าที่โรเตอร์ที่เกิดขึ้นจะเปลี่ยนแปลงตามการเปลี่ยนแปลงของอิมพีแดนซ์เมื่อพิจารณาเฉพาะความถี่มูลฐานและอ้างอิงไปที่สเตเตอร์ ความผิดปกติที่เกิดขึ้นจะสร้างแรงเคลื่อนแม่เหล็กไฟฟ้า ดังสมการที่ (2)

$$m_2 = M_2 (\sin \omega t(3 - 2s) - 3P - \theta - \lambda) + (\sin \omega t(1 - 2s) - P\theta - \lambda) \quad (2)$$

เมื่อ s คือ สลิป

เทอมที่ 2 ของสมการ (2) จะส่งผลไปที่แรงดันแม่เหล็กไฟฟ้าของขดลวดสเตเตอร์ ซึ่งสามารถวัดเพื่อดูความผิดปกติของโรเตอร์ได้

ถ้าหากแท่งตัวนำโรเตอร์ที่ต่อกันและมีมุมเอียง α องศาทางไฟฟ้า เกิดการเปิดวงจรและความเร็วรอบของมอเตอร์มีค่าคงที่ อัตราส่วนของแอมพลิจูดของกระแสที่ความถี่ในเทอมที่ 2 ของสมการที่ (2) ต่อแอมพลิจูดของกระแสที่แหล่งจ่ายมีค่าโดยประมาณดังสมการที่ (3)

$$R_s \approx \frac{\sin \alpha}{2p(2\pi - \alpha)} \quad (3)$$

$$\alpha = \frac{2\pi np}{N} \quad (4)$$

สำหรับ n แท่งโรเตอร์ที่ติดกันที่เกิดการแตกหักเมื่อ $n \ll N$

การเปลี่ยนแปลงของกระแสจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของแรงบิดที่ความถี่ 2 เท่าของสลิป ผลลัพธ์ของการเปลี่ยนแปลงของความเร็วจะขึ้นอยู่กับความเฉื่อยของระบบ ซึ่งโดยปกติแล้วจะไม่สามารถตัดทิ้งได้ สิ่งที่มาถึงก็คือจะมีการลดลงของแอมพลิจูดของกระแสที่ความถี่ $\omega(1-2s)$ และเกิดกระแสที่ความถี่ $\omega(1+2s)$

กระแสสเตเตอร์เป็นตัวบ่งชี้สภาพทั้งหมดของโรเตอร์ได้ แต่ไม่สามารถบ่งบอกสภาพของโรเตอร์ที่แตกหักแค่อุ่ห่างกันได้ ส่วนข้อจำกัดคือ เมื่อเกิดการแตกหักของแท่งตัวนำโรเตอร์ที่วางห่างกัน 90 องศาทางไฟฟ้า จะไม่เกิดสเปกตรัมที่ความถี่ $(1-2s)\omega$ และจากการสังเกต

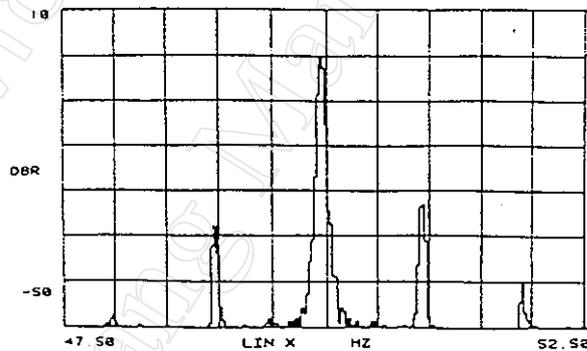
ในทางปฏิบัติพบว่า จะเกิดการแตกหักของแ่งตัวนำในโรเตอร์ที่ติดกัน เนื่องจากเมื่อแ่งตัวนำโรเตอร์หัก จะทำให้กระแสไหลในแ่งที่ติดกันมากขึ้นทำให้เกิดการแตกหักในแ่งที่ติดกัน (2)

2.1.2 การวิเคราะห์กระแส (Current analysis)

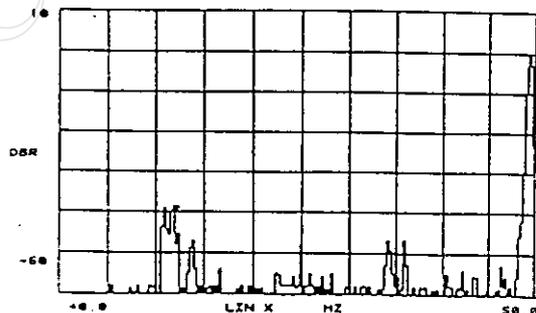
กระแสเตเตอร์สามารถตรวจจับได้ง่าย ถึงแม้มอเตอร์จะอยู่ในที่อันตรายและไม่สามารถเข้าตรวจสอบได้ แต่จะมีหม้อแปลงกระแสซึ่งใช้สำหรับระบบป้องกันและระบบการวัดต่าง ๆ วางอยู่ในตำแหน่งที่ไม่อันตราย

ขั้นตอนในการตรวจจับโดยปกติแล้วจะใช้เทปในการบันทึกกระแส 1 เฟส แล้วนำไปวิเคราะห์ด้วยเครื่องวิเคราะห์สเปกตรัมที่มีความละเอียดสูง และความไม่เป็นเชิงเส้นของกระแสที่วัดได้จะมีผลไม่มากเมื่อเราเปลี่ยนจากโดเมนเวลามาเป็นโดเมนความถี่

จากรูปที่ 2.1 แสดงสเปกตรัมของกระแสของมอเตอร์ที่แ่งตัวนำโรเตอร์หัก 3 แ่ง ในกรณีนี้ Lower side-band จะมองเห็นได้ชัดเจนและสามารถตรวจจับได้ง่ายเมื่อเปรียบเทียบกับแอมพลิจูดของความถี่มูลฐาน



รูปที่ 2.1 สเปกตรัมของกระแสของมอเตอร์ที่แ่งตัวนำโรเตอร์หัก 3 แ่งขณะโหลดพิกัด



รูปที่ 2.2 สเปกตรัมของกระแสของมอเตอร์ที่มีเกียร์เป็นตัวขับโหลดขณะโหลดพิกัด

จากรูปที่ 2.2 แสดงสเปกตรัมของกระแสของโม่บดด้านที่มีเกียร์เป็นตัวขับโหลด จะเกิด Side-band หลายความถี่ เช่นที่ 0.3 เฮิร์ต 2.7 เฮิร์ต และ 7.5 เฮิร์ต ในรูปนี้ความถี่สถิตคือ 0.4 เฮิร์ต ดังนั้นโรเตอร์ที่ผิดปกติจะสร้าง Side-band ที่ความถี่ 0.8 เฮิร์ต ต่ำกว่าความถี่ 50 เฮิร์ต คือที่ความถี่ 49.2 เฮิร์ต ซึ่งในรูปที่ 2.2 จะไม่เกิดสเปกตรัมที่ความถี่นี้ ดังนั้นในกรณีที่ โหลดต่างชนิดกันสามารถตรวจจับการแตกหักของแท่งตัวนำในโรเตอร์ได้

2.2 ความไม่สม่ำเสมอของช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์

ความไม่สม่ำเสมอของโรเตอร์แบ่งออกได้เป็น 2 แบบ คือ ความไม่สม่ำเสมอแบบสถิต หมายถึงการเคลื่อนที่ของโรเตอร์ออกจากแนวจุดศูนย์กลางของสเตเตอร์แต่ยังคงหมุนอยู่ในแนวแกนของโรเตอร์และความไม่สม่ำเสมอแบบไดนามิก หมายถึง การที่โรเตอร์ยังคงหมุนอยู่ในแนวแกนจุดศูนย์กลางของสเตเตอร์ แต่ไม่หมุนอยู่ในแนวแกนของโรเตอร์

สาเหตุของความไม่สม่ำเสมอของโรเตอร์ทั้ง 2 แบบมีหลายสาเหตุ เช่น การประกอบแบร็งค์ในตำแหน่งที่ผิด แบร็งค์สึกหรอ แกนโรเตอร์งอ การทำงานที่ความเร็ววิกฤตทำให้เกิดการสั่นของโรเตอร์ ความไม่สม่ำเสมอจะทำให้เกิดแรงบนโรเตอร์ซึ่งจะถูกดึงให้ออกจากแนวแกนของสเตเตอร์ ในกรณีของความไม่สม่ำเสมอแบบสถิต จะเกิดแรงดึงในทิศทางใดทิศทางหนึ่งที่คงที่ ส่วนความไม่สม่ำเสมอแบบไดนามิกจะสร้างแรงดึงที่ไม่สม่ำเสมอกระทำที่โรเตอร์และหมุนที่ความเร็วโรเตอร์ ซึ่งเป็นสาเหตุให้เกิดความเครียดสูง และเพิ่มความเสียหายให้แก่แบร็งค์โดยแรงในแนวรัศมีที่เกิดขึ้นจากความไม่สม่ำเสมอจะกระทำบนแกนเหล็กของสเตเตอร์และทำให้เกิดการสั่นสะเทือนที่ขดลวดสเตเตอร์ได้ อาจทำให้เกิดการสั่นของสเตเตอร์กับโรเตอร์ ส่งผลให้แกนเหล็ก ขดลวดสเตเตอร์และโรเตอร์เสียหายได้ และอาจทำให้เกิดความเสียหายของฉนวนของขดลวดสเตเตอร์ ดังนั้นการวินิจฉัยความไม่สม่ำเสมอของช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์ขณะที่มอเตอร์เดินใช้งานอยู่ จึงมีความจำเป็นเพื่อป้องกันปัญหาที่รุนแรงที่เกิดขึ้นขณะที่มอเตอร์ใช้งานอยู่ได้

2.2.1 การประยุกต์ใช้งานกฎของกระแสเกี่ยวกับความไม่สม่ำเสมอของเครื่องจักรกล (Ampere's circuital law to eccentric rotor machines)

มอเตอร์สามารถสร้างแบบจำลองในรูปของฮาร์โมนิกของสนามแม่เหล็กผ่านช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์และคลื่นฮาร์โมนิกของสนามแม่เหล็กที่ผิวของสเตเตอร์และโรเตอร์ โดยการสมมุติว่าการเปลี่ยนแปลงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของสเตเตอร์เป็นรูปไซน์ แล้วความหนาแน่นของกระแสที่ผิวด้านในของสเตเตอร์สามารถเขียนได้เป็น (2)

$$j_s(y, t) = J_s \sin(\omega t - pky) \quad (5)$$

- เมื่อ J_s คือ ค่าสูงสุดของความหนาแน่นของกระแส
 ω คือ ความถี่ของแหล่งจ่าย (rad/sec)
 k คือ ส่วนกลับของรัศมีโดยเฉลี่ยของช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์
 y คือ เส้นรอบวงของช่องอากาศจากจุดอ้างอิงใด ๆ
 ky คือ มุมรอบช่องอากาศจากจุดอ้างอิงใด ๆ

เมื่อสมมุติว่าเส้นแรงแม่เหล็กตั้งฉากกับช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์ เมื่อเกิดความไม่สม่ำเสมอของโรเตอร์แล้ว สนามแม่เหล็กผ่านช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (6)

$$b(y, t) = \Lambda(y, t) \int \mu_0 j(y, t) dy \quad (6)$$

เมื่อ $\Lambda(y, t)$ คือ ความนำแม่เหล็กของช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์

2.2.2 ความนำแม่เหล็กของช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์ (Air-gap permeance)

โดยปกติช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์จะมีความยาวคงที่ (g) แต่ถ้าเกิดความไม่สม่ำเสมอทั้งแบบสแตติกและแบบไดนามิกแล้ว ความยาวของช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์สามารถเขียนได้เป็น (2)

$$g(y, t) = g[1 - \delta_s \cos(ky) - \delta_d \cos(\omega_r t - ky)] \quad (7)$$

เมื่อ δ_s คือ ขนาดของความไม่สม่ำเสมอแบบสแตติก

δ_d คือ ขนาดของความไม่สม่ำเสมอแบบไดนามิก

$$\omega_r = \frac{1-s}{p} \omega \quad (8)$$

ω_r คือ ความเร็วในการหมุนของโรเตอร์
 s คือ สลลป

เพื่อหลีกเลี่ยงการสีกันระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์ $\delta_s + \delta_d < 1$ ความยาวของช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์จะเป็นสัดส่วนที่ตรงกันข้ามกับความนำแม่เหล็ก แต่เพื่อให้เห็นความชัดเจน จะสมมุติว่าทั้งความไม่สม่ำเสมอแบบสแตติกและแบบไดนามิกมีค่าต่ำ ดังนั้นสามารถเขียนสมการใหม่ได้ดังสมการที่ (9)

$$\Lambda(y, t) = \frac{1}{g} [1 + \delta_s \cos(ky) + \delta_d \cos(\omega t - ky)] \quad (9)$$

สมการนี้สามารถนำไปหาสนามแม่เหล็กผ่านช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์ของสเตเตอร์ได้โดยใช้กฎของแอมแปร์ (Ampere's circuital law)

2.2.3 สนามแม่เหล็กผ่านช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์ของสเตเตอร์
 จากสมการที่ (6) - (9) จะได้

$$b_s(y, t) = \frac{\mu_0 J_s}{kpg} \cos(\omega t - pky) (1 + \delta_s \cos(ky) + \delta_d \cos(\omega_r t - ky)) \quad (10)$$

ทำการจัดรูปสมการที่ (10) จะได้สนามแม่เหล็กผ่านช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์ของสเตเตอร์คือ

$$\begin{aligned} b_s(y, t) = & B_p^s \cos(\omega t - pky) \\ & + B_s^{p-1(s)} \cos(\omega t - (p-1)ky) \\ & + B_s^{p+1(s)} \cos(\omega t - (p+1)ky) \\ & + B_s^{p-1(d)} \cos((\omega - \omega_r)t - (p-1)ky) \\ & + B_s^{p+1(d)} \cos((\omega - \omega_r)t - (p+1)ky) \end{aligned} \quad (11)$$

เมื่อ

$$B_p^s = \frac{\mu_0 J_s}{kpg}; B_s^{p \pm 1(s)} = \frac{\mu_0 J_s}{2 kpg} \delta_s; B_s^{p \pm 1(s)} = \frac{\mu_0 J_s}{2 kpg} \delta_d$$

สนามแม่เหล็กเหล่านี้จะสร้างแรงดันไฟฟ้าเหนี่ยวนำไปยังโรเตอร์และจะสร้างคลื่นสนามแม่เหล็กที่ผิวของโรเตอร์ จะเห็นว่าทั้งความไม่สม่ำเสมอแบบสแตติกและแบบไดนามิกจะสร้างสนามแม่เหล็กที่ $p \pm 1$ และในการวิเคราะห์ตามสมการนี้ ใช้ได้สำหรับมอเตอร์ที่มีจำนวนคู่ขั้วมากกว่า 1 เท่านั้น

2.2.4 คลื่นสนามแม่เหล็กของโรเตอร์

ในการหาความสัมพันธ์ของคลื่นสนามแม่เหล็กของโรเตอร์จะต้องทำการเปลี่ยนสนามแม่เหล็กของสเตเตอร์ไปยังอิงที่โรเตอร์โดยใช้ความสัมพันธ์ของโคออดิเนต (Co-ordinate relationship)

$$ky = \omega_r t + ky' \quad (12)$$

เมื่อ y' คือ เส้นรอบวงของโรเตอร์จากจุดอ้างอิง

สนามแม่เหล็กของสเตเตอร์จะเหนี่ยวนำให้เกิดกระแสไหลในโรเตอร์ ดังนั้นคลื่นแม่เหล็กที่ผิวของโรเตอร์สามารถเขียนได้เป็น

$$j_r(y', t) = J_r^p \sin(s\omega t - p(ky' - p\beta_1)) \quad (13)$$

$$+ J_R^{p-1(s)} \sin \frac{1 + (p-1)s}{p} \omega t - (p-1)ky' - p\beta_2)$$

$$+ J_R^{p+1(s)} \sin \frac{-1 + (p+1)s}{p} \omega t - (p+1)ky' - p\beta_3)$$

$$+ J_R^{p-1(d)} \sin(s\omega t - (p-1)ky' - p\beta_4)$$

$$+ J_R^{p+1(d)} \sin(s\omega t - (p+1)ky' - p\beta_5)$$

2.2.5 กระแสที่เกิดขึ้นที่ขั้วของมอเตอร์ที่ไม่ได้มาจากแหล่งจ่าย (Non-supply-frequency harmonic terminal current components)

คลื่นสนามแม่เหล็กของโรเตอร์ จะสร้างสนามแม่เหล็กของตัวเองและจากการผสมกันของคลื่นแม่เหล็กที่เกิดจากความไม่สม่ำเสมอของช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์ จะทำให้เกิดสนามแม่เหล็กผ่านช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์ ซึ่งจะเหนี่ยวนำไปที่ขดลวดสเตเตอร์เกิดเป็นแรงดันไฟฟ้าเหนี่ยวนำขึ้นที่ขดลวดสเตเตอร์ และจากการใช้กฎของกระแสโดยเปลี่ยนคลื่นแม่เหล็กของโรเตอร์ไปที่สเตเตอร์ แล้วทำการคูณด้วยฮาร์โมนิกที่ 1 ของความนำแม่เหล็กที่ผ่านช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์จะได้

$$b_r(y, t) \begin{matrix} (\neq \omega) \\ (\neq p \pm 1) \end{matrix} = \left[\begin{array}{l} \frac{J_R^{p-1}(s)}{k(p-1)g} \text{Cos}(\omega t - (p-1)ky - p\beta_2) + \\ \frac{J_R^{p+1}(s)}{k(p+1)g} \text{Cos}(\omega t - (p+1)ky - p\beta_3) \end{array} \right] * \text{Cos}(\omega_r t - ky) \quad (14)$$

$$+ \left[\begin{array}{l} \frac{J_R^{p-1}(d)}{k(p-1)g} \text{Cos}((\omega - \omega_r)t - (p-1)ky - p\beta_4) + \\ \frac{J_R^{p+1}(d)}{k(p+1)g} \text{Cos}((\omega + \omega_r)t - (p+1)ky - p\beta_5) \end{array} \right] * \text{Cos}(ky)$$

คลื่นแม่เหล็กของโรเตอร์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากความไม่สม่ำเสมอแบบสเตตติก ซึ่งถูกผสมด้วยความนำแม่เหล็กของความไม่สม่ำเสมอแบบไดนามิกเพื่อที่จะได้รับกระแส Side-band เมื่อพิจารณาที่จำนวนคู่ขั้ว p จะได้

$$b_r(y, t) \begin{matrix} (\neq \omega) \\ (p) \end{matrix} = \frac{J_R^{p-1}(s)}{2k(p-1)g} \text{Cos}((\omega - \omega_r)t - pky - p\beta_2) \quad (15)$$

$$+ \frac{J_R^{p+1}(s)}{2k(p+1)g} \text{Cos}((\omega - \omega_r)t - pky - p\beta_3)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{J_R^{p-1(d)}}{2k(p-1)g} \text{Cos}((\omega - \omega_r)t - pky - p\beta_4) \\
& + \frac{J_R^{p+1(d)}}{2k(p+1)g} \text{Cos}((\omega + \omega_r)t - pky - p\beta_5)
\end{aligned}$$

ดังนั้นจะเกิดสนามแม่เหล็กที่มีจำนวนคู่ขั้ว p ที่ความถี่ $\omega \pm \omega_r$ และสนามแม่เหล็กนี้จะสร้างแรงดันไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่ความถี่ที่ไม่ใช่ความถี่ของแหล่งจ่ายขึ้นที่ขดลวดสเตเตอร์ ซึ่งสามารถวัดได้ โดยการเฟืององกระแส Side-band ของกระแสรวมของมอเตอร์

2.3 การลัดวงจรระหว่างรอบของขดลวดสเตเตอร์

การลัดวงจรระหว่างรอบของขดลวดเกิดขึ้นเนื่องจากอายุการใช้งานของฉนวน การใช้งานเกินกำลังและอื่น ๆ ความผิดปกติที่เกิดขึ้นอาจจะไม่เกิดการเสียหายอย่างทันทีทันใด และอาจจะเกิดผลกระทบต่อสมรรถนะของมอเตอร์เพียงเล็กน้อย แต่ความผิดปกติที่เกิดขึ้นนำไปสู่ความเสียหายที่รุนแรงได้ ถ้ายังไม่สามารถตรวจจับความผิดปกติที่เกิดขึ้นได้

การตรวจจับความผิดปกติที่เกิดขึ้นเนื่องจากการลัดวงจรระหว่างรอบของขดลวดสามารถตรวจจับได้ว่า เมื่อเกิดความผิดปกติที่ขดลวดสเตเตอร์กระแสลำดับบวก จะมีการเปลี่ยนแปลงไม่มาก แต่กระแสลำดับลบจะมีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งโดยปกติแล้วกระแสนี้จะมีค่าน้อยมาก ในการวิเคราะห์เพื่อหาค่ากระแสลำดับลบจะใช้ Symmetrical components analysis ในการคำนวณตามสมการที่ (16)

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

เมื่อ V_a, V_b, V_c คือ Original Phasors, phase a, b, c

V_{a0}, V_{a1}, V_{a2} คือ zero, positive, negative sequence components

a คือ $1 \angle 120^\circ$

และจากสมการที่ (16) จะได้

$$V_{a0} = \frac{1}{3}(V_a + V_b + V_c) \quad (17)$$

$$V_{a1} = \frac{1}{3}(V_a + aV_b + a^2V_c) \quad (18)$$

$$V_{a2} = \frac{1}{3}(V_a + a^2V_b + aV_c) \quad (19)$$

2.4 การแปลงฟูรีเยร์ (Fast Fourier Transform, FFT)

การพิจารณาสัญญาณในลักษณะต่าง ๆ สามารถแบ่งออกเป็นส่วนประกอบของสัญญาณไซน์ (Sinusoidal) หลาย ๆ รูปประกอบกัน โดยสัญญาณไซน์แต่ละรูปจะมีขนาดความถี่และมุมเฟสแตกต่างกัน ดังนั้นในการวิเคราะห์ความถี่ได้อาศัยหลักการเดียวกัน คือ รูปสัญญาณที่เกิดขึ้นในระบบไฟฟ้ากำลังที่อยู่ในโดเมนเวลา สามารถแยกออกเป็นสัญญาณไซน์ที่มีความถี่แตกต่างกันหรือที่เรียกว่าเป็นโดเมนความถี่ได้ และหลักการที่นิยมใช้ในการแปลงสัญญาณที่เป็นโดเมนเวลาเป็นโดเมนความถี่คือ การแปลงฟูรีเยร์ (Fourier Transform) ซึ่งมีความสัมพันธ์ดังแสดงในสมการที่ (20) และสมการที่ (21)

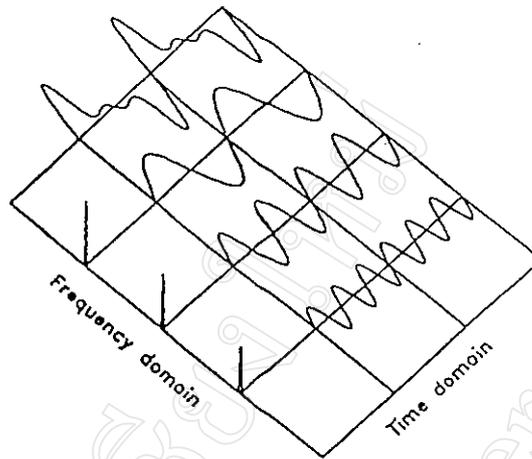
$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (20)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)e^{+j2\pi ft} dt \quad (21)$$

โดย f คือความถี่

t คือเวลา

ลักษณะการแปลงสัญญาณระหว่างโดเมนเวลาและโดเมนความถี่ดังแสดงในรูป 2.3 เมื่อโดเมนเวลาซ้ายมือสุดประกอบกันขึ้นจากโดเมนเวลา 3 ชุด ทางขวามือและ FFT จะแสดงให้เห็นเป็นโดเมนความถี่ 3 ความถี่ ทำให้สะดวกต่อการวิเคราะห์



รูปที่ 2.3 ลักษณะความสัมพันธ์ระหว่างโดเมนความถี่และโดเมนเวลา

พิจารณาหลักเกณฑ์ของการแปลงฟูรีเยร์สัญญาณเต็มหน่วย (Discrete Fourier Transform, DFT) มีการใช้กันอย่างกว้างขวางในงานด้านการวิเคราะห์สัญญาณเชิงตัวเลข (Digital Signal Processing, DSP) เพื่อวิเคราะห์สัญญาณลักษณะที่เป็นสัญญาณเต็มหน่วยเวลา (Discrete time) ซึ่งจะทำการแปลงสัญญาณเต็มหน่วยเวลาไปเป็นสัญญาณเต็มหน่วยในเทอมของความถี่ (Discrete frequency) ในการแปลงฟูรีเยร์สัญญาณที่เป็นแบบเต็มหน่วยโดยตรงนั้น มีขั้นตอนในการคำนวณเป็นจำนวนมาก จึงได้มีการเพิ่มประสิทธิภาพของการคำนวณในการแปลงฟูรีเยร์สัญญาณที่มีลักษณะเป็นสัญญาณเต็มหน่วย เรียกว่า การแปลงฟาสต์ฟูรีเยร์ (Fast Fourier Transform, FFT) โดยจะสามารถลดขั้นตอนที่จำเป็นในการคำนวณลงได้

พิจารณาจำนวนการคำนวณ (Number of Operations) โดยกำหนดให้ $m(r)$ คือ จำนวนการคูณจำนวนเชิงซ้อน และ $a(r)$ คือ จำนวนการบวกจำนวนเชิงซ้อน โดยที่จำนวนจุดตัวอย่าง (N) เท่ากับ 2^r (r เป็นจำนวนเต็ม)

ผลของการแปลงฟูรีเยร์สัญญาณเต็มหน่วย ได้จำนวนการทำงาน

$$m(r) = 2^r \cdot 2^r = N^r$$

และ
$$a(r) = 2^r \cdot (2^r - 1) = N(N-1)$$

ผลของการแปลงฟาสต์ฟูรีเยร์ ได้จำนวนการทำงาน

$$\begin{aligned} m(r) &= (1/2) 2^r \log_2 2^r \\ &= (1/2) N \log_2 N \\ &= (1/2) N \cdot r \quad , r > 1 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
 a(r) &= 2^r \log_2 2^r \\
 &= N \log_2 N \\
 &= N.r \quad , r > 1
 \end{aligned}$$

สำหรับการแปลงฟาสท์ฟูเรียร์ในขั้นพื้นฐาน สามารถแบ่งชนิดการแปลงฟาสท์ฟูเรียร์ได้เป็น 2 แบบ คือ

- (1) การคำนวณในเทอมของความถี่ (Decimation in frequency, DIF)
- (2) การคำนวณในเทอมของเวลา (Decimation in time, DIT)

ในหัวข้อนี้จะบรรยายการคำนวณการแปลงฟูเรียร์ สัญญาณที่เป็นสัญญาณเต็มหน่วย N จุด ซึ่งเป็นการคำนวณในเทอมของความถี่ โดยใช้แนวคิดแบบใช้สัญญาณทีละ 2 จุด

2.4.1 การแปลงฟูเรียร์สัญญาณเต็มหน่วย (Discrete Fourier Transform, DFT)

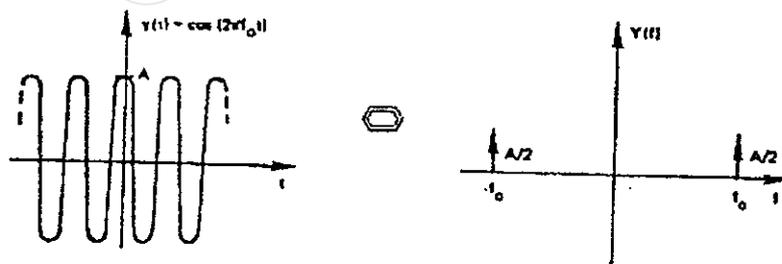
พิจารณาการแปลงฟูเรียร์สัญญาณต่อเนื่อง (Analog signal, $x(t)$) หาได้จาก

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-j\omega t] dt \tag{22}$$

เมื่อ $X(\omega)$ คือ เทอมฟังก์ชันที่เปลี่ยนแปลงตามความถี่

$x(t)$ คือ เทอมของฟังก์ชันที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

ผลจากสมการ (22) แสดงรูปการแปลงเทอมฟังก์ชันที่เปลี่ยนแปลงตามเวลามาเป็นเทอมฟังก์ชันที่เปลี่ยนแปลงตามความถี่ ดังรูปที่ 2.4 ซึ่งเป็นลักษณะการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณต่อเนื่อง



รูปที่ 2.4 แสดงสัญญาณไซน์และการแปลงฟูเรียร์สัญญาณไซน์ต่อเนื่อง

หลักการในการแปลงฟูเรียร์โดยใช้คอมพิวเตอร์นั้นไม่สามารถใช้สัญญาณต่อเนื่องได้ จึงจำเป็นต้องทำการแปลงฟูเรียร์สัญญาณเต็มหน่วยให้อยู่ในลักษณะสัญญาณที่เป็นจุดตัวอย่าง (Sampled signal, $x[n]$) ดังนั้นจากผลดังกล่าวจึงสามารถเปลี่ยนแปลงสมการ (22) ให้อยู่ในสมการของผลรวมของสัญญาณที่เป็นจุดตัวอย่างดังนี้

$$X(K) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)W; k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (23)$$

พิจารณาสมการ (23) เนื่องจากไม่สามารถทำการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ได้ เพราะเวลาที่ใช้มีระยะเวลายาวนานมาก ดังนั้นการทำงานจริงต้องมีการกำหนดเวลาที่แน่นอน โดยที่ลักษณะการกำหนดช่วงเวลาการแปลงฟูเรียร์ อาศัยหลักการของวินโดว์ (window) ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อ 2.5 และในการวิเคราะห์ทั่วไปอาศัยวินโดว์แบบสี่เหลี่ยมเพื่อให้เข้าใจง่าย ดังนั้นทอมของฟังก์ชันที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาจึงมีค่าเท่าเดิมทุกค่า แต่เวลาที่ใช้จะลดลงเหลือเพียง "0" ถึง $(N-1)T$ ตามสมการที่ (24)

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nK} \quad (24)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$\text{หรือ} \quad X(k) = x(0) + x(1)W_N^k + x(2)W_N^{2k} + \dots + x(N-1)W_N^{(N-1)k}$$

กรณี $N = 4$ แสดงผลของสมการ (24) ได้ดังนี้

$$X(0) = x_0(0)W^0 + x_0(1)W^0 + x_0(2)W^0 + x_0(3)W^0 \quad (25)$$

$$X(1) = x_0(0)W^0 + x_0(1)W^1 + x_0(2)W^2 + x_0(3)W^3$$

$$X(2) = x_0(0)W^0 + x_0(1)W^2 + x_0(2)W^4 + x_0(3)W^6$$

$$X(3) = x_0(0)W^0 + x_0(1)W^3 + x_0(2)W^6 + x_0(3)W^9$$

และแสดงผลของสมการ (25) ในรูปเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (26)$$

เมื่อ $x(nT)$ เขียนแทนด้วย $x(n)$

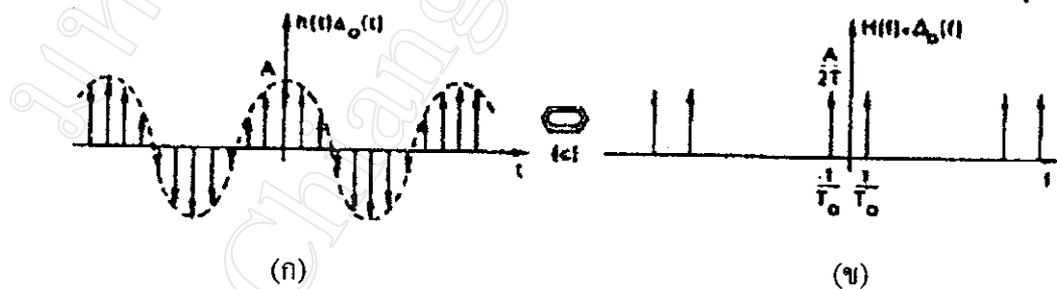
W_N คือ ค่าทวีคูณแฟกเตอร์ (Twiddle factor) $= e^{j2\pi/N}$

T คือ ช่วงเวลาระหว่างจุดตัวอย่าง (sampling period)

N คือ จำนวนจุดตัวอย่าง

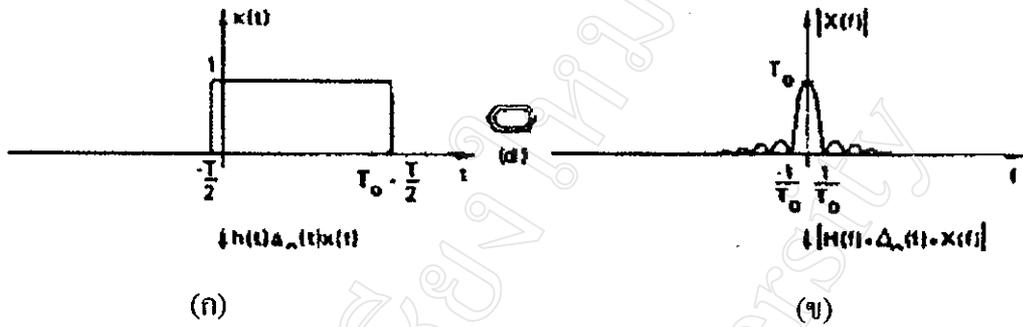
พิจารณาสมการ (26) เนื่องจาก W_N และ $X_0(k)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้นในการคำนวณเมทริกซ์ต้องคูณจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด N^2 ครั้ง และเกิดการบวกจำนวนเชิงซ้อน $N(N-1)$ ครั้ง

ตัวอย่างการแปลงสัญญาณไซน์โดยใช้ DFT ในรูปที่ 2.5 (ก) แสดงรูปคลื่นไซน์และผลการแปลงด้วย DFT ออกมาเป็นสเปกตรัม ตามรูปที่ 2.5 (ข)



รูปที่ 2.5 แสดงสัญญาณไซน์และการแปลงฟูเรียร์สัญญาณด้วย DFT

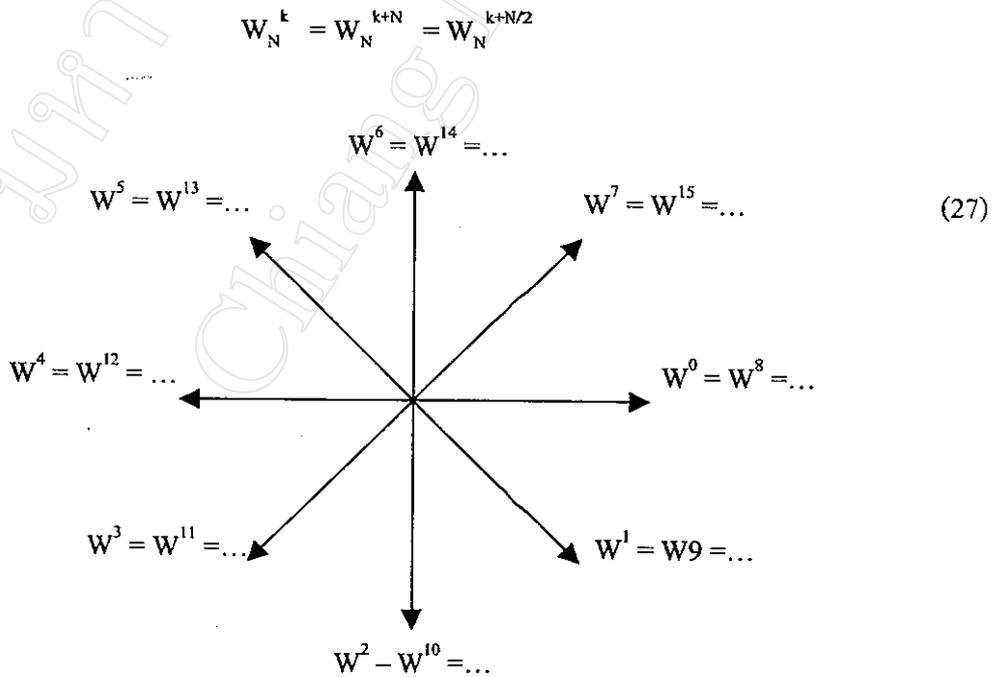
ตัวอย่างการแปลงสัญญาณสี่เหลี่ยมด้วย DFT โดยรูปที่ 2.6 (ก) แสดงรูปคลื่นสี่เหลี่ยมและผลการแปลงด้วย DFT ออกมาเป็นสเปกตรัม ส่วนรูปที่ 2.6 (ข) แสดงการนำสัญญาณไซน์หลาย ๆ ความถี่มารวมกันจนรูปสัญญาณใกล้เคียงกับรูปคลื่นสี่เหลี่ยมและแสดงผลการแปลงด้วย DFT ตามลำดับ



รูปที่ 2.6 แสดงสัญญาณรูปสี่เหลี่ยม

2.4.2 การแปลงฟาส์ฟูเรียร์

การแปลงฟาส์ฟูเรียร์ ก็คือ แนวคิดใหม่ในการคำนวณหาค่าจากสมการ (24) โดยใช้ประโยชน์จากการที่ค่าทวิเคินส์แฟลคเตอร์มีความสมมาตรตามสมการ (27) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 แสดงการสมมาตรของค่าทวิเคินส์แฟลคเตอร์

2.4.2.1 การแปลงฟาส์ฟูเรียร์ คำนวณในทอมความถี่

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมาพบว่า การแปลงด้วย FFT สามารถลดจำนวนขั้นตอนในการคำนวณตัวเลขจำนวนเชิงซ้อนได้ โดยการกระจายการแปลงฟูเรียร์สัญญาณเต็มหน่วย N จุดออกเป็นการแปลงแบบ DFT ที่มีจำนวนจุดน้อยกว่า โดยเรียงลำดับกันไป โดยที่จำนวนจุด (Radix) หมายถึงจำนวนจุดของสัญญาณที่น้อยที่สุดที่ใช้ในการแปลงแบบ DFT ต่อไปจะเป็นการสร้างแนวคิดในการแปลงด้วย FFT แบบสัญญาณที่ละ 2 จุด

พิจารณาสัญญาณเต็มหน่วย $x(n)$ ที่มีจำนวนตัวอย่างทั้งหมด N จุด จึงสามารถแยกจำนวนตัวอย่างทั้งหมดออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กันได้ ดังนี้

ส่วนที่ 1 ได้แก่ $x(0), x(1), x(2), \dots, x(N/2-1)$

ส่วนที่ 2 ได้แก่ $x(N/2), x(N/2+1), x(N/2+2), \dots, x(N-1)$

สามารถเขียนให้อยู่ในลักษณะเดียวกับสมการ (24) ได้โดยแยกออกเป็น 2 ส่วนได้เช่นกัน ดังนี้

$$X(K) = \sum_{n=0}^{M-1} x(n)W_N^{nk} + \sum_{n=M}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \quad (28)$$

เมื่อ $M = N/2$

กำหนดให้ $n = n + N/2 = n + M$ แทนลงในพจน์สุดท้ายของสมการ (27) ได้ว่า

$$X(K) = \sum_{n=0}^{M-1} x(n)W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{M-1} x(n+M)W_N^{nk}W_N^{KM} \quad (29)$$

เมื่อแทนค่า $W_N^{KM} = e^{-jk} = (-1)^k$ ในสมการ (29) จะได้ว่า

$$X(k) = \sum_{n=0}^{M-1} [x(n) + (-1)^k x(n+M)]W_N^{nk} \quad (30)$$

เนื่องจาก $(-1)^k = 1$, สำหรับ k ที่เป็นเลขคู่
 $= -1$, สำหรับ k ที่เป็นเลขคี่

จากที่ค่า $(-1)^k$ มีค่าที่เป็นไปได้เพียง 2 ค่า จึงสามารถแยกสมการที่ (30) ออกเป็น 2 สมการได้ ดังนี้

$$X(k) = \sum_{n=0}^{M-1} [x(n) + x(n+M)] W_N^{nk} \quad (31)$$

$k = \text{จำนวนคู่}$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{M-1} [x(n) - x(n+M)] W_N^{nk} \quad (32)$$

$k = \text{จำนวนคี่}$

และพิจารณาสมการ (31) ซึ่งเป็นสมการสำหรับ k ที่เป็นเลขคู่ จะกำหนดให้ $k=2k$ จะได้

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{M-1} [x(n) + x(n+M)] W_N^{2nk} \quad (33)$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, \dots, N/2-1$

พิจารณาสมการที่ (5.12) ซึ่งเป็นสมการสำหรับ k ที่เป็นเลขคี่ กำหนดให้ $k=2k+1$ จะได้

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{M-1} [x(n) - x(n+M)] W_N^n W_N^{2nk} \quad (34)$$

เมื่อ $k=0, 1, 2, \dots, N/2-1$

กำหนดให้ $a(n) = x(n) + x(n+M)$ (35)

$b(n) = x(n) - x(n+M)$ (36)

เมื่อ $n = 0, 1, 2, \dots, M-1$

เนื่องจากผลรวมของ $X(2k)$ และ $X(2k+1)$ ก็คือ การแปลงฟูรีเยร์ N จุด

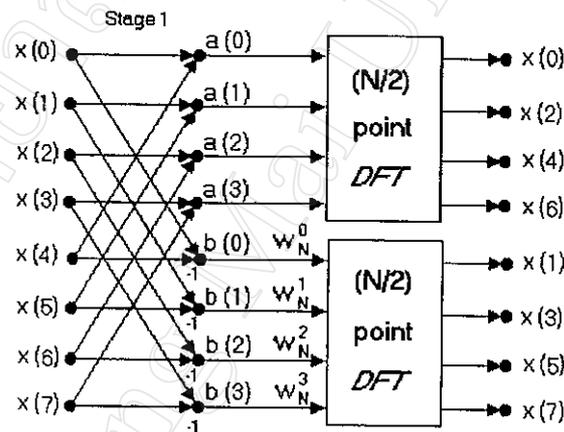
$$X(k) = X(2k) + X(2k+1)$$

เมื่อแทนค่า $X(2k)$ และ $X(2k+1)$ ก็จะได้ $X(k)$ ดังนี้

$$X(k) = \sum_{n=0}^{M-1} a(n)W_M^{nk} + \sum_{n=0}^{M-1} b(n)W_M^{nk}W_N^n \tag{37}$$

โดยที่ $W_N^{2nk} = W_M^{nk}$

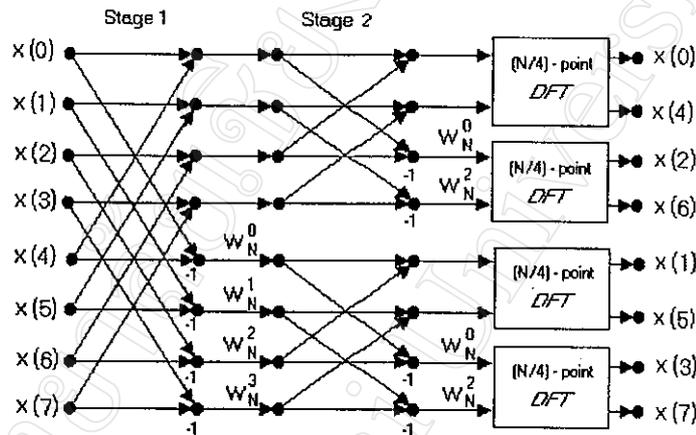
แสดงผลของสมการที่ (37) ด้วยลักษณะโพล์กราฟ (flow graph) ตามรูปที่ 2.8



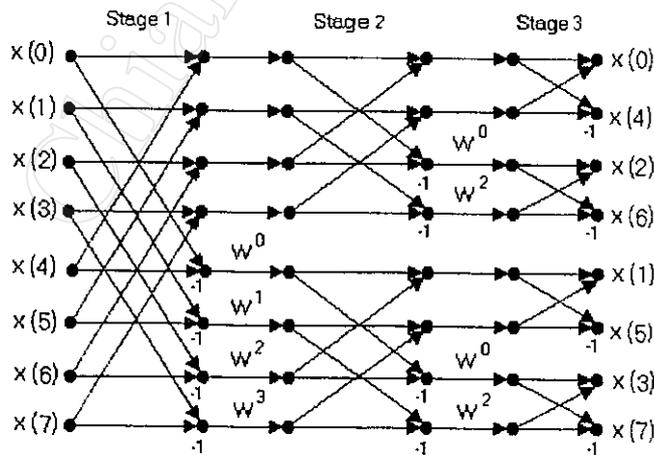
รูปที่ 2.8 การแยกการแปลงฟูรีเยร์สัญญาณ N จุด ออกเป็นการแปลงฟูรีเยร์สัญญาณ $N/2$ -จุด 2 ครั้ง

จากรูปที่ 2.8 จะเห็นได้ว่าการเรียงลำดับของค่าที่ได้ทางด้านขวามือจะไม่ตรงกับค่าที่ป้อนทางด้านซ้ายมือ ดังนั้นในรูปที่ 2.9 เป็นการแสดงการแยก DFT ในขั้นตอน (Stage) ที่ 2 และในรูปที่ 2.10 แสดงรูปสำเร็จของ 8 จุด DFT หลังจากที่ได้ทำการกระจายเรียบร้อยแล้ว ซึ่งเป็นวิธีการที่เรียกว่า การแปลงฟูรีเยร์โดยใช้การคำนวณในเทอมของความถี่ ซึ่งสังเกตได้ว่าขั้นตอนการคำนวณจะประกอบด้วย r ขั้นตอน เมื่อ $N=2^r$ และในระหว่างที่มีการคำนวณนั้น จะใช้หน่วยความจำของพีซีเพียงชุดเดียว กล่าวคือ ค่าที่คำนวณได้จะถูกแทนลงในตำแหน่ง

ของค่าที่นำมาใช้คำนวณ ซึ่งวิธีการเช่นนี้เรียกว่า การแปลงแบบแทนที่ (in-place transform) ในระหว่างการคำนวณแบบจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้นขนาดของหน่วยความจำที่จำเป็นต้องใช้เท่ากับ N หน่วยความจำ สำหรับเทอมที่เป็นจำนวนจริง และ N หน่วยความจำสำหรับเทอมที่เป็นจำนวนจินตภาพรวมเป็น $2N$ หน่วยความจำที่ใช้ในการเก็บข้อมูล และจำเป็นจะต้องมีหน่วยความจำอีกส่วนหนึ่งไว้สำหรับเก็บค่าทวิคูณสเฟกเตอร์



รูปที่ 2.9 แสดงการแยกการแปลงฟูเรียร์สัญญาณ N -จุด ออกเป็นการแปลงฟูเรียร์สัญญาณ $N/4$ จุด 4 ครั้ง



รูปที่ 2.10 แสดงการแปลงฟาสต์ฟูเรียร์สัญญาณ 8-จุด จำนวนในเทอมของความถี่

จากการกระจาย N จุด ด้วย DFT ให้เป็น N/2 จุด DFT สองครั้ง เมื่อดำเนินการเช่นเดียวกันกับข้างต้นซ้ำอีก กล่าวคือ ทำการกระจาย N/2-point DFT แต่ละส่วนออกเป็น N/4 จุด-DFT อีกสองส่วนทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งการกระจายไปถึงขั้นสุดท้าย 2 จุด-DFT จำนวน N/2 ครั้ง ซึ่งจะไม่สามารถกระจายได้อีกต่อไปอีก

พิจารณา 2 จุด-DFT จากสมการที่ (24) จะได้ว่า

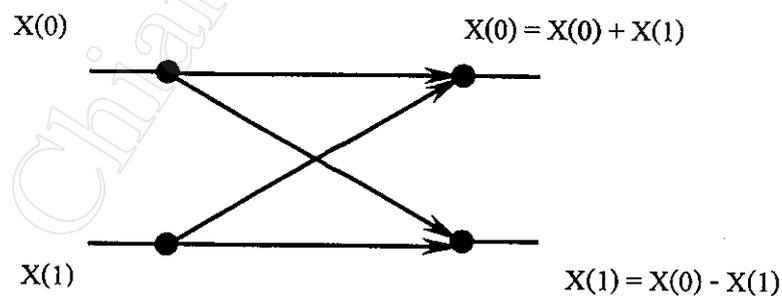
$$X(k) = \sum_{n=0}^1 x(n)W_2^{nk} \quad (38)$$

จากสมการ (38) สามารถหาค่า $X(0)$ และ $X(1)$ ได้ ดังนี้

$$X(0) = x(0)W_2^0 + x(1)W_2^0 = x(0) + x(1) \quad (39)$$

$$X(1) = x(0)W_2^0 + x(1)W_2^1 = x(0) - x(1) \quad (40)$$

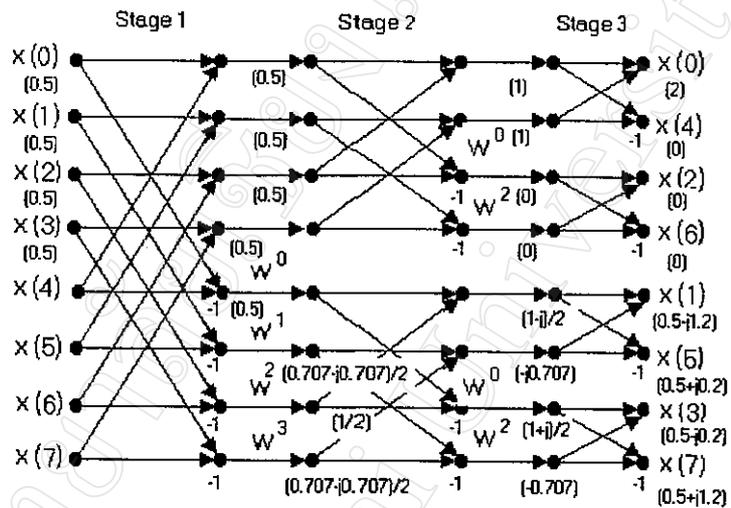
จากสมการ (39) และ (40) จะเห็นได้ว่าการบวกเพียงแค่ 2 ครั้ง และไม่มีการคูณเกิดขึ้นเลย เนื่องจากค่าทวีคูณสเฟลเตอร์ มีค่าเท่ากับ 1 ดังนั้นสมการทั้ง 2 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปโพลีกราฟ ตามรูปที่ 2.11 ดังนี้



รูปที่ 2.11 แสดงวิธีการคำนวณฟาสต์ฟูเรียร์ 2 จุด

เพื่อสร้างให้เกิดความเข้าใจในขั้นตอนการแปลงฟาสต์ฟูเรียร์ยิ่งขึ้น ขอยกตัวอย่างของการแปลง FFT ที่มีจุดตัวอย่างทั้งหมด 8 ตัวอย่าง โดยใช้การคำนวณในเทอมของความถี่ และใช้จุดตัวอย่างทีละ 2 จุด (8-point FFT Radix-2 Decimation-in-Frequency) เมื่อจุดตัวอย่าง

สัญญาณมีลักษณะเป็นสัญญาณรูปสี่เหลี่ยม โดยได้แสดงค่าไว้ทางด้านซ้ายมือของรูปที่ 2.12 อันดับแรกจะต้องทำการคำนวณหาค่าทวีคูณสี่แฟกเตอร์ที่ใช้สำหรับการแปลงฟาสต์ฟูเรียร์ เมื่อมีจุดตัวอย่างทั้งหมด 8 จุด เสียก่อน โดยสามารถหาได้จาก $W_N = e^{j2\pi/N}$



รูปที่ 2.12 ค่าที่ได้จากการแปลงฟาสต์ฟูเรียร์สัญญาณ 8 จุด โดยใช้การคำนวณในเทอมของความถี่และใช้จุดตัวอย่างที่ละ 2 จุด

เมื่อแทนค่า $N = 8$ ก็จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$W^0 = 1$$

$$W^1 = e^{-j2\pi/8} = \cos(\pi/4) - j\sin(\pi/4) = 0.707 - j0.707$$

$$W^2 = e^{-j4\pi/8} = \cos(\pi/2) - j\sin(\pi/2) = -j$$

$$W^3 = e^{-j6\pi/8} = \cos(3\pi/4) - j\sin(3\pi/4) = -0.707 - j0.707$$

$$W^4 = e^{-j8\pi/8} = \cos(\pi) - j\sin(\pi) = -1$$

$$W^5 = e^{-j10\pi/8} = \cos(5\pi/4) - j\sin(5\pi/4) = -0.707 + j0.707$$

$$W^6 = e^{-j12\pi/8} = \cos(3\pi/2) - j\sin(3\pi/2) = +j$$

$$W^7 = e^{-j14\pi/8} = \cos(7\pi/4) - j\sin(7\pi/4) = 0.707 + j0.707$$

ในตัวอย่างนี้จะขอแสดงวิธีการคำนวณหาค่า $X(3)$ เพียงค่าเดียวเท่านั้น เนื่องจากสามารถใช้หลักการเดียวกันนี้ในการหาค่าอื่น ๆ ได้ต่อไป โดยขั้นตอนการคำนวณหาค่า $X(3)$ แสดงดังนี้

(1) ค่าที่ได้หลังจากขั้นตอนที่ 1

$$x(4) = [x(0)+x(4)] W^0$$

$$x(5) = [x(1)+x(5)] W^1$$

$$x(6) = [x(0)+x(6)] W^2$$

$$x(7) = [x(0)+x(7)] W^3$$

(2) ค่าที่ได้หลังจากขั้นตอนที่ 2

$$\text{หา } x(6) \text{ จาก } x(6) = [x(4) - x(6)] W^0$$

เมื่อ $x(4)$ และ $x(6)$ คือค่าที่ได้หลังจากขั้นตอนที่ 1

$$\text{แทนค่า } x(6) = \{ [x(0) - x(4)] W^0 - [x(2) - x(6)] W^2 \} W^0$$

$$x(6) = [x(0) x(4)] W^0 - [x(2) - x(6)] W^2$$

$$\text{หาค่า } x(7) = [x(5) - x(7)] W^2$$

เมื่อ $x(5)$ และ $x(7)$ คือ ค่าที่ได้หลังจากขั้นตอนที่ 1

$$\text{แทนค่า } x(7) = \{ [x(1) - x(5)] W^1 + [x(3) - x(7)] W^3 \} W^2$$

$$x(7) = [x(1) x(5)] W^3 - [x(3) - x(7)] W^1$$

(3) ค่าที่ได้หลังจากขั้นตอนที่ 3

$$x(3) = [x(6)+x(7)] W^0$$

เมื่อ $x(6)$ และ $x(7)$ คือ ค่าที่ได้หลังจากขั้นตอนที่ 2

แทนค่าก็จะได้ค่า $x(3)$ ที่ต้องการ

$$x(3) = \{ [x(0)x(4)] W^0 + [x(2) x(6)] W^2 \} + \{ [x(1)x(5)] W^3 + x(3)x(7) \} W^1 \quad (41)$$

เมื่อเทียบค่าที่ได้กับค่าที่ได้จากสมการที่ (24)

$$x(3) = x(0) W^0 + x(1) W^3 + x(2) W^6 + x(3) W^9 + x(4) W^{12} + x(5) W^{15} + x(6) W^{18} + x(7) W^{21}$$

แทนค่าโดยอาศัยสมการที่ (24)

$$x(3) = x(0) W^0 + x(1) W^3 + x(2) W^2 + x(3) W^1 + x(4) W^0 + x(5) W^3 + x(6) W^2 + x(7) W^1 \quad (42)$$

จะเห็นว่าค่าที่ได้ตามสมการ (41) และ (42) ทั้งสองวิธีมีค่าเท่ากัน สำหรับค่าที่
ต้องการอื่น ๆ สามารถคำนวณหาได้โดยใช้หลักการเช่นเดียวกัน ซึ่งได้คำตอบตามที่แสดงไว้
ในรูปที่ 2.12

2.4.2.2 คำตอบของ FFT

ผลจากการแปลงสัญญาณด้วย FFT มีข้อกำหนดต่าง ๆ ดังนี้

- (1) ช่วงห่างของความถี่ (interval frequency, f_0) เท่ากับ $1/NT$ โดยที่ N คือ จำนวน
จุดตัวอย่าง และ T คือ ช่วงห่างของเวลาในแต่ละจุดตัวอย่าง
- (2) ผลที่เกิดขึ้นในแต่ละความถี่ ($0, f_0, 2f_0, 3f_0, \dots, f_0/2$) เป็นเซลล์คำตอบ (resolution
cell) ของ FFT
- (3) ค่าที่ได้ในแต่ละเซลล์คำตอบ อยู่ในรูปจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้น จึงสามารถปรับค่าที่
ได้นี้ให้อยู่ในรูปของขนาดและมุมเฟส เช่นเดียวกับการแปลงจากรูปแบบเรกแทนกูล่า (rectangular
form) มาเป็นรูปแบบโพลาร์ (polar form) ในการแปลงจำนวนเชิงซ้อน

$$X(f) = R(f) + I(f) = |X(f)| \Theta^{j\theta(f)}$$

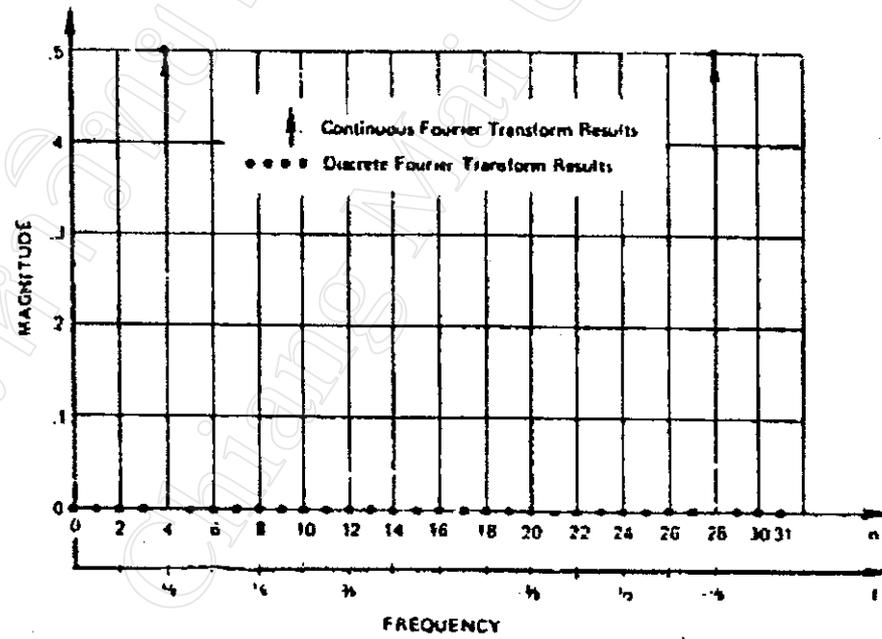
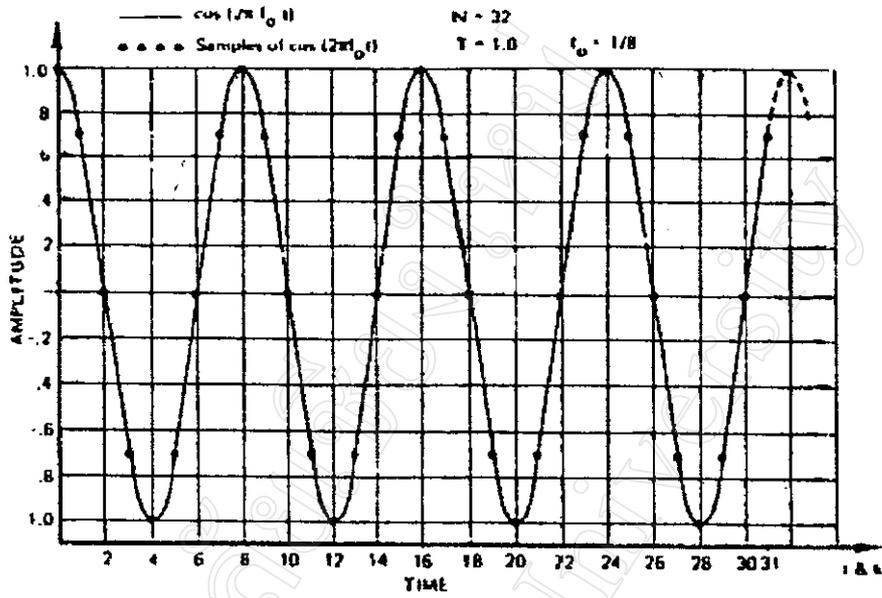
เมื่อ $R(f)$ คือ ส่วนจำนวนจริงจากการแปลงด้วย FFT

$I(f)$ คือ ส่วนจำนวนจินตภาพจากการแปลงด้วย FFT

$|X(f)|$ คือ ขนาดหรือสเปกตรัมของการแปลงฟูเรียร์ $x(t)$ เท่ากับ $\sqrt{R^2(f) + I^2(f)}$

$\theta(f)$ คือ มุมเฟสของการแปลงฟูเรียร์ $x(t)$ เท่ากับ $\tan^{-1} [I(f)/R(f)]$

ตัวอย่างการแปลงสัญญาณไซน์ด้วย FFT ซึ่งมีความถี่ในการแซมปิ้ง 1 หน่วยและ
ความถี่มูลฐาน $1/8$ หน่วย จำนวนข้อมูลทั้งหมด 32 จุด แสดงดังรูปที่ 2.13



รูปที่ 2.13 ตัวอย่างการแปลงสัญญาณไซน์ด้วย FFT

2.5 วินโดว์ (Window or Weighting function, w_R)

พิจารณาจากหลักการของการใช้คอมพิวเตอร์ในการช่วยแก้ปัญหาจากการแปลงฟูรีเยร์ นั้น ไม่สามารถกระทำรูปสัญญาณต่อเนื่องได้ จึงต้องพิจารณาสัญญาณในรูปของสัญญาณเต็มหน่วย ตามสมการ (23) และจากขั้นตอนการทำงานจริงนั้น เราไม่สามารถมีลิมิตเวลาที่ $-\infty$ ถึง ∞ ได้เป็นผลต้องกำหนดเวลาในการคำนวณที่แน่นอน ดังนั้นหลักการของวินโดว์จะนำมาใช้ในการกำหนดเวลาที่แน่นอนให้กับสัญญาณที่จะทำการแปลงฟูรีเยร์

หลักการในการทำวินโดว์อาศัยทฤษฎีคอนโวลูชันความถี่ (frequency convolution theorem) โดยพิจารณาตามสมการ (43)

$$y(t) = x(t) w_R(t) \Leftrightarrow Y(f) = X(f) \times W_R(f) \quad (43)$$

เมื่อ $x(t)$ คือ สัญญาณที่ต้องการแปลงฟูรีเยร์แสดงในเทอมของเวลา

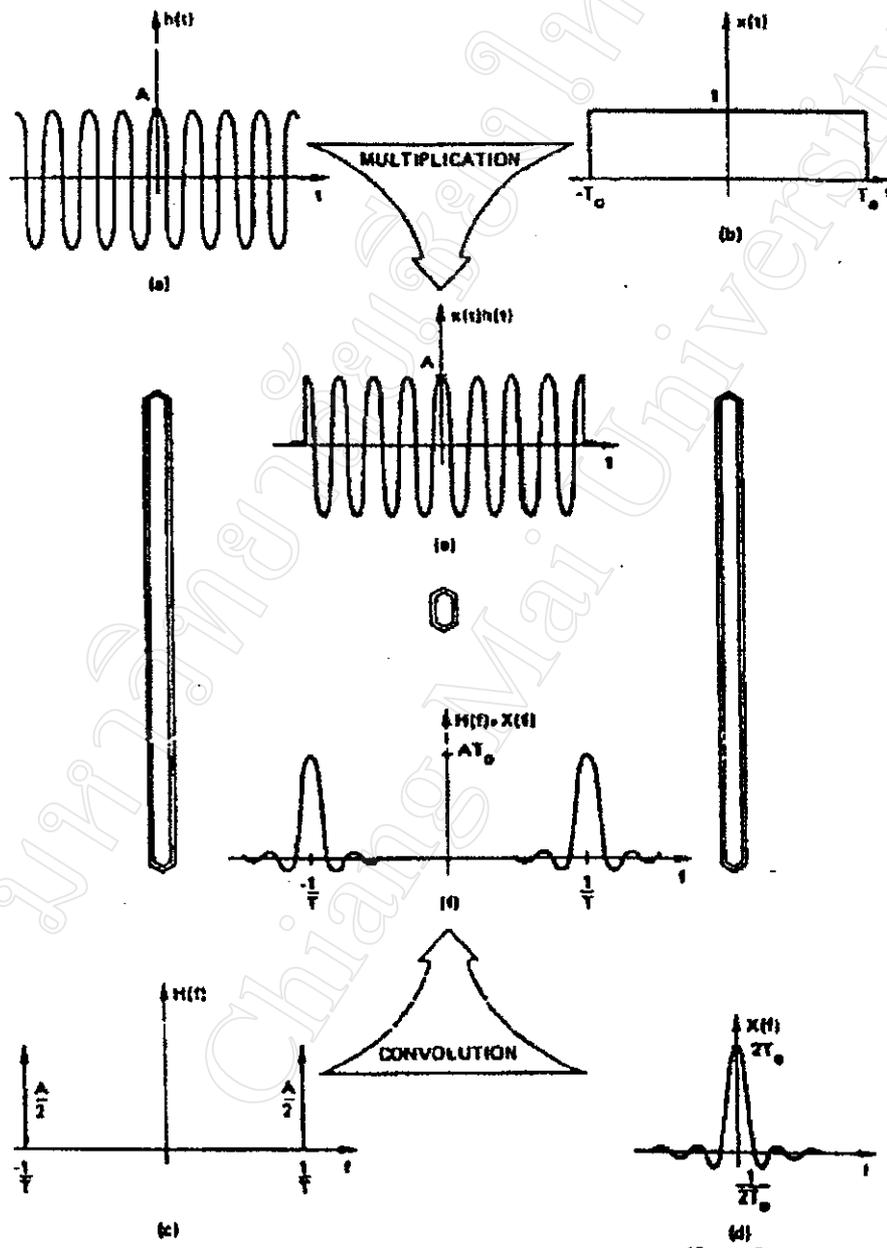
$w_R(t)$ คือ ฟังก์ชันในเทอมของเวลาของวินโดว์

$X(f)$ คือ ฟังก์ชันในเทอมของความถี่จากการแปลงฟูรีเยร์ฟังก์ชัน $x(t)$

$W_R(f)$ คือ ฟังก์ชันในเทอมของความถี่จากการแปลงฟูรีเยร์ฟังก์ชัน $w_R(t)$

จากสมการ (43) จะเห็นว่าฟังก์ชันเทอมของเวลาคูณกัน แล้วแปลงฟูรีเยร์จะได้ฟังก์ชันในเทอมของความถี่ของกลุ่มสัญญาณนั้นนำมาคอนโวลูชัน แสดงดังรูปที่ 2.14

พิจารณาดังรูปที่ 2.14 พบว่าเวลาที่ใช้ในการแปลงฟูรีเยร์มีคาบเวลาเท่ากับ 8 ไซเคิล ซึ่งจะเห็นว่าการแปลงฟูรีเยร์นี้กระทำที่เวลาไม่เท่ากับ $-\infty$ ถึง ∞ ดังนั้น ค่าที่ได้จริงจึงผิดพลาดไปจากความเป็นจริงโดยความผิดพลาดเกิดขึ้นมากหรือน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับชนิดของวินโดว์ที่นำมาคูณกับสัญญาณรูปคลื่นที่ต้องการแปลงฟูรีเยร์ รูปที่ 2.15 แสดงการสุมสัญญาณที่ครบคาบทำให้ไม่เกิดการรั่วไหลของสเปกตรัม (Spectral leakage) และรูปที่ 2.16 แสดงการสุมสัญญาณที่ไม่ครบคาบและไม่ได้ใช้ Window ทำให้เกิดการรั่วไหลของสเปกตรัมหรือสเปกตรัมที่ได้จะมีความผิดพลาดสูง



รูปที่ 2.14 แสดงคอนวลูชันของสัญญาณตามสมการ (43)

2.5.1 ชนิดและคุณสมบัติของ Window Functions แบบต่าง ๆ

จากที่กล่าวข้างต้นแล้วว่าการใช้การวินโดว์ในสัญญาณที่เป็นโดเมนเวลาจะเทียบเคียงได้กับการคูณสัญญาณนั้นด้วยวินโดว์ฟังก์ชัน และเนื่องจากการคูณสัญญาณในโดเมนเวลาจะทำให้ค่าของสเปกตรัมหรือค่าของโดเมนความถี่เปลี่ยนแปลงด้วย ดังนั้นการใช้วินโดว์จะเปลี่ยนรูปร่างของสัญญาณที่เป็นโดเมนเวลา และก็จะส่งผลต่อสเปกตรัมด้วย

วินโดว์มีหลายชนิดแต่ละชนิดจะขึ้นอยู่กับลักษณะการนำใช้งาน และสามารถแบ่งชนิดของวินโดว์ได้เป็น 9 ชนิดคือ

(1) Rectangular window (None)

วินโดว์แบบ Rectangular มีค่าเท่ากับ 1.0 ตลอดช่วง โดยสามารถเขียนเป็นสมการได้คือ

$$W[n] = 1.0 \quad (44)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$N = \text{จำนวนข้อมูล}$$

การใช้วินโดว์แบบ Rectangular จะเทียบเคียงกับการไม่ได้ใช้วินโดว์ใด ๆ เนื่องจากวินโดว์นี้จะทำให้สัญญาณอยู่ในช่วงเวลาที่จำกัดเท่านั้น ดังนั้นวินโดว์แบบ Rectangular จะมีการรั่วไหลของสเปกตรัมมากที่สุด

วินโดว์แบบ Rectangular เหมาะสำหรับนำไปใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณชั่วขณะ (Transient) ซึ่งมีช่วงระยะเวลาสั้นกว่าช่วงเวลาของวินโดว์ และรูปที่ 2.15 แสดงวินโดว์แบบ Rectangular สำหรับจำนวนข้อมูล $N = 32$

(2) Hanning window

วินโดว์แบบ Hanning จะมีลักษณะเป็นรูปครึ่งรอบของสัญญาณโคไซน์ โดยสามารถเขียนเป็นสมการได้คือ

$$W(n) = 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n/N) \quad (45)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$N = \text{จำนวนข้อมูล}$$

วินโดว์แบบ Hanning เหมาะสำหรับนำไปใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณชั่วขณะ ที่มีช่วงเวลายาวกว่าช่วงเวลาของวินโดว์ สัญญาณที่มีความถี่ใกล้เคียงกันแต่แอมพลิจูดต่างกันมาก และยังเหมาะสมสำหรับใช้งานอื่น ๆ ทั่วไป (General purpose) และรูปที่ 2.16 แสดงวินโดว์แบบ Hanning จำนวนข้อมูล $N = 32$

(3) Hamming window

วินโดว์นี้ปรับปรุงมาจากวินโดว์แบบ Hanning มีรูปร่างคล้ายกับครึ่งรอบของสัญญาณโคไซน์ แต่ที่จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของวินโดว์จะไม่เริ่มต้นที่ศูนย์ ทำให้ไม่สามารถใช้กับสัญญาณที่ความถี่มีค่าใกล้เคียงของวินโดว์ได้ โดยสามารถเขียนเป็นสมการได้คือ

$$W(n) = 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/N) \quad (46)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$N = \text{จำนวนข้อมูล}$$

และรูปที่ 2.17 แสดงวินโดว์แบบ Hamming จำนวนข้อมูล $N = 32$

(4) Blackman Harris window

วินโดว์นี้ปรับปรุงมาจากวินโดว์แบบ Hanning โดยสามารถเขียนเป็นสมการได้คือ

$$W(n) = 0.422323 - 0.49755 \cos(2\pi n/N) + 0.07922 \cos(4\pi n/N) \quad (47)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$N = \text{จำนวนข้อมูล}$$

วินโดว์แบบ Blackman Harris เหมาะสำหรับนำไปใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณที่มีความถี่ใกล้เคียงกันแต่แอมพลิจูดต่างกันมาก และรูปที่ 2.18 แสดงวินโดว์แบบ Blackman Harris จำนวนข้อมูล $N = 32$

(5) Exact Blackman window

วินโดว์นี้ปรับปรุงมาจากวินโดว์แบบ Hanning โดยสามารถเขียนเป็นสมการได้คือ

$$W(n) = (7938/18608) - (9240/18608)*\cos(2\pi n/N) + (1430/18608)*\cos(4\pi n/N) \quad (48)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$N = \text{จำนวนข้อมูล}$$

วินโดว์แบบ Exact Blackman เหมาะสำหรับนำไปใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณที่ความถี่ใกล้เคียงกันแต่แอมพลิจูดต่างกันมาก และรูปที่ 2.19 แสดงวินโดว์แบบ Exact Blackman จำนวนข้อมูล $N = 32$

(6) Blackman window

วินโดว์นี้ปรับปรุงมาจากวินโดว์แบบ Hanning โดยสามารถเขียนเป็นสมการได้คือ

$$W(n) = 0.42 - 0.50*\cos(2\pi n/N) + 0.08*\cos(4\pi n/N) \quad (49)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$N = \text{จำนวนข้อมูล}$$

วินโดว์แบบ Blackman เหมาะสำหรับนำไปใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณที่ความถี่ใกล้เคียงกันแต่แอมพลิจูดต่างกันมาก แต่จะไม่เหมาะสมกับความถี่ที่อยู่ใกล้ที่ขอบหรือความถี่ที่จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของวินโดว์เนื่องจากแอมพลิจูดที่ขอบของวินโดว์มีค่าสูง และรูปที่ 2.20 แสดงวินโดว์แบบ Blackman จำนวนข้อมูล $N = 32$

(7) Flattop window

วินโดว์แบบ Flattop สามารถเขียนเป็นสมการได้คือ

$$W(n) = 0.2810638602 - 0.5208971735*\cos(2\pi n/N) + 0.1980389663*\cos(4\pi n/N) \quad (50)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$N = \text{จำนวนข้อมูล}$$

วินโดว์นี้จะมีค่าความถูกต้องของแอมพลิจูดมากกว่าวินโดว์ชนิดอื่น โดยวินโดว์แบบ Flattop นี้เหมาะสำหรับการหาสเปกตรัมที่มีความถี่เดียวและมีค่าอยู่ใกล้กับ Spectral leakage และรูปที่ 2.21 แสดงวินโดว์แบบ Flattop จำนวนข้อมูล $N = 32$

(8) 4 Term B-Harris window

วินโดว์นี้ปรับปรุงมาจากวินโดว์แบบ Hanning โดยสามารถเขียนเป็นสมการได้คือ

$$W(n) = 0.358750 - 488290 \cdot \cos(2\pi n/N) + 0.141280 \cdot \cos(4\pi n/N) + 0.011680 \cdot \cos(6\pi n/N) \quad (51)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$N = \text{จำนวนข้อมูล}$$

วินโดว์แบบ 4 Term B-Harris เหมาะสำหรับนำไปใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณที่มีความถี่ใกล้เคียงกันแต่แอมพลิจูดต่างกันมากและรูปที่ 2.22 แสดงวินโดว์แบบ 4 Term B-Harris window จำนวนข้อมูล $N = 32$

(9) 7 Term B-Harris window

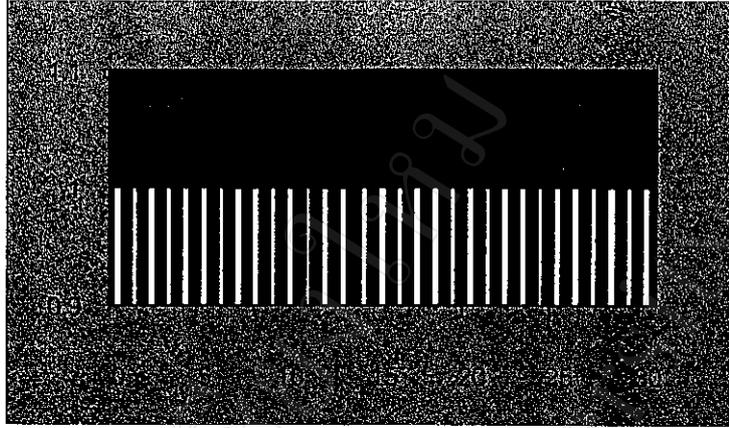
วินโดว์นี้ปรับปรุงมาจากวินโดว์แบบ Hanning โดยสามารถเขียนเป็นสมการได้คือ

$$W(n) = 2.7105140069342415E-1 - 4.3329793923448606E-1 \cdot \cos(2\pi n/N) + 2.1812299954311062E-2 \cdot \cos(4\pi n/N) + 6.5925446388030898E-2 \cdot \cos(6\pi n/N) + 1.0811742098372268E-2 \cdot \cos(8\pi n/N) + 7.7658482522509342E-4 \cdot \cos(10\pi n/N) + 1.3887217350903198E-4 \cdot \cos(12\pi n/N) \quad (52)$$

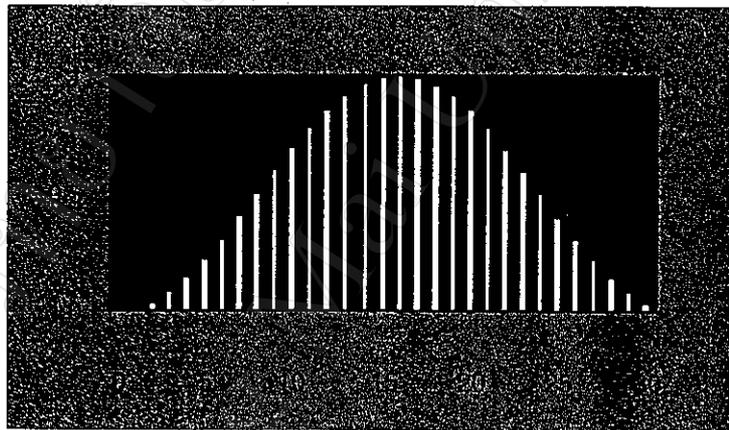
$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$N = \text{จำนวนข้อมูล}$$

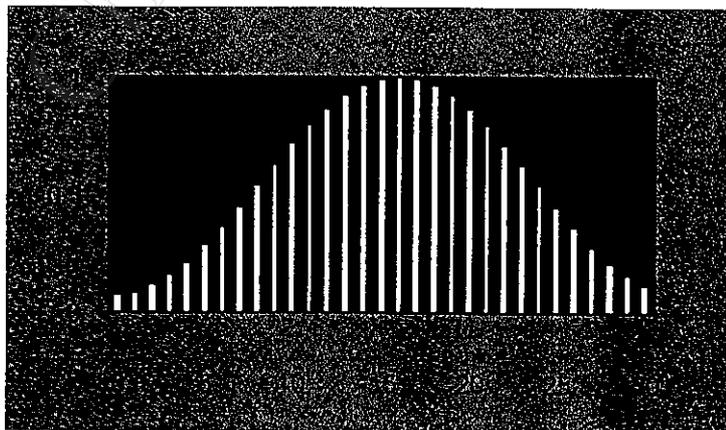
วินโดว์แบบ 7 Term B-Harris เหมาะสำหรับนำไปใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณที่มีความถี่ใกล้เคียงกันแต่แอมพลิจูดต่างกันมากและรูปที่ 2.23 แสดงวินโดว์แบบ 7 Term B-Harris Blackman จำนวนข้อมูล $N = 32$



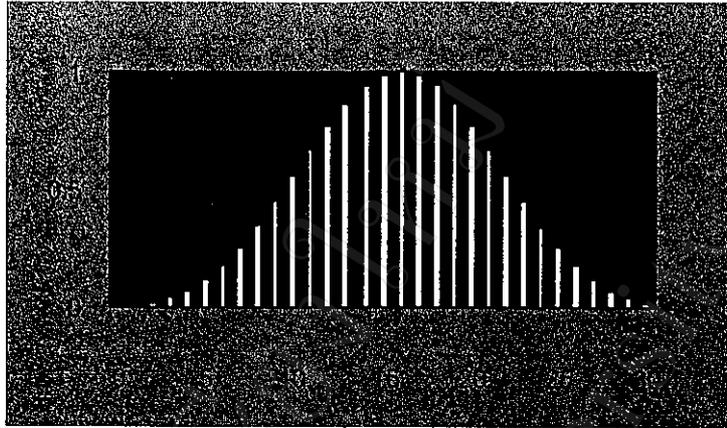
รูปที่ 2.15 วินโดว์แบบ Rectangular



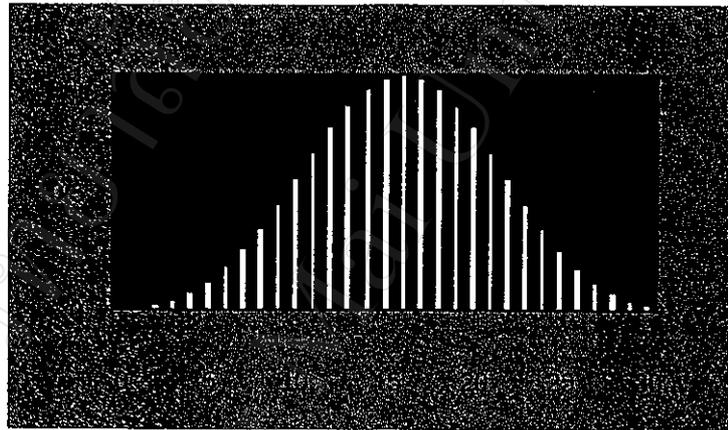
รูปที่ 2.16 วินโดว์แบบ Hanning



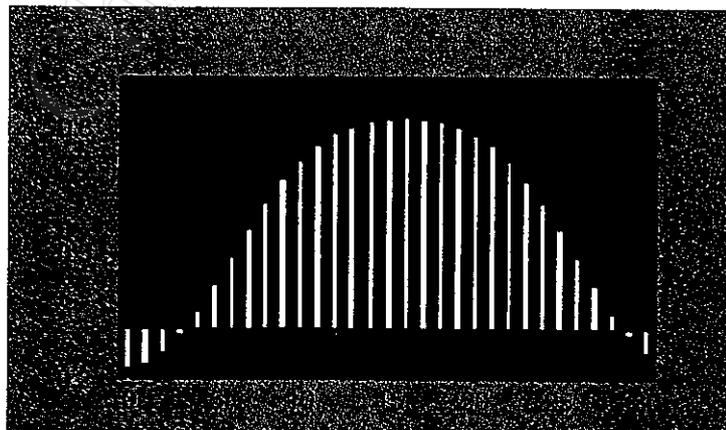
รูปที่ 2.17 วินโดว์แบบ Hamming



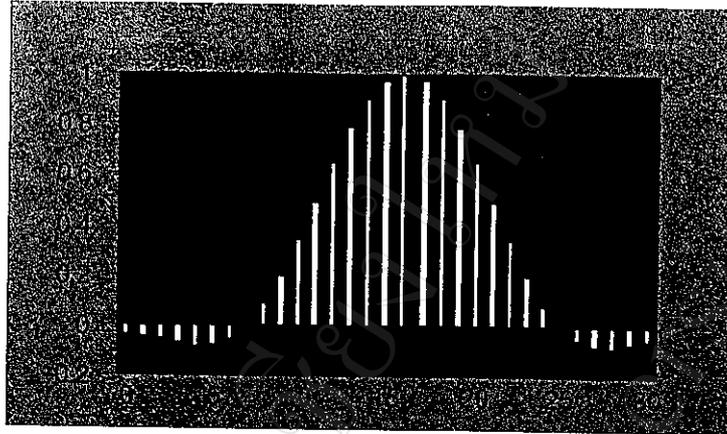
รูปที่ 2.18 วินโดว์แบบ Blackman Harris



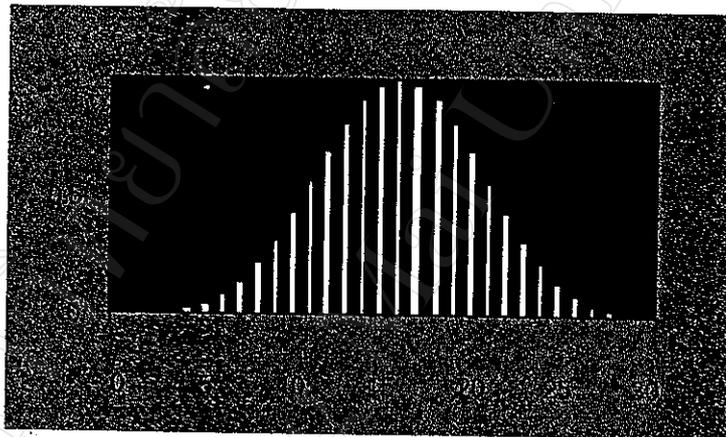
รูปที่ 2.19 วินโดว์แบบ Exact Blackman



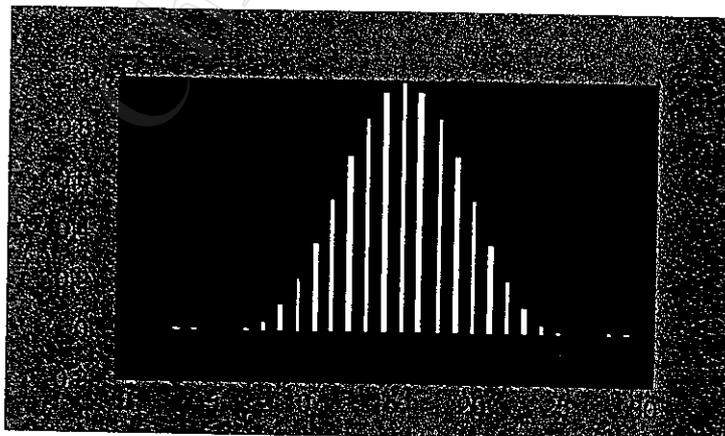
รูปที่ 2.20 วินโดว์แบบ Blackman



รูปที่ 2.21 วิน โค้วแบบ Flattop



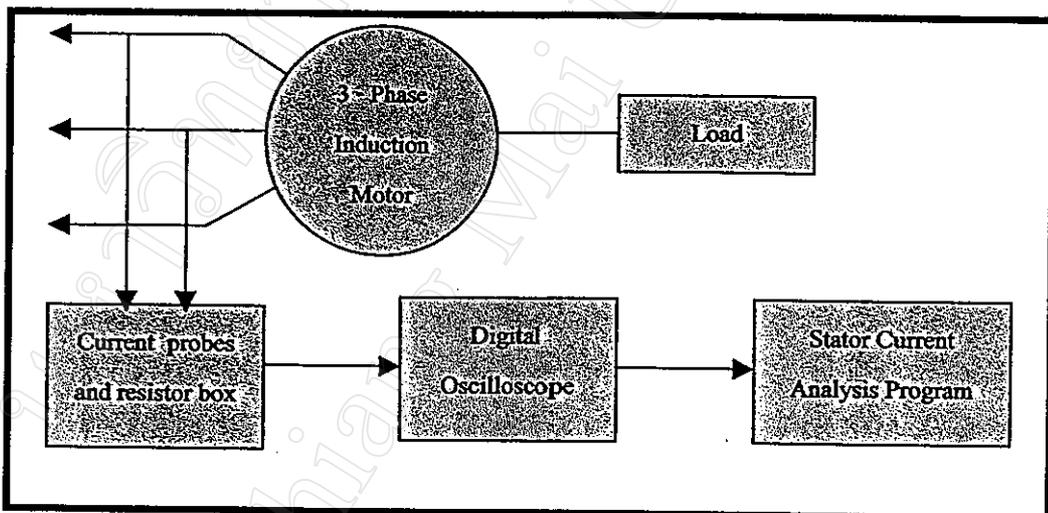
รูปที่ 2.22 วิน โค้วแบบ 4 Term B-Harris



รูปที่ 2.23 วิน โค้วแบบ 7 Term B-Harris

ในการพิจารณาใช้งานวินโดว์แบบต่าง ๆ จะขึ้นอยู่กับลักษณะของสัญญาณและตำแหน่งของความถี่ที่ต้องการในโดเมนความถี่ ในวิทยานิพนธ์นี้ต้องการวิเคราะห์ลักษณะของสัญญาณโดเมนความถี่ที่มีความถี่ใกล้เคียงกันแต่แอมพลิจูดต่างกัน และแอมพลิจูดที่วัดมีค่าต่ำมากเมื่อเทียบกับแอมพลิจูดของความถี่มูลฐาน ดังนั้นต้องเลือกวินโดว์ที่สามารถแยกแยะความถี่ที่ใกล้เคียงกันแต่แอมพลิจูดต่างกันได้ และต้องมีค่าของการรั่วไหลของสเปกตรัมหรือ Spectral leakage ต่ำสุด วินโดว์ที่เหมาะสมสำหรับการวิเคราะห์สัญญาณที่มีความถี่ใกล้เคียงกันแต่แอมพลิจูดต่างกันได้แก่ วินโดว์แบบ Hanning, Blackman Harris, Exact Blackman, 4 Term B-Harris window และ 7 Term B-Harris window และในการเลือกใช้งานวินโดว์ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ทำการจำลองเพื่อหาวินโดว์ที่เหมาะสม ดังผลการจำลองที่ได้แสดงในหัวข้อที่ 3.5

2.6 หลักการในการตรวจจับความผิดปกติของมอเตอร์เหนี่ยวนำแบบ 3 เฟส



รูปที่ 2.24 หลักการในการตรวจจับความผิดปกติของมอเตอร์เหนี่ยวนำแบบ 3 เฟส

การตรวจจับความผิดปกติของมอเตอร์เหนี่ยวนำแบบ 3 เฟส มีหลักการในการตรวจจับดังแสดงในรูปที่ 2.24 คือทำการตรวจวัดกระแสสเตเตอร์ 2 เฟส ขณะไม่มีโหลดและขณะมีโหลด โดยใช้ตัวตรวจจับกระแสร่วมกับชุดตัวต้านทาน แล้วทำการบันทึกรูปคลื่นกระแสโดยใช้ดิจิตอลออสซิลโลสโคป จากนั้นจึงนำรูปคลื่นข้อมูลที่ได้ไปทำการประมวลผลบนโปรแกรมวิเคราะห์กระแสสเตเตอร์ โดยในส่วนของโปรแกรมจะทำการเปลี่ยนสัญญาณกระแสที่เป็นโดเมนเวลาให้เป็นโดเมนความถี่หรือสเปกตรัมโดยใช้การแปลงฟาสฟูริเยร์ (Fast Fourier Transform, FFT)

แล้วจึงทำการวิเคราะห์สเปกตรัมเพื่อวินิจฉัยความผิดปกติของการแตกหักของแท่งตัวนำในโรเตอร์ (Broken bars of rotor) และความไม่สม่ำเสมอของช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์กับโรเตอร์ (Air-gap eccentricity) และคำนวณกระแสลำดับลบเพื่อตรวจจับการลัดวงจรระหว่างรอบของขดลวดสเตเตอร์

การตรวจจับความผิดปกติของมอเตอร์สามารถแบ่งได้เป็น 2 ส่วน คือ

(1) ส่วนตรวจวัดกระแสสเตเตอร์ประกอบด้วย ชุดตรวจวัดกระแสเป็นส่วนที่ใช้ตรวจวัดกระแสสเตเตอร์ ชุดตัวต้านทานเป็นส่วนที่รับสัญญาณกระแสจากชุดตรวจวัดกระแสเพื่อเปลี่ยนเป็นแรงดัน ดิจิตอลอสซิลโลสโคปเป็นส่วนที่วัดสัญญาณกระแสและบันทึกรูปคลื่นลงในแผ่นดิสก์ เพื่อนำไปใช้ในการวิเคราะห์ต่อไปในโปรแกรมวิเคราะห์กระแสสเตเตอร์

(2) ส่วนโปรแกรมวิเคราะห์กระแสสเตเตอร์ ประกอบด้วย ส่วนรับข้อมูล ส่วนเปลี่ยนสัญญาณกระแสที่เป็นโดเมนเวลาเป็นโดเมนความถี่โดยใช้การแปลงฟูเรียร์ (Fast Fourier Transform, FFT) ส่วนตรวจจับความถี่ที่ผิดปกติและคำนวณกระแสลำดับลบ และส่วนแสดงผล