

บทที่ 4 ผลและการวิจารณ์

4.1 ผลการวิจัย

เมื่อทำการเขียนโปรแกรมตามแผนภาพในรูปที่ 3.1 และทำการประมวลผลจนได้ผลเป็นที่น่าพอใจแล้ว จึงได้ทดสอบโปรแกรมกับปัญหาที่มีคำตอบเป็นที่ยอมรับโดยทั่วไปดังแสดงในหัวข้อ 4.2 โดยแสดงผลให้ดูเฉพาะในส่วนของการแสดงภาพการกระจายความเค้น ภาพการกระจายความเครียด และภาพเงื่อนไขว้ที่ขอบเท่านั้น ทั้งนี้เพื่อตรวจสอบว่าสอดคล้องตามทฤษฎีหรือไม่ สำหรับตัวอย่างการทำงานของโปรแกรมแบบเต็มดูในภาคผนวก ค ซึ่งวิธีพิจารณาภาพต่าง ๆ ประกอบด้วย

4.1.1 ภาพการกระจายความเค้น

ลักษณะของภาพประกอบด้วย 3 ส่วนคือ ภาพการกระจายของ σ_{xx} , σ_{yy} และ τ_{xy} ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน และภาพการกระจายของ σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ และ $\tau_{r\theta}$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยในแต่ละส่วนจะเป็นภาพพื้นผิว 3 มิติในระบบพิกัด (x,y,z) โดยแกน x และ y อยู่ในแนวระดับใช้แสดงพิกัดของจุดใด ๆ ในเนื้อวัสดุมีหน่วยเป็นเมตร สำหรับแกน z จะแสดงค่าขององค์ประกอบความเค้นที่จุดนั้น ๆ มีหน่วยเป็น MPa

4.1.2 ภาพการกระจายความเครียด

ลักษณะของภาพประกอบด้วย 3 ส่วนคือ ภาพการกระจายของ ϵ_{xx} , ϵ_{yy} และ γ_{xy} ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน และภาพการกระจายของ ϵ_{rr} , $\epsilon_{\theta\theta}$ และ $\gamma_{r\theta}$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยในแต่ละส่วนจะเป็นภาพพื้นผิว 3 มิติในระบบพิกัด (x,y,z) โดยแกน x และ y อยู่ในแนวระดับใช้แสดงพิกัดของจุดใด ๆ ในเนื้อวัสดุมีหน่วยเป็นเมตร สำหรับแกน z จะแสดงค่าขององค์ประกอบความเครียดที่จุดนั้น ๆ มีหน่วยเป็น $\mu (10^{-6})$

4.1.3 ภาพความเค้นที่ขอบ

ลักษณะของภาพประกอบด้วย 2 ส่วนคือ ภาพความเค้นในแนวตั้งฉากและในแนวสัมผัสกับขอบของวัสดุ โดยมีจำนวนของภาพเท่ากับจำนวนขอบของวัสดุ ในการทำงานของโปรแกรมจะทำการคำนวณสมการของความเค้นที่ขอบทั้งหมดของวัสดุด้วย ซึ่งสามารถนำมาใช้ตรวจสอบความถูกต้องกับเงื่อนไขว้ที่ขอบที่กำหนดไว้ในตอนแรก

4.2 การทดสอบโปรแกรม

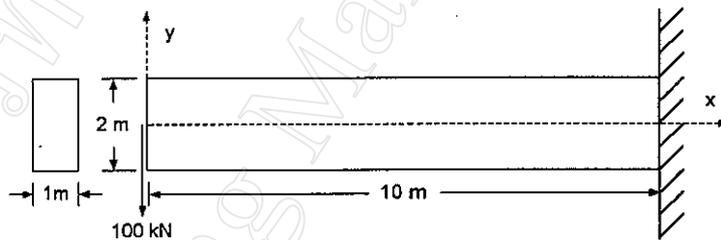
ในการทดสอบโปรแกรมจะทำการทดสอบกับปัญหาในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนและระบบพิกัดเชิงขั้วจำนวนระบบพิกัดละ 5 ตัวอย่าง โดยขนาดและสัดส่วนของวัสดุที่แสดงในตัวอย่างเหล่านี้จะเป็นการสมมติขึ้นเพื่อความสะดวกในการพิจารณาผลที่ได้จากการใช้โปรแกรม กำหนดให้วัสดุมีค่าคงที่ดังต่อไปนี้ $E=200$ GPa, $G=77$ GPa, $\nu=0.3$

4.2.1 ตัวอย่างในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

ก. ตัวอย่างที่ 1

คานยื่น (Cantilever Beam) ยาว 10 m หน้าตัด 1 x 2 m² รับภาระขนาด 100 kN กระทำขนานกับหน้าตัดที่ปลายคานตามทิศทางด้านรูป พิจารณาค่า σ_{xx} ซึ่งเกิดจากโมเมนต์ของแรง 100 kN พบว่าค่า σ_{xx} จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นเนื่องจากโมเมนต์ของแรงมีค่าเพิ่มขึ้น โดยมีค่าเป็นบวกเมื่อ $y > 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $y < 0$ เนื่องจากด้านบนและด้านล่างของคานรับความเค้นดึงและความเค้นกดตามลำดับ สำหรับค่า τ_{xy} ที่หน้าตัด x ใด ๆ พบว่ามีลักษณะเป็นแบบพาราโบลา โดยมีค่าเป็นบวก และมีค่าสม่ำเสมอตลอดความยาวของคานเนื่องจากแรงเฉือนมีค่าคงที่เท่ากับ 100 kN โดยมีค่าสูงสุดที่ $y = 0$ และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $y = \pm 1$ m เมื่อพิจารณาสมการของฟังก์ชันความเค้นที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันพหุนามระดับชั้นที่ 2 และ 4 ตามสมการ $axy + bxy^3$ เมื่อ a, b เป็นค่าคงที่พบว่าจะได้การกระจายความเค้นสอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้น เมื่อนำสมการนี้มาหาค่า τ_{xy} จะได้เท่ากับ $-a - 3by^2$ แทนค่าในสมการเงื่อนไขที่ขอบ $y = 1$ m ; $\tau_{xy} = 0$ และ $x = 0$; $\int_{-1}^1 \tau_{xy} dy = 100$ kN จะได้ค่า a, b เท่ากับ -75 และ 25 ตามลำดับซึ่งจะได้ว่า

$$\Phi = -75xy + 25xy^3 \text{ kN}$$



รูปที่ 4.1 การรับภาระในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 1

เงื่อนไขที่ด้านบนและด้านล่างของคาน

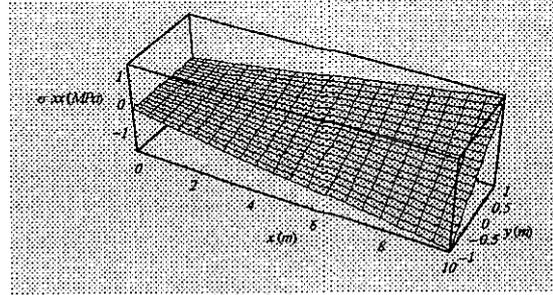
$$y = 1 \text{ m} ; \tau_{xy} = 0, \sigma_{yy} = 0$$

$$y = -1 \text{ m} ; \tau_{xy} = 0, \sigma_{yy} = 0$$

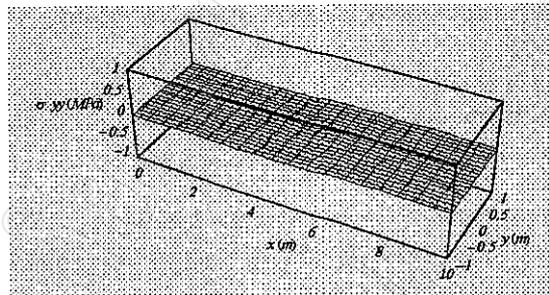
เงื่อนไขที่ปลายคานทั้งสองด้าน

$$x = 0 ; \int_{-1}^1 \tau_{xy} dy = 100 \text{ kN}, \int_{-1}^1 \sigma_{xx} dy = 0, \int_{-1}^1 \sigma_{xx} y dy = 0$$

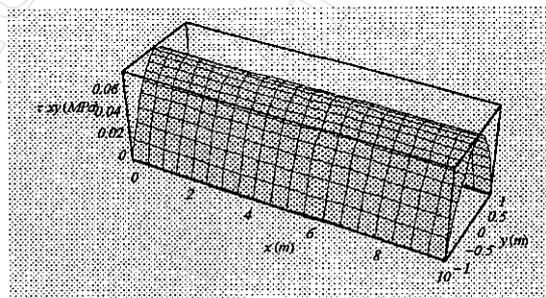
$$x = 10 \text{ m} ; \int_{-1}^1 \tau_{xy} dy = 100 \text{ kN}, \int_{-1}^1 \sigma_{xx} dy = 0, \int_{-1}^1 \sigma_{xx} y dy = 1000 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



(ก) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน x



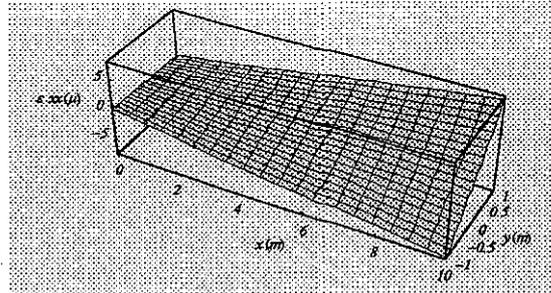
(ข) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน y



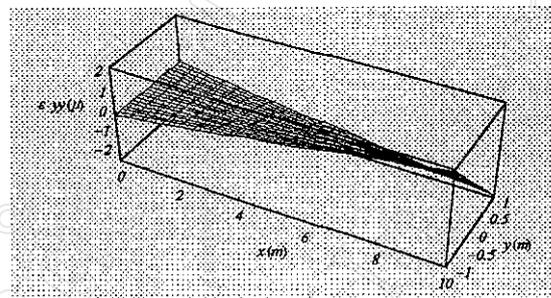
(ค) แสดงการกระจายความเค้นเฉือน

รูปที่ 4.2 การกระจายความเค้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 1

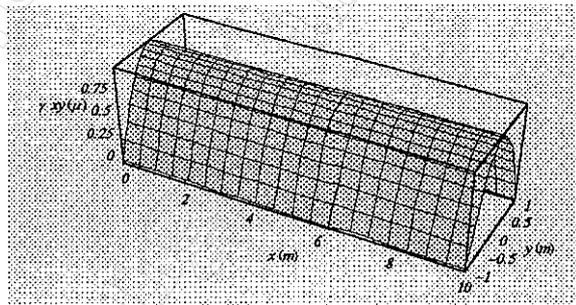
เมื่อแทนค่าสมการของฟังก์ชันความเค้นในโปรแกรมจะได้ภาพการกระจายความเค้นดังรูปที่ 4.2 ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.2(ก) เป็นภาพการกระจายของ σ_{xx} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $y > 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $y < 0$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x = 10\text{m}$, $y = \pm 1\text{m}$ มีค่าเท่ากับ 1 MPa และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $x = 0$ รูปที่ 4.2(ข) เป็นภาพการกระจายของ σ_{yy} ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ทุก ๆ จุดในเนื้อวัสดุ และรูปที่ 4.2(ค) เป็นภาพการกระจายของ τ_{xy} ซึ่งมีค่าสม่ำเสมอตลอดความยาวของคาน โดยมีค่าสูงสุดที่ $y = 0$ มีค่าเท่ากับ 0.075 MPa และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $y = \pm 1\text{m}$



(ก) แสดงการกระจายความเค้นเครียดในแนวแกน x



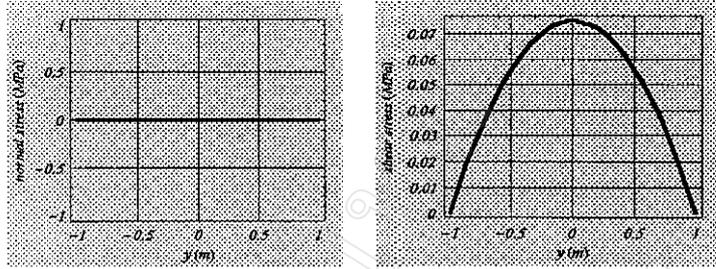
(ข) แสดงการกระจายความเค้นเครียดในแนวแกน y



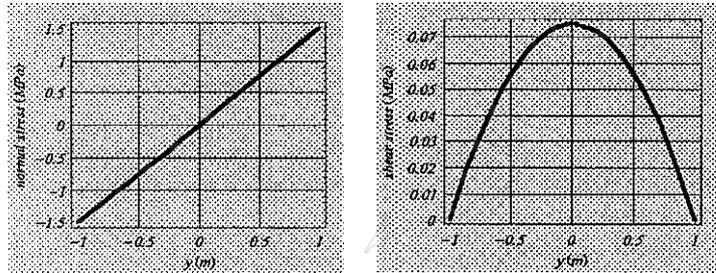
(ค) แสดงการกระจายความเค้นเครียดเฉือน

รูปที่ 4.3 การกระจายความเค้นเครียดในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 1

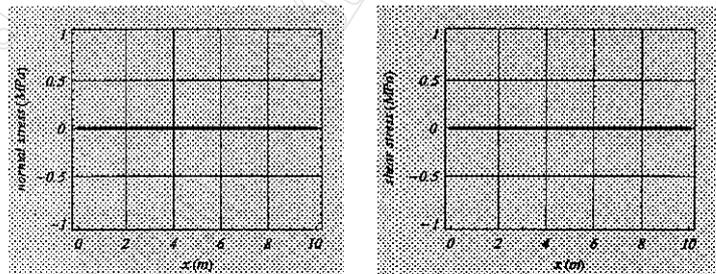
รูปที่ 4.3 เป็นภาพการกระจายความเค้นเครียดซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.3(ก) เป็นภาพการกระจายของ ϵ_{xx} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $y > 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $y < 0$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x=10\text{m}$, $y=\pm 1\text{m}$ และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $x=0$ รูปที่ 4.3(ข) เป็นภาพการกระจายของ ϵ_{yy} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $y < 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $y > 0$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x=10\text{m}$, $y=\pm 1\text{m}$ และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $x=0$ และรูปที่ 4.3(ค) เป็นภาพการกระจายของ γ_{xy} ซึ่งมีค่าสม่ำเสมอตลอดความยาวของคาน โดยมีค่าสูงสุดที่ $y=0$ และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $y=\pm 1\text{m}$



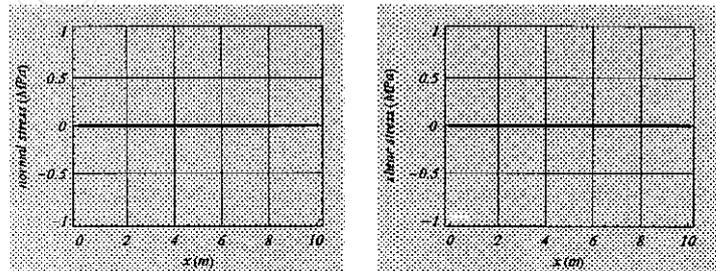
(ก) เส้นใยที่ขอบ $x=0$



(ข) เส้นใยที่ขอบ $x=10\text{m}$



(ค) เส้นใยที่ขอบ $y=-1\text{m}$



(ง) เส้นใยที่ขอบ $y=1\text{m}$

รูปที่ 4.4 ความเค้นตามเส้นใยที่ขอบในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 1

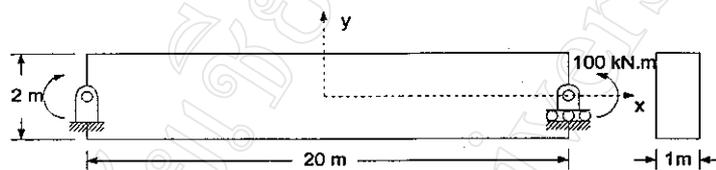
จากการคำนวณค่าความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นโดยใช้โปรแกรมพบว่าค่า σ_{xx} สูงสุดเกิดที่ $x=10\text{m}$, $y=\pm 1\text{m}$ โดยมีค่าเท่ากับ 1 MPa และค่า τ_{xy} สูงสุดเกิดที่ $y=0$ โดยมีค่าเท่ากับ 0.075 MPa สรุปการใช้งานของโปรแกรมในกรณีนี้ได้ว่าค่าความเค้นและความเครียดที่ได้จากโปรแกรมมีค่าสอดคล้องกับการคำนวณคำนวณโดยใช้ทฤษฎีฟังก์ชันความเค้น และความเค้นที่ขอบมีค่าสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ขอบทุก ๆ ด้านของวัสดุดังรูปที่ 4.4

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Chiang Mai University

ข. ตัวอย่างที่ 2

คานอย่างง่าย (Simple Beam) ยาว 20 m หน้าตัด $1 \times 2 \text{ m}^2$ รับภาระโมเมนต์ดัดเพียงอย่างเดียวยาวขนาด $100 \text{ kN}\cdot\text{m}$ กระทำที่ปลายคานทั้งสองด้านตามทิศทางดังรูป สมการของฟังก์ชันความเค้นอยู่ในรูปของฟังก์ชันพหุนามระดับชั้นที่ 3 โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ในสมการหาได้จากเงื่อนไขที่ขอบตามวิธีการในตัวอย่างที่ 1 จะได้ว่า

$$\Phi = -25y^3 \text{ kN}$$



รูปที่ 4.5 การรับภาระในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 2

เงื่อนไขที่ด้านบนและด้านล่างของคาน

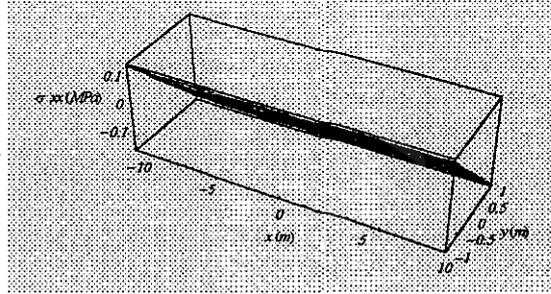
$$y=1\text{m} ; \tau_{xy}=0, \sigma_{yy}=0$$

$$y=-1\text{m} ; \tau_{xy}=0, \sigma_{yy}=0$$

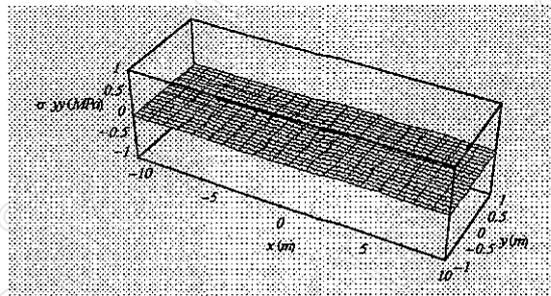
เงื่อนไขที่ปลายคานทั้งสองด้าน

$$x=10\text{m} ; \int_{-1}^1 \tau_{xy} dy = 0, \int_{-1}^1 \sigma_{xx} dy = 0, \int_{-1}^1 \sigma_{yy} dy = -1000 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

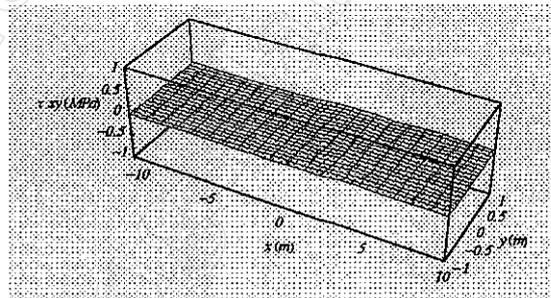
$$x=-10\text{m} ; \int_{-1}^1 \tau_{xy} dy = 0, \int_{-1}^1 \sigma_{xx} dy = 0, \int_{-1}^1 \sigma_{yy} dy = -1000 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



(ก) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน x



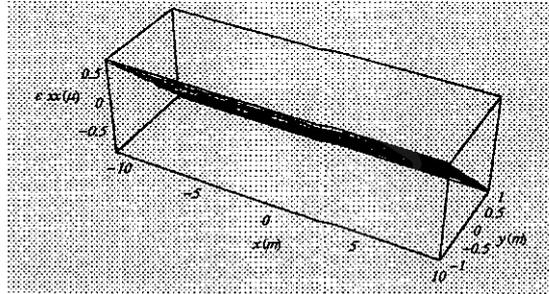
(ข). แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน y



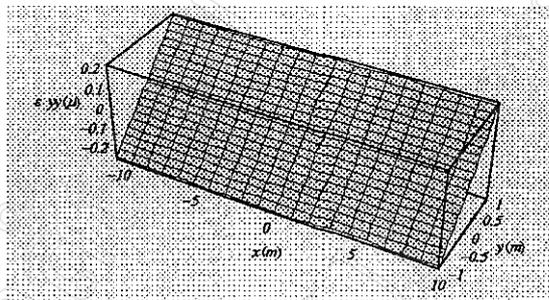
(ค) แสดงการกระจายความเค้นเฉือน

รูปที่ 4.6 การกระจายความเค้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 2

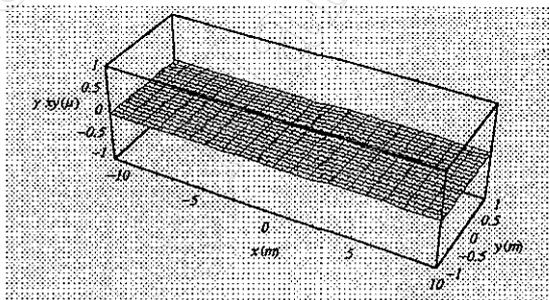
เมื่อแทนค่าสมการของฟังก์ชันความเค้นในโปรแกรมจะได้ภาพการกระจายความเค้นดังรูปที่ 4.6 ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.6(ก) เป็นภาพการกระจายของ σ_{xx} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $y < 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $y > 0$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $y = \pm 1$ m มีค่าเท่ากับ 0.1 MPa และมีค่าสม่ำเสมอตลอดความยาวของคาน รูปที่ 4.6 (ข) และ 4.6(ค) ส่วนที่ 2 และ 3 เป็นภาพการกระจายของ σ_{yy} และ τ_{xy} ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ทุก ๆ จุดในเนื้อวัสดุ



(ก) แสดงการกระจายความเคียดในแนวแกน x



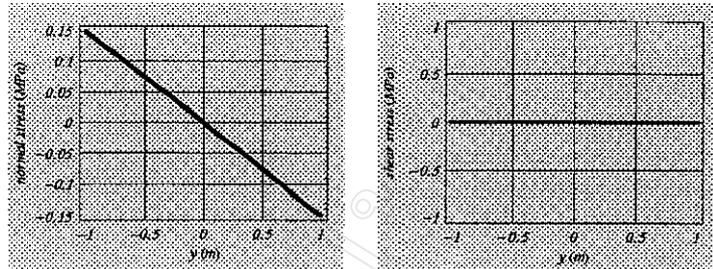
(ข) แสดงการกระจายความเคียดในแนวแกน y



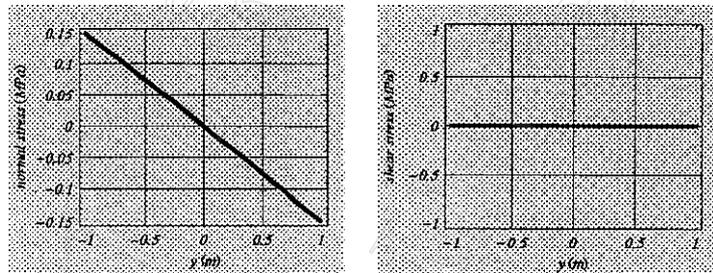
(ค) แสดงการกระจายความเคียดเฉือน

รูปที่ 4.7 การกระจายความเคียดในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 2

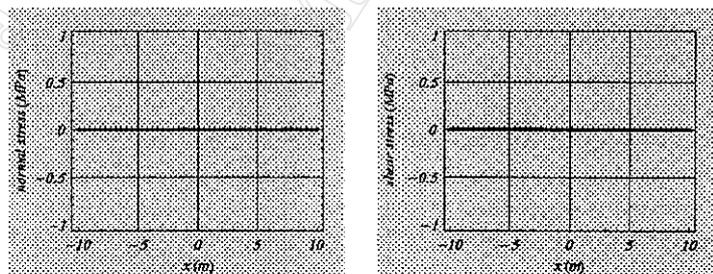
รูปที่ 4.7 เป็นภาพการกระจายความเคียดซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.7(ก) เป็นภาพการกระจายของ ϵ_{xx} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $y < 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $y > 0$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $y = \pm 1$ m และมีค่าคงที่ตลอดความยาวของคาน รูปที่ 4.7(ข) เป็นภาพการกระจายของ ϵ_{yy} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $y > 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $y < 0$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $y = \pm 1$ m และมีค่าคงที่ตลอดความยาวของคาน และรูปที่ 4.7(ค) เป็นภาพการกระจายของ γ_{yz} ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ทุก ๆ จุดในเนื้อวัสดุ



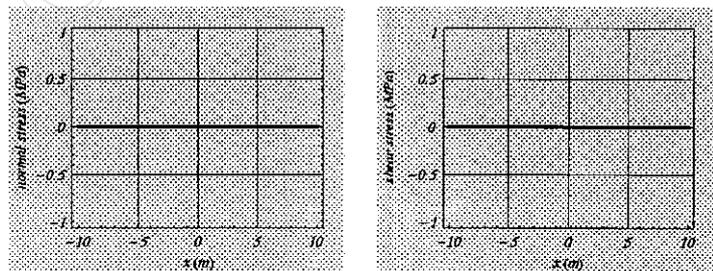
(ก) เส้นไขที่ขอบ $x = -10\text{m}$



(ข) เส้นไขที่ขอบ $x = 10\text{m}$



(ค) เส้นไขที่ขอบ $y = -1\text{m}$



(ง) เส้นไขที่ขอบ $y = 1\text{m}$

รูปที่ 4.8 ความเค้นตามเส้นไขที่ขอบในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 2

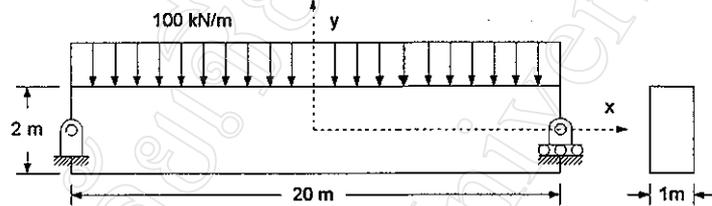
จากการคำนวณค่าความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นโดยใช้โปรแกรมพบว่าค่า σ_{xx} สูงสุดเกิดที่ $y=\pm 1\text{m}$ โดยมีค่าเท่ากับ 0.1 MPa โดยที่ σ_{yy} และ τ_{xy} มีค่าเท่ากับศูนย์ที่ทุก ๆ จุดในเนื้อวัสดุ รูปการใช้งานของโปรแกรมในกรณีนี้ได้ว่าค่าความเค้นและความเครียดที่ได้จากโปรแกรมมีค่าสอดคล้องกับการคำนวณคำนวณโดยใช้ทฤษฎีฟังก์ชันความเค้น และความเค้นที่ขอบมีค่าสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ขอบทุก ๆ ด้านของวัสดุดังรูปที่ 4.8

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Chiang Mai University

ค. ตัวอย่างที่ 3

คานอย่างง่ายยาว 20 m หน้าตัด $1 \times 2 \text{ m}^2$ รับภาระแรงกดขนาด 100 kN/m กระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดความยาวของคาน สมการของฟังก์ชันความเค้นได้มาจากการผสมกันของฟังก์ชันพหุนามระดับชั้นที่ 2, 3, และ 5 โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ในสมการหาได้จากเงื่อนไขที่ขอบตามวิธีการในตัวอย่างที่ 1 จะได้ว่า

$$\Phi = -25x^2 - 37.5x^2y - 1245y^3 + 12.5x^2y^3 - 2.5y^5 \text{ kN}$$



รูปที่ 4.9 การรับภาระในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 3

เงื่อนไขที่ด้านบนและด้านล่างของคาน

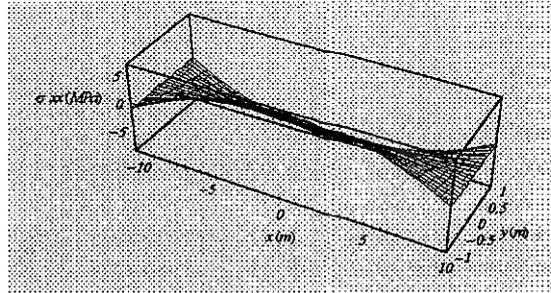
$$y=1\text{m}; \tau_{xy}=0, \sigma_{yy}=-0.1\text{MPa}$$

$$y=-1\text{m}; \tau_{xy}=0, \sigma_{yy}=0$$

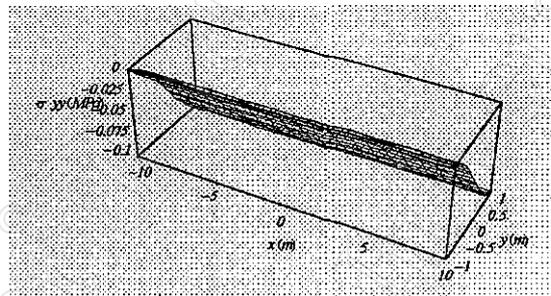
เงื่อนไขที่ปลายคานทั้งสองด้าน

$$x=10\text{m}; \int_{-1}^1 \tau_{xy} dy = 1000\text{kN}, \int_{-1}^1 \sigma_{xx} dy = 0, \int_{-1}^1 \sigma_{yy} dy = 0$$

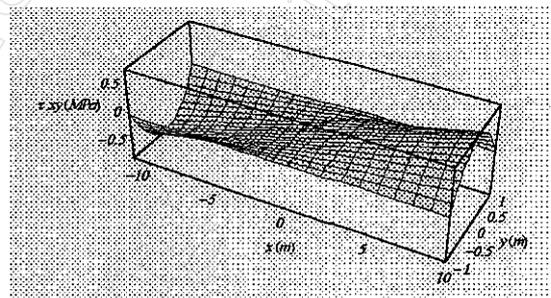
$$x=-10\text{m}; \int_{-1}^1 \tau_{xy} dy = -1000\text{kN}, \int_{-1}^1 \sigma_{xx} dy = 0, \int_{-1}^1 \sigma_{yy} dy = 0$$



(ก) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน x



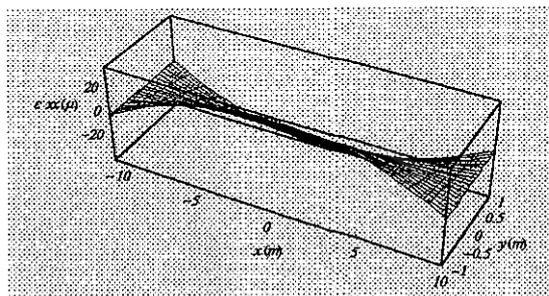
(ข) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน y



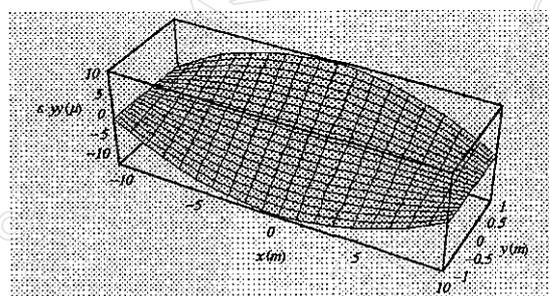
(ค) แสดงการกระจายความเค้นเฉือน

รูปที่ 4.10 การกระจายความเค้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 3

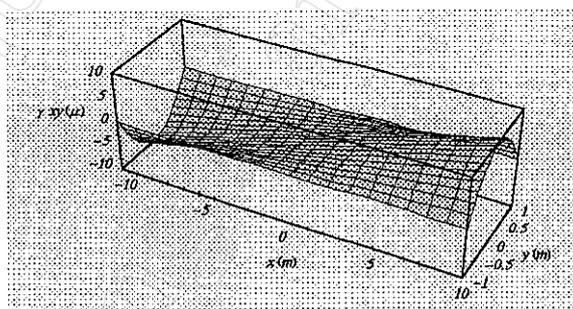
เมื่อแทนค่าสมการของฟังก์ชันความเค้นในโปรแกรมจะได้ภาพการกระจายความเค้นดังรูปที่ 4.10 ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.10(ก) เป็นภาพการกระจายของ σ_{xx} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $y < 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $y > 0$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x=0, y=\pm 1\text{m}$ มีค่าเท่ากับ 7.52 MPa และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $x=\pm 10\text{m}$ รูปที่ 4.10(ข) เป็นภาพการกระจายของ σ_{yy} ซึ่งมีค่าเท่ากับ -0.1 MPa ที่ $y=1\text{m}$ และมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $y=-1\text{m}$ และรูปที่ 4.10(ค) เป็นภาพการกระจายของ τ_{xy} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $x > 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $x < 0$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x=\pm 10\text{m}, y=0$ มีค่าเท่ากับ 0.75 MPa และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $y=\pm 1\text{m}$



(ก) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน x



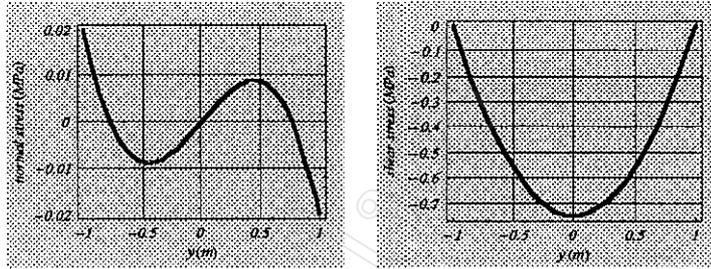
(ข) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน y



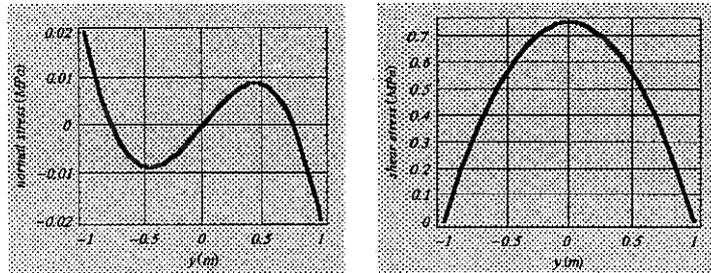
(ค) แสดงการกระจายความเค้นเฉือน

รูปที่ 4.11 การกระจายความเค้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 3

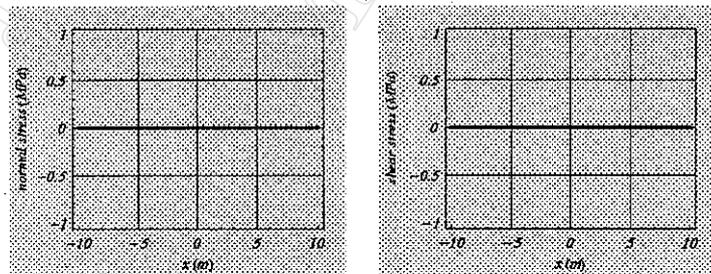
รูปที่ 4.11 เป็นภาพการกระจายความเค้นซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.11(ก) เป็นภาพการกระจายของ ϵ_{xx} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $y < 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $y > 0$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x=0, y=\pm 1\text{m}$ และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $x=\pm 10\text{m}$ รูปที่ 4.11(ข) เป็นภาพการกระจายของ ϵ_{yy} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $y < 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $y > 0$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x=0, y=\pm 1\text{m}$ และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $x=\pm 10\text{m}$ และรูปที่ 4.11(ค) เป็นภาพการกระจายของ γ_{xy} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $x > 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $x < 0$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x=\pm 10\text{m}, y=0$ และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $y=\pm 1\text{m}$



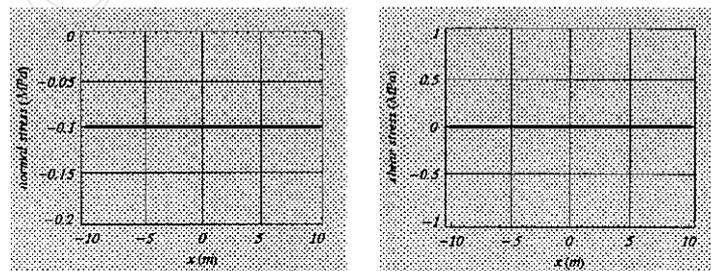
(ก) เส้นใยที่ขอบ $x=-10\text{m}$



(ข) เส้นใยที่ขอบ $x=10\text{m}$



(ค) เส้นใยที่ขอบ $y=-1\text{m}$



(ง) เส้นใยที่ขอบ $y=1\text{m}$

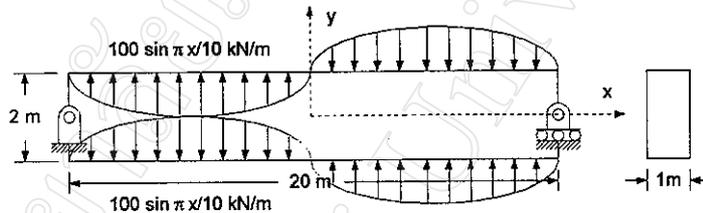
รูปที่ 4.12 ความเค้นตามเส้นใยที่ขอบในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 3

จากการคำนวณค่าความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นโดยใช้โปรแกรมพบว่าค่า σ_{xx} สูงสุดเกิดที่ $x=0, y=\pm 1\text{m}$ โดยมีค่าเท่ากับ 7.52 MPa ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับค่าที่คำนวณได้ตามทฤษฎีความแข็งแรงของวัสดุคือ 7.5 MPa พบว่ามีความผิดพลาดเท่ากับ 0.27% และค่า τ_{xy} สูงสุดเกิดที่ $x=\pm 10\text{m}, y=0$ โดยมีค่าเท่ากับ 0.75 MPa ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าที่คำนวณได้ตามทฤษฎีความแข็งแรงของวัสดุ สรุปการใช้งานของโปรแกรมในกรณีนี้ได้ว่าค่าความเค้นและความเครียดที่ได้จากโปรแกรมมีค่าสอดคล้องกับทฤษฎีฟังก์ชันความเค้นและมีค่าใกล้เคียงกับค่าที่คำนวณได้ตามทฤษฎีความแข็งแรงของวัสดุ โดยความเค้นที่ขอบมีค่าสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ขอบทุก ๆ ด้านของวัสดุดังรูปที่ 4.12 ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากการคำนวณค่า σ_{xx} มีสาเหตุมาจากข้อจำกัดของการใช้ฟังก์ชันความเค้นที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันพหุนามในบางกรณี ซึ่งถ้ากำหนดให้อัตราส่วน x/y มีค่ามาก ๆ หรือวัสดุมีความยาวมาก ๆ ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นก็จะมีค่าลดลง

ง. ตัวอย่างที่ 4

คานอย่างง่ายยาว 20 m หน้าตัด $1 \times 2 \text{ m}^2$ รับภาระขนาด $100 \sin \pi x/10 \text{ kN/m}$ กระทำที่ด้านบนและด้านล่างของคานตามทิศทางดังรูป สมการของฟังก์ชันความเค้นอยู่ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ในสมการหาได้จากเงื่อนไขที่ขอบตามวิธีการในตัวอย่างที่ 1 จะได้ว่า

$$\Phi = \left[200 \frac{1}{\alpha^2} \frac{(\sinh \alpha + \alpha \cosh \alpha)}{(\sinh 2\alpha + 2\alpha)} \cosh \alpha y - 200 \frac{1}{\alpha^2} \frac{\alpha \sinh \alpha}{(\sinh 2\alpha + 2\alpha)} \alpha y \sinh \alpha y \right] \sin \alpha x \text{ kN} ; \alpha = \pi/10$$



รูปที่ 4.13 การรับภาระในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 4

เงื่อนไขที่ด้านบนและด้านล่างของคาน

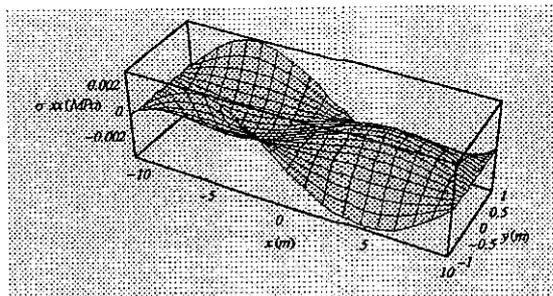
$$y=1\text{m} ; \tau_{xy}=0, \sigma_{yy}=-0.1 \sin \pi x/10 \text{ MPa}$$

$$y=-1\text{m} ; \tau_{xy}=0, \sigma_{yy}=-0.1 \sin \pi x/10 \text{ MPa}$$

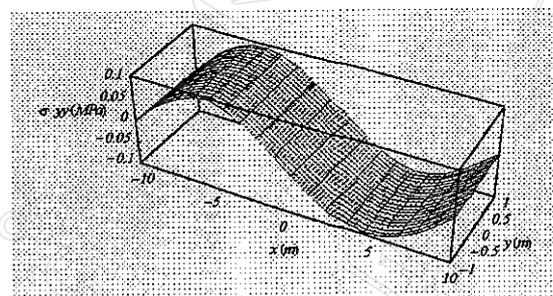
เงื่อนไขที่ปลายคานทั้งสองด้าน

$$x=10\text{m} ; \int_{-1}^1 \tau_{xy} dy = 0, \int_{-1}^1 \sigma_{xx} dy = 0, \int_{-1}^1 \sigma_{xx} y dy = 0$$

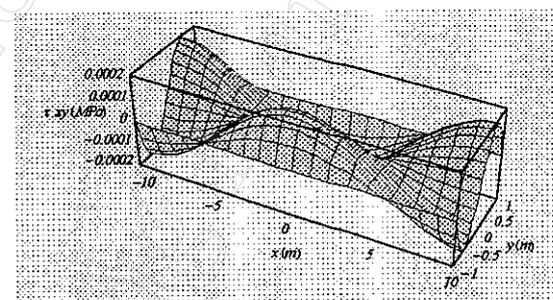
$$x=-10\text{m} ; \int_{-1}^1 \tau_{xy} dy = 0, \int_{-1}^1 \sigma_{xx} dy = 0, \int_{-1}^1 \sigma_{xx} y dy = 0$$



(ก) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน x



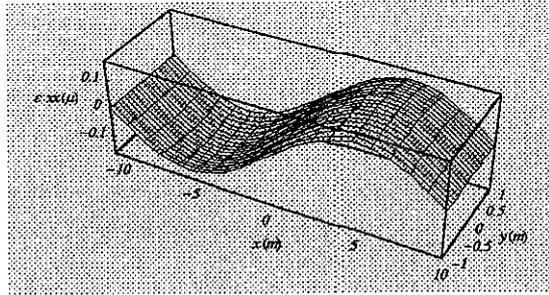
(ข) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน y



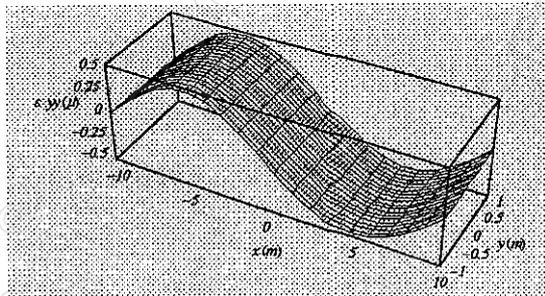
(ค) แสดงการกระจายความเค้นเฉือน

รูปที่ 4.14 การกระจายความเค้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 4

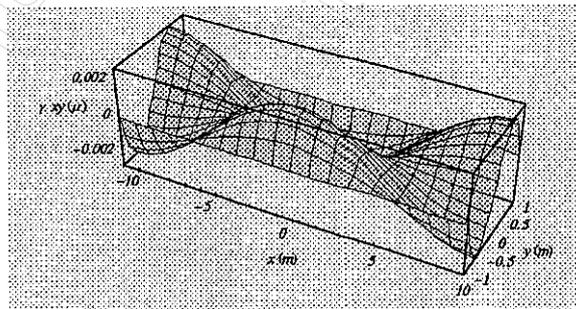
เมื่อแทนค่าสมการของฟังก์ชันความเค้นในโปรแกรมจะได้ภาพการกระจายความเค้นดังรูปที่ 4.14 ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.14(ก) เป็นภาพการกระจายของ σ_{xx} ซึ่งมีค่าเป็นบวกและลบสลับกันดังแสดงในภาพ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x=\pm 5\text{m}$, $y=\pm 1\text{m}$ มีค่าเท่ากับ 3.2465 kPa และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $x=\pm 10\text{m}$ รูปที่ 4.14(ข) เป็นภาพการกระจายของ σ_{yy} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $x < 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $x > 0$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x=\pm 5\text{m}$ และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $x=\pm 10\text{m}$ และรูปที่ 4.14(ค) เป็นภาพการกระจายของ τ_{xy} ซึ่งมีค่าเป็นบวกและลบสลับกันดังแสดงในภาพ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x=0$ และ $\pm 10\text{m}$, $y=\pm 5\text{m}$ มีค่าเท่ากับ 0.18982 kPa และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $y=\pm 1\text{m}$



(ก) แสดงการกระจายความเคียดในแนวแกน x



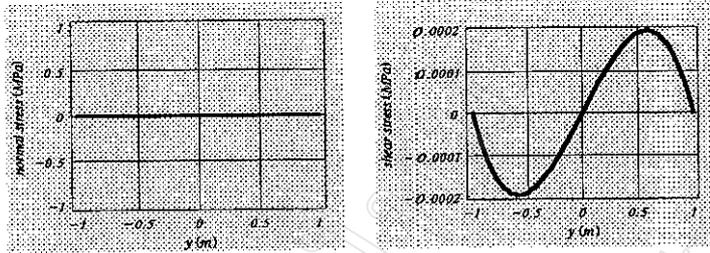
(ข) แสดงการกระจายความเคียดในแนวแกน y



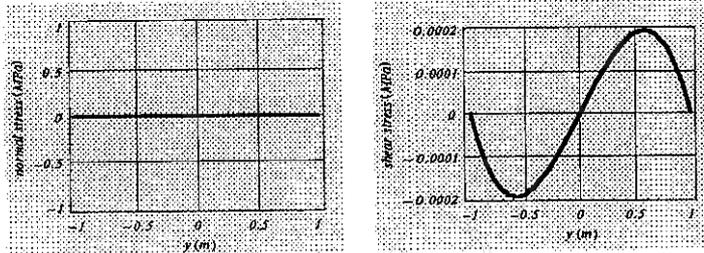
(ค) แสดงการกระจายความเคียดเฉือน

รูปที่ 4.15 การกระจายความเคียดในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 4

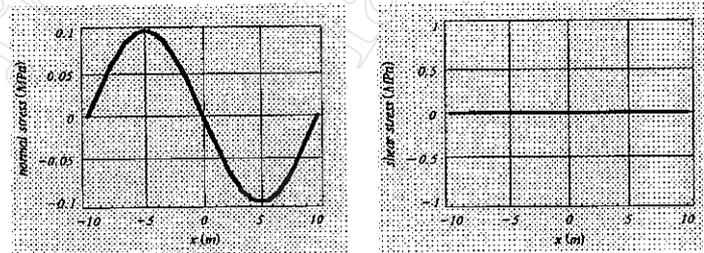
รูปที่ 4.15 เป็นภาพการกระจายความเคียดซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.15(ก) เป็นภาพการกระจายของ ϵ_{xx} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $x > 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $x < 0$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x = \pm 5m$ และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $x = \pm 10m$ รูปที่ 4.15(ข) เป็นภาพการกระจายของ ϵ_{yy} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $x < 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $x > 0$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x = \pm 5m$ และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $x = \pm 10m$ และรูปที่ 4.15(ค) เป็นภาพการกระจายของ γ_{xy} ซึ่งมีค่าเป็นบวกและลบสลับกันดังแสดงในภาพ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x = 0$ และ $\pm 10m$, $y = \pm 5m$ และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $y = \pm 1m$



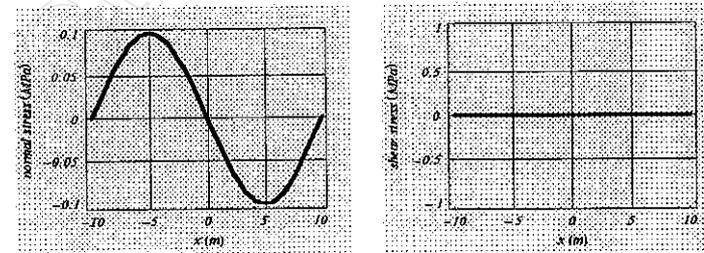
(ก) เส้นใยที่ขอบ $x=10\text{m}$



(ข) เส้นใยที่ขอบ $x=-10\text{m}$



(ค) เส้นใยที่ขอบ $y=-1\text{m}$



(ง) เส้นใยที่ขอบ $y=1\text{m}$

รูปที่ 4.16 ความเค้นตามเส้นใยที่ขอบในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 4

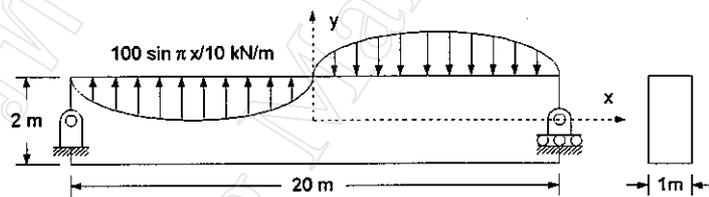
จากการคำนวณค่าความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นโดยใช้โปรแกรมพบว่าค่า σ_{xx} สูงสุดเกิดที่ $x=\pm 5\text{m}$, $y=\pm 1\text{m}$ โดยมีค่าเท่ากับ 3.2465 kPa และค่า τ_{xy} สูงสุดเกิดที่ $x=0$ และ $\pm 10\text{m}$, $y=\pm 5\text{m}$ โดยมีค่าเท่ากับ 0.18982 kPa ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าที่คำนวณได้ตามทฤษฎีฟังก์ชันความเค้น สรุปการใช้งานของโปรแกรมในกรณีนี้ได้ว่าค่าความเค้นและความเครียดที่ได้จากโปรแกรมมีค่าเหมือนกับค่าที่คำนวณได้ตามทฤษฎีฟังก์ชันความเค้นและความเค้นที่ขอบมีค่าสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ขอบทุก ๆ ด้านของวัสดุดังรูปที่ 4.16

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Chiang Mai University

จ. ตัวอย่างที่ 5

คานอย่างง่ายยาว 20 m หน้าตัด $1 \times 2 \text{ m}^2$ รับภาระขนาด $100 \sin \pi x / 10 \text{ kN/m}$ กระทำที่ด้านบนของคานตามทิศทางดังรูป สมการของฟังก์ชันความเค้นอยู่ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ในสมการหาได้จากเงื่อนไขที่ขอบตามวิธีการในตัวอย่างที่ 1 จะได้ว่า

$$\Phi = \left[100 \frac{1 (\sinh \alpha + \alpha \cosh \alpha)}{\alpha^2 (\sinh 2\alpha + 2\alpha)} \cosh \alpha y + \right. \\ \left. 100 \frac{1 (\cosh \alpha + \alpha \sinh \alpha)}{\alpha^2 (\sinh 2\alpha - 2\alpha)} \sinh \alpha y - \right. \\ \left. 100 \frac{1 \alpha \cosh \alpha}{\alpha^2 (\sinh 2\alpha - 2\alpha)} \alpha y \cosh \alpha y - \right. \\ \left. 100 \frac{1 \alpha \sinh \alpha}{\alpha^2 (\sinh 2\alpha + 2\alpha)} \alpha y \sinh \alpha y \right] \sin \alpha x \text{ kN} ; \alpha = \pi/10$$



รูปที่ 4.17 การรับภาระในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 5

เงื่อนไขที่ด้านบนและด้านล่างของคาน

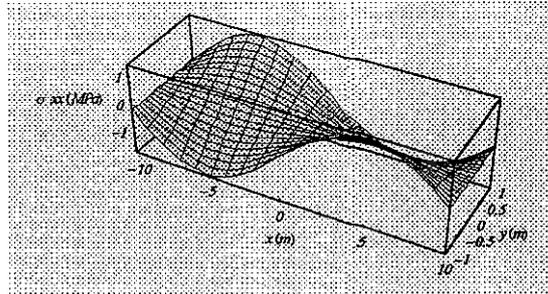
$$y=1\text{m} ; \tau_{xy}=0, \sigma_{yy}=-0.1 \sin \pi x/10 \text{ MPa}$$

$$y=-1\text{m} ; \tau_{xy}=0, \sigma_{yy}=0$$

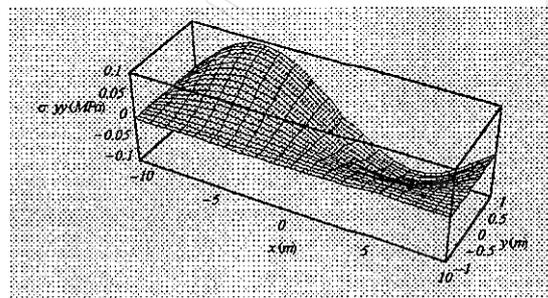
เงื่อนไขที่ปลายคานทั้งสองด้าน

$$x=10\text{m} ; \int_{-1}^1 \tau_{xy} dy = 1000/\pi \text{ kN}, \int_{-1}^1 \sigma_{xx} dy = 0, \int_{-1}^1 \sigma_{xx} y dy = 0$$

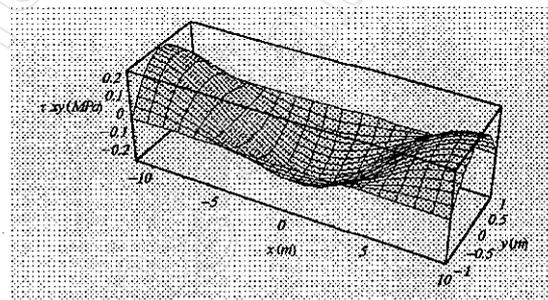
$$x=-10\text{m} ; \int_{-1}^1 \tau_{xy} dy = 1000/\pi \text{ kN}, \int_{-1}^1 \sigma_{yy} dy = 0, \int_{-1}^1 \sigma_{yy} y dy = 0$$



(ก) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน x



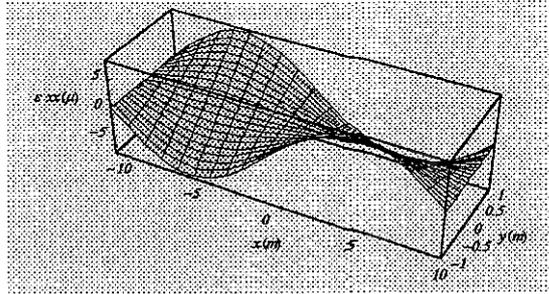
(ข) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน y



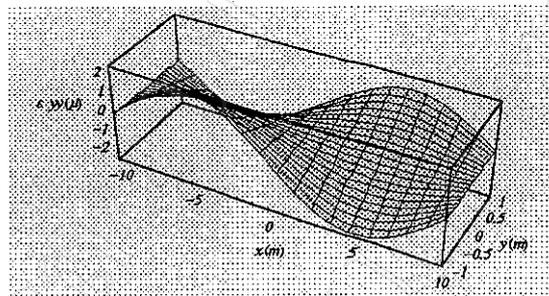
(ค) แสดงการกระจายความเค้นเฉือน

รูปที่ 4.18 การกระจายความเค้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 5

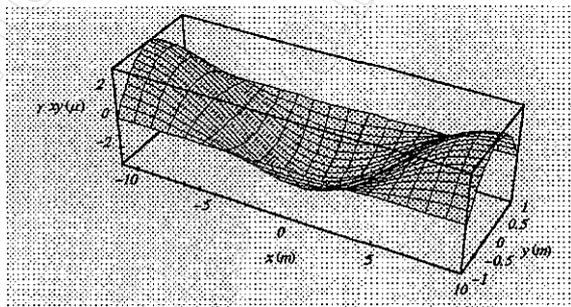
เมื่อแทนค่าสมการของฟังก์ชันความเค้นในโปรแกรมจะได้ภาพการกระจายความเค้นดังรูปที่ 4.18 ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.18(ก) เป็นภาพการกระจายของ σ_{xx} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $x < 0, y > 0$ หรือ $x > 0, y < 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $x < 0, y < 0$ หรือ $x > 0, y > 0$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x = \pm 5\text{m}, y = \pm 1\text{m}$ มีค่าเท่ากับ 1.54175 MPa และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $x = \pm 10\text{m}$ รูปที่ 4.18(ข) เป็นภาพการกระจายของ σ_{yy} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $x < 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $x > 0$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x = \pm 5\text{m}, y = 1\text{m}$ และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $x = \pm 10\text{m}$ และที่ $y = -1\text{m}$ และรูปที่ 4.18(ค) เป็นภาพการกระจายของ τ_{xy} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $x < -5\text{m}$ หรือ $x > 5\text{m}$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $-5\text{m} < x < 5\text{m}$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x = 0$ และ $\pm 10\text{m}, y = 0$ มีค่าเท่ากับ 0.23793 MPa และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $y = \pm 1\text{m}$



(ก) แสดงการกระจายความเคียดในแนวแกน x



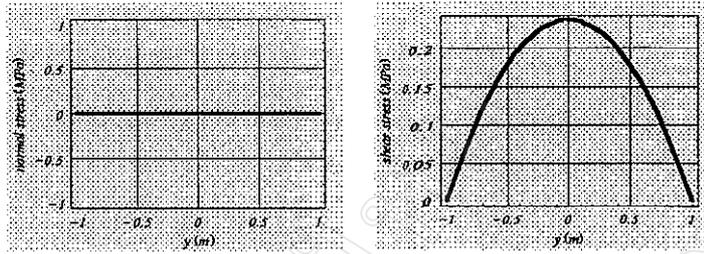
(ข) แสดงการกระจายความเคียดในแนวแกน y



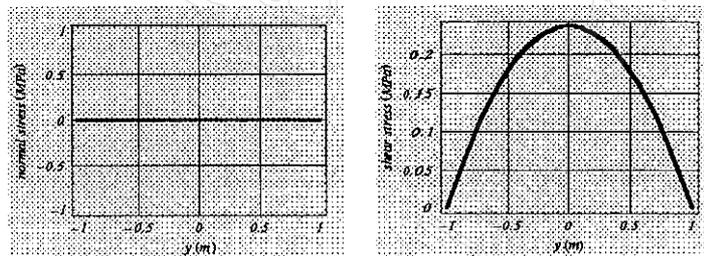
(ค) แสดงการกระจายความเคียดเฉือน

รูปที่ 4.19 การกระจายความเคียดในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 5

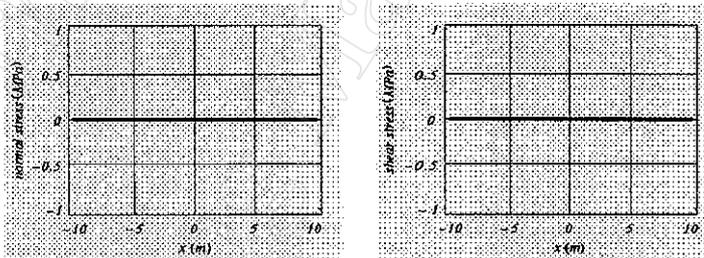
รูปที่ 4.19 เป็นภาพการกระจายความเคียดซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.19(ก) เป็นภาพการกระจายของ ϵ_{xx} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $x < 0, y > 0$ หรือ $x > 0, y < 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $x < 0, y < 0$ หรือ $x > 0, y > 0$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x = \pm 5\text{m}, y = \pm 1\text{m}$ และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $x = \pm 10\text{m}$ รูปที่ 4.19(ข) เป็นภาพการกระจายของ ϵ_{yy} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $x < 0, y < 0$ หรือ $x > 0, y > 0$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $x < 0, y > 0$ หรือ $x > 0, y < 0$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x = \pm 5\text{m}, y = \pm 1\text{m}$ และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $x = \pm 10\text{m}$ และรูปที่ 4.19(ค) เป็นภาพการกระจายของ γ_{xy} ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อ $x < -5\text{m}$ หรือ $x > 5\text{m}$ และมีค่าเป็นลบเมื่อ $-5\text{m} < x < 5\text{m}$ โดยมีค่าสูงสุดที่ $x = 0$ และ $\pm 10\text{m}, y = 0$ และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ $y = \pm 1\text{m}$



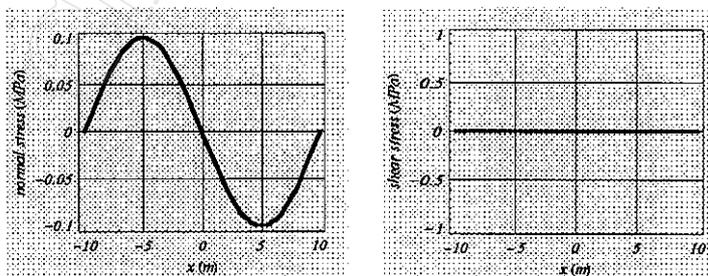
(ก) เงามันที่ขอบ $x = -10\text{m}$



(ข) เงามันที่ขอบ $x = 10\text{m}$



(ค) เงามันที่ขอบ $y = -1\text{m}$



(ง) เงามันที่ขอบ $y = 1\text{m}$

รูปที่ 4.20 ความเค้นตามเงื่อนไซ้ที่ขอบในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนตัวอย่างที่ 5

จากการคำนวณค่าความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นโดยใช้โปรแกรมพบว่าค่า σ_{xx} สูงสุดเกิดที่ $x=\pm 5\text{m}$, $y=\pm 1\text{m}$ โดยมีค่าเท่ากับ 1.54175 MPa และค่า τ_{xy} สูงสุดเกิดที่ $x=0$ และ $\pm 10\text{m}$, $y=0$ โดยมีค่าเท่ากับ 0.23793 MPa ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าที่คำนวณได้ตามทฤษฎีฟังก์ชันความเค้น สรุปการใช้งานของโปรแกรมในกรณีนี้ได้ว่าค่าความเค้นและความเครียดที่ได้จากโปรแกรมมีค่าเหมือนกับค่าที่คำนวณได้ตามทฤษฎีฟังก์ชันความเค้นและความเค้นที่ขอบมีค่าสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ขอบทุก ๆ ด้านของวัสดุดังรูปที่ 4.20

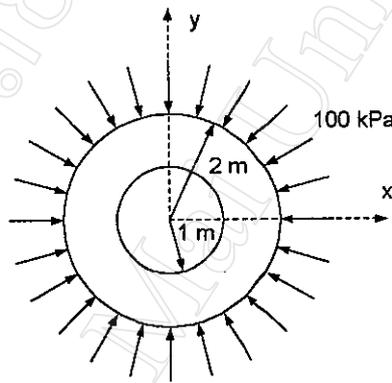
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Chiang Mai University

4.2.2 ตัวอย่างในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ก. ตัวอย่างที่ 1

แผ่นจานวงกลมรัศมี 2 m มีรูตรงกลางรัศมี 1 m รับภาระแรงดันขนาด 100 kPa กระจายอย่างสม่ำเสมอที่ขอบด้านนอกตามทิศทางดังรูป พิจารณาการกระจายของ σ_r , σ_{θ} และ $\tau_{r\theta}$ พบว่า จะไม่ขึ้นกับมุม θ เนื่องจากการรับภาระมีลักษณะสมมาตรรอบจุดกำเนิด (Origin) เมื่อพิจารณาสมการของ ฟังก์ชันความเค้นที่อยู่ในรูปของ $a \ln r + b r^2 \ln r$ พบว่ามีลักษณะสอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้น เมื่อนำสมการนี้มาหาค่า σ_r จะได้เท่ากับ $a / r^2 + 2b$ แทนค่าในสมการเงื่อนไขที่ขอบ $r=1$; $\sigma_r=0$ และ $r=2$; $\sigma_r = 100$ kPa จะได้ค่า a, b เท่ากับ $-400 / 3$ และ $400 / 6$ ตามลำดับ ซึ่งจะได้ว่า

$$\Phi = (400/3) \ln r - (400/6) r^2 \text{ kN}$$

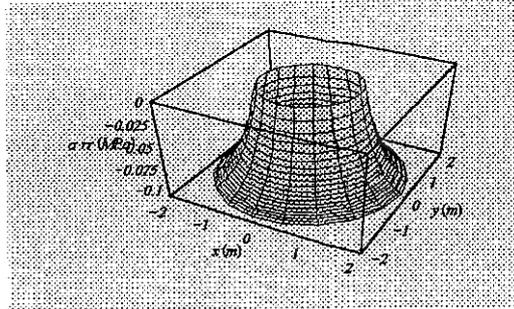


รูปที่ 4.21 การรับภาระในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 1

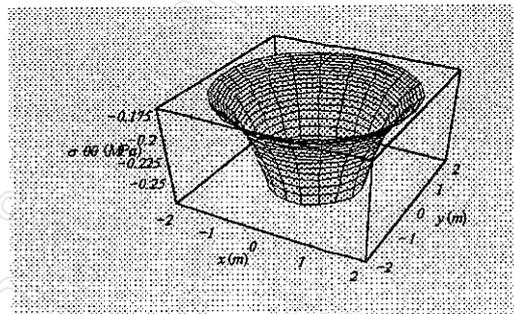
เงื่อนไขที่ด้านนอกและด้านในของแผ่นจานวงกลม

$$r=1\text{m}; \tau_{r\theta}=0, \sigma_r=0$$

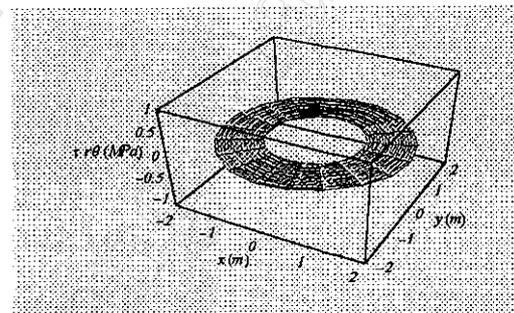
$$r=2\text{m}; \tau_{r\theta}=0, \sigma_r=-0.1\text{MPa}$$



(ก) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน r



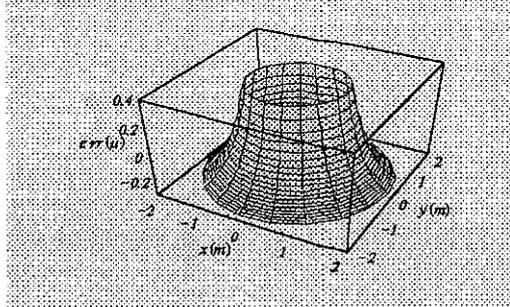
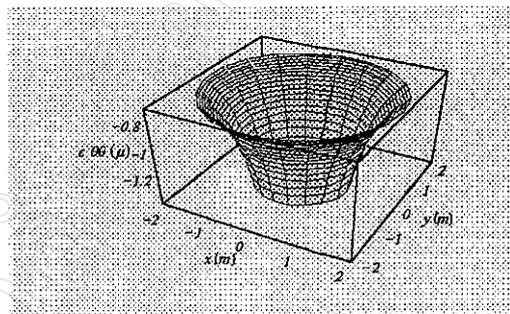
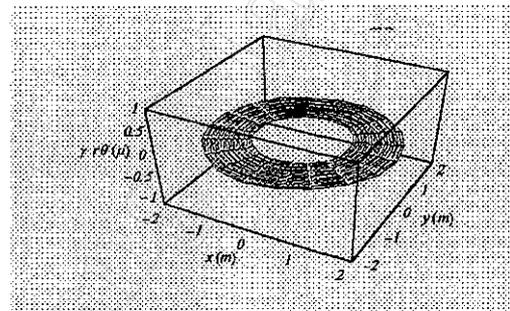
(ข) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน θ



(ค) แสดงการกระจายความเค้นเฉือน

รูปที่ 4.22 การกระจายความเค้นในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 1

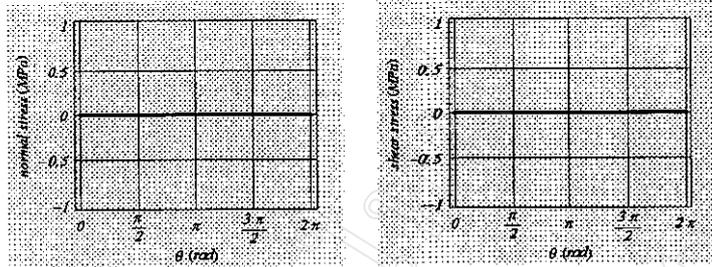
เมื่อแทนค่าสมการของฟังก์ชันความเค้นในโปรแกรมจะได้ภาพการกระจายความเค้นดังรูปที่ 4.22 ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.22(ก) เป็นภาพการกระจายของ σ_r ซึ่งมีค่าเท่ากับ -0.1 MPa ที่ขอบด้านนอกและมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ขอบด้านใน รูปที่ 4.22(ข) เป็นภาพการกระจายของ σ_θ ซึ่งมีค่าเป็นลบที่ทุก ๆ จุดในเนื้อวัสดุ โดยมีค่ามากที่สุดที่ขอบด้านนอกมีค่าเท่ากับ -0.16667 MPa และมีค่าน้อยที่สุดที่ขอบด้านในมีค่าเท่ากับ -0.26667 MPa และรูปที่ 4.22(ค) เป็นภาพการกระจายของ $\tau_{\theta r}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ทุก ๆ จุดในเนื้อวัสดุ

(ก) แสดงการกระจายความเคียดในแนวแกน r (ข) แสดงการกระจายความเคียดในแนวแกน θ 

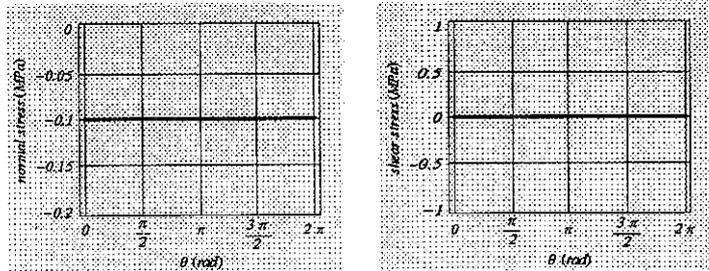
(ค) แสดงการกระจายความเคียดเฉือน

รูปที่ 4.23 การกระจายความเคียดในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 1

รูปที่ 4.23 เป็นภาพการกระจายความเคียดซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.23(ก) เป็นภาพการกระจายของ E_r ซึ่งมีค่าเป็นลบที่ขอบด้านนอกและมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนมีค่าเป็นบวกที่ขอบด้านใน รูปที่ 4.23(ข) เป็นภาพการกระจายของ E_θ ซึ่งมีค่าเป็นลบที่ทุก ๆ จุดในเนื้อวัสดุ โดยมีค่ามากที่สุดที่ขอบด้านนอกและมีค่าน้อยที่สุดที่ขอบด้านใน และรูปที่ 4.23(ค) เป็นภาพการกระจายของ E_z ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ทุก ๆ จุดในเนื้อวัสดุ



(ก) เส้นใยที่ขอบ $r=1\text{m}$



(ข) เส้นใยที่ขอบ $r=2\text{m}$

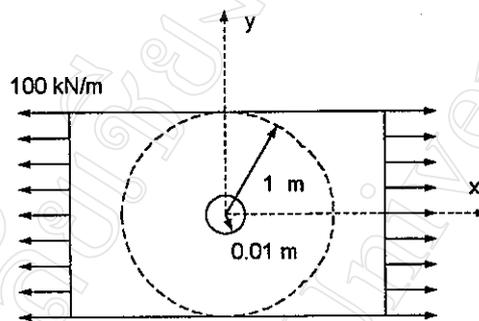
รูปที่ 4.24 ความเค้นตามเส้นใยที่ขอบในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 1

จากการคำนวณค่าความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นโดยใช้โปรแกรมพบว่าค่า σ_{rr} สูงสุดเกิดที่ $r=2\text{m}$ โดยมีค่าเท่ากับ 0.1 MPa ค่า $\sigma_{\theta\theta}$ สูงสุดเกิดที่ $r=2\text{m}$ โดยมีค่าเท่ากับ -0.16667 MPa และค่า $\sigma_{\theta\theta}$ ต่ำสุดเกิดที่ $r=1\text{m}$ โดยมีค่าเท่ากับ -0.26667 MPa สรุปการใช้งานของโปรแกรมในกรณีนี้ได้ว่าค่าความเค้นและความเครียดที่ได้จากโปรแกรมมีค่าเหมือนกับค่าที่คำนวณได้ตามทฤษฎีฟังก์ชันความเค้น และความเค้นที่ขอบมีค่าสอดคล้องกับเส้นใยที่ขอบทุก ๆ ด้านของวัสดุตั้งรูปที่ 4.24

ข. ตัวอย่างที่ 2

แผ่นระนาบสี่เหลี่ยมขนาดใหญ่มีรูวงกลมตรงกลางรัศมี 0.01 m รับภาระแรงดึงคงที่ขนาด 100 kPa กระทำที่ขอบตามทิศทางดังรูป สมการของฟังก์ชันความเค้นขึ้นกับมุม 2θ โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ในสมการหาได้จากเงื่อนไขที่ขอบตามวิธีการในตัวอย่างที่ 1 จะได้ว่า

$$\Phi = -5 \times 10^{-3} \ln r + 25r^2 - (25r^2 + 2.5 \times 10^{-7} r^{-2} - 5 \times 10^{-3}) \cos 2\theta \text{ kN}$$

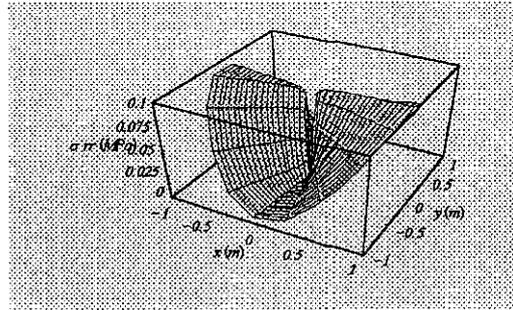


รูปที่ 4.25 การรับภาระในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 2

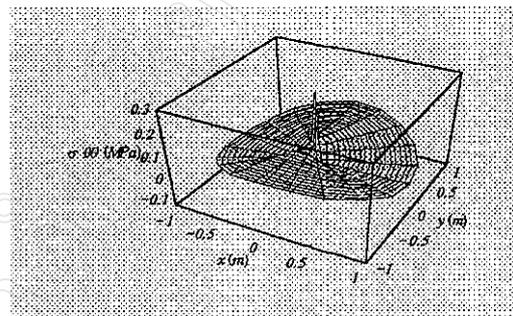
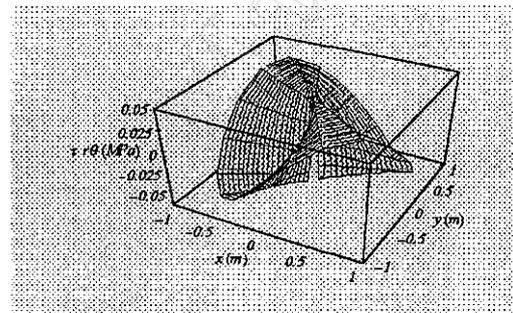
เงื่อนไขที่รูวงกลมและที่ขอบของแผ่นระนาบสี่เหลี่ยมด้านที่รับแรงดึง

$$r=0.01 \text{ m}; \tau_{\theta} = 0, \sigma_{rr} = 0$$

$$r=1 \text{ m}; \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sigma_{rr} \cos \theta - \tau_{\theta} \sin \theta) d\theta = 200 \text{ kN}$$



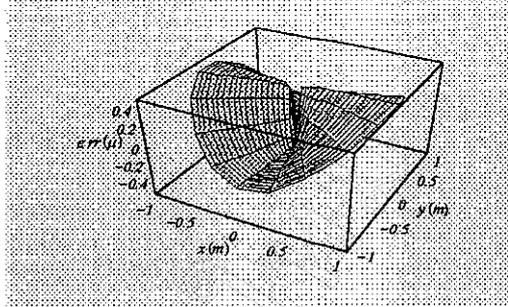
(ก) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน r

(ข) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน θ 

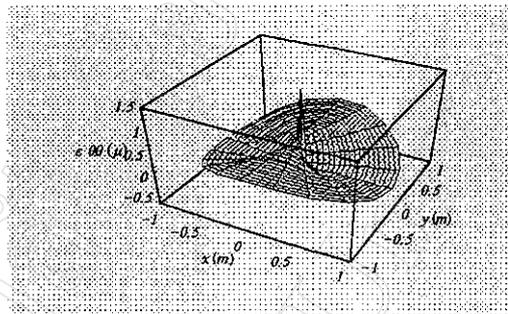
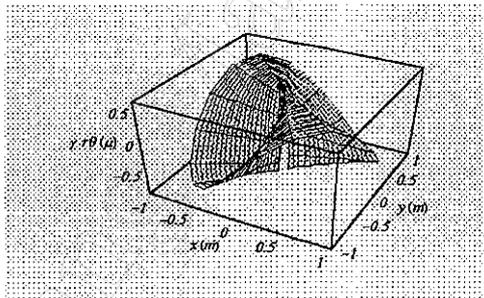
(ค) แสดงการกระจายความเค้นเฉือน

รูปที่ 4.26 การกระจายความเค้นในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 2

เมื่อแทนค่าสมการของฟังก์ชันความเค้นในโปรแกรมจะได้ภาพการกระจายความเค้นดังรูปที่ 4.26 ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.26(ก) เป็นภาพการกระจายของ σ_r ซึ่งมีค่ามากเมื่อ $\theta=0, \pi$ โดยมีค่าเข้าใกล้ 0.1 MPa เมื่อ r มีค่าเพิ่มขึ้นและมีค่าน้อยเมื่อ $\theta=\pi/2, 3\pi/2$ rad โดยมีค่าเข้าใกล้ 0 เมื่อ r มีค่าเพิ่มขึ้น รูปที่ 4.26(ข) เป็นภาพการกระจายของ σ_θ ซึ่งมีค่ามากเมื่อ $\theta=\pi/2, 3\pi/2$ rad โดยมีค่าสูงสุดที่ $r=0.01$ m มีค่าเข้าใกล้ 0.3 MPa และรูปที่ 4.26(ค) เป็นภาพการกระจายของ $\tau_{r\theta}$ ซึ่งมีค่าเป็นบวกและลบสลับกันโดยมีค่าสูงสุดที่ $\theta=\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ rad มีค่าเข้าใกล้ 0.05 MPa



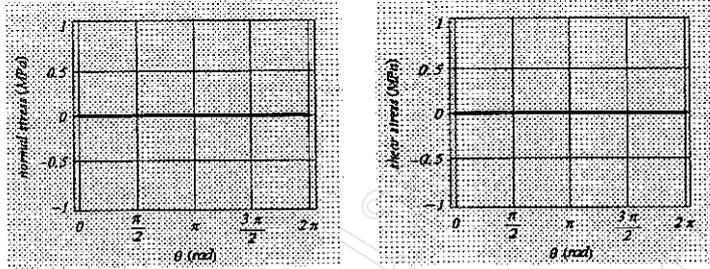
(ก) แสดงการกระจายความเคียดในแนวแกน r

(ข) แสดงการกระจายความเคียดในแนวแกน θ 

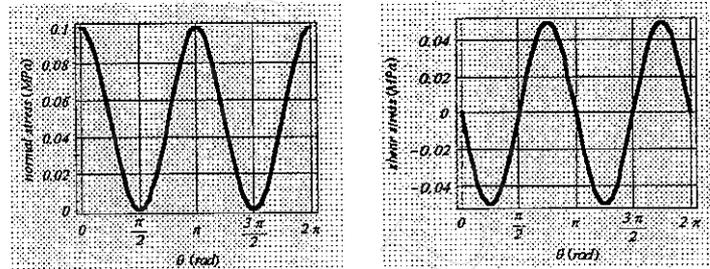
(ค) แสดงการกระจายความเคียดเขียน

รูปที่ 4.27 การกระจายความเคียดในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 2

รูปที่ 4.27 เป็นภาพการกระจายความเคียดซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.27(ก) เป็นภาพการกระจายของ E_r ซึ่งมีค่าเป็นบวกและลบสลับกัน โดยมีค่ามากเมื่อ $\theta=0, \pi$ rad และมีค่าน้อยเมื่อ $\theta=\pi/2, 3\pi/2$ rad รูปที่ 4.27(ข) เป็นภาพการกระจายของ E_θ ซึ่งมีค่ามากเมื่อ $\theta=\pi/2, 3\pi/2$ rad โดยมีค่าสูงสุดที่ $r=0.01$ m และรูปที่ 4.27(ค) เป็นภาพการกระจายของ E_z ซึ่งมีค่าเป็นบวกและลบสลับกัน โดยมีค่าสูงสุดที่ $\theta=\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ rad



(ก) เส้นใยที่ขอบ $r=0.01\text{m}$



(ข) เส้นใยที่ขอบ $r=1\text{m}$

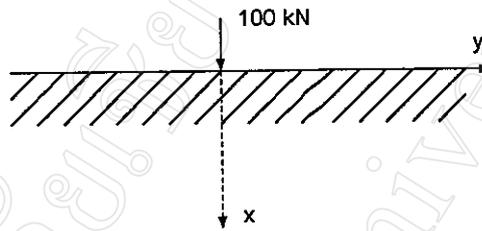
รูปที่ 4.28 ความเค้นตามเส้นใยที่ขอบในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 2

จากการคำนวณค่าความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นโดยใช้โปรแกรมพบว่าค่า σ_{rr} สูงสุดเกิดที่ $r=1\text{m}$, $\theta=0$ และ π rad โดยมีค่า ≈ 0.1 MPa ค่า $\sigma_{\theta\theta}$ สูงสุดเกิดที่ $r=0.01\text{m}$, $\theta=\pi/2, 3\pi/2$ rad โดยมีค่า ≈ 0.3 MPa และค่า $\tau_{r\theta}$ สูงสุดเกิดที่ $r=1\text{m}$, $\theta=\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ และ $7\pi/4$ rad โดยมีค่า ≈ 0.05 MPa สรุปการใช้งานของโปรแกรมในกรณีนี้ได้ว่าค่าความเค้นและความเครียดที่ได้จากโปรแกรมมีค่าเหมือนกับค่าที่คำนวณได้ตามทฤษฎีฟังก์ชันความเค้น และความเค้นที่ขอบมีค่าสอดคล้องกับเส้นใยที่ขอบทุก ๆ ด้านของวัสดุดังรูปที่ 4.28

ค. ตัวอย่างที่ 3

แผ่นระนาบขนาดใหญ่มีขอบเป็นเส้นตรงรับภาระแรงกดเป็นจุดขนาด 100 kN กระทำที่ขอบตามทิศทางดังรูป ค่าสัมประสิทธิ์ในสมการของฟังก์ชันความเค้นหาได้จากเงื่อนไขที่ขอบตามวิธีการในตัวอย่างที่ 1 จะได้ว่า

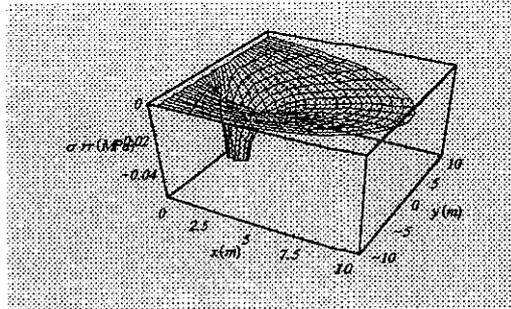
$$\Phi = -\frac{100}{\pi} r\theta \sin\theta \text{ kN}$$



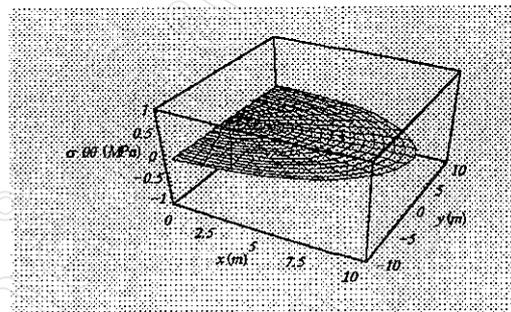
รูปที่ 4.29 การรับภาระในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 3

ที่ r ใดๆ

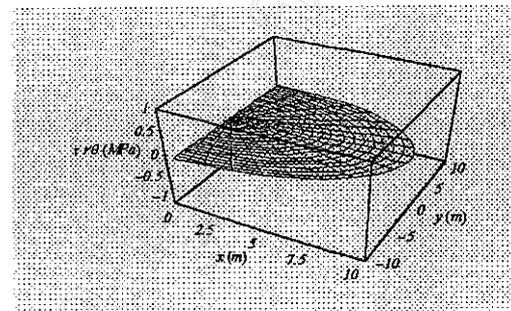
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_{rr} \cos\theta d\theta = -100 \text{ kN}$$



(ก) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน r



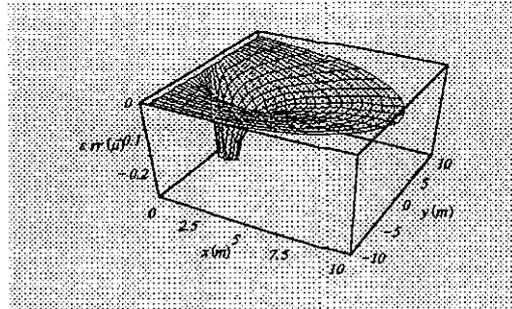
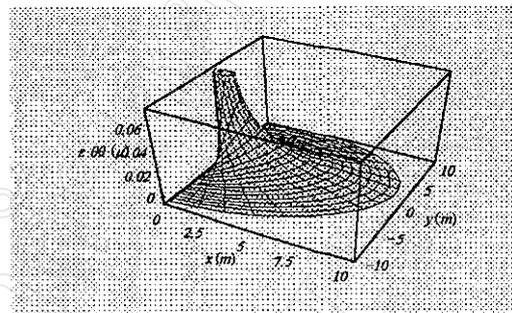
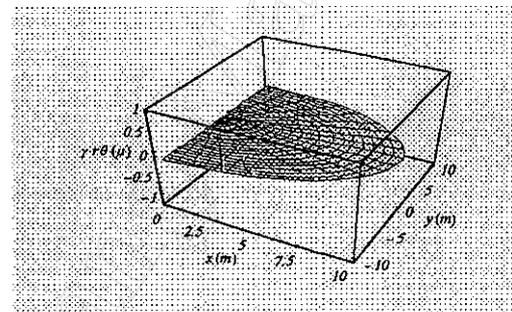
(ข) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน theta



(ค) แสดงการกระจายความเค้นเฉือน

รูปที่ 4.30 การกระจายความเค้นในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 3

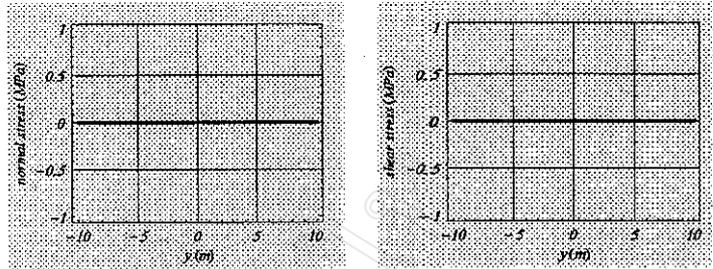
เมื่อแทนค่าสมการของฟังก์ชันความเค้นในโปรแกรมจะได้ภาพการกระจายความเค้นดังรูปที่ 4.30 ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.30(ก) เป็นภาพการกระจายของ σ_{rr} ซึ่งมีค่ามากเมื่อ $\theta=0$ และมีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อ $\theta=\pm\pi/2$ rad โดยมีค่า $\approx -\infty$ เมื่อ $r=0$ รูปที่ 4.30(ข) และ 4.30(ค) เป็นภาพการกระจายของ $\sigma_{\theta\theta}$ และ $\tau_{r\theta}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ทุก ๆ จุดในเนื้อวัสดุ

(ก) แสดงการกระจายความเคียดในแนวแกน r (ข) แสดงการกระจายความเคียดในแนวแกน θ 

(ค) แสดงการกระจายความเคียดเฉือน

รูปที่ 4.31 การกระจายความเคียดในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 3

รูปที่ 4.31 เป็นภาพการกระจายความเคียดซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.31(ก) เป็นภาพการกระจายของ ϵ_r ซึ่งมีค่ามากเมื่อ $\theta=0$ และมีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อ $\theta=\pm\pi/2$ rad โดยมีค่า $\approx -\infty$ เมื่อ $r=0$ รูปที่ 4.31(ข) เป็นภาพการกระจายของ ϵ_θ ซึ่งมีค่ามากเมื่อ $\theta=0$ และมีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อ $\theta=\pm\pi/2$ rad โดยมีค่า $\approx \infty$ เมื่อ $r=0$ และรูปที่ 4.31(ค) เป็นภาพการกระจายของ γ_z ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ทุก ๆ จุดในเนื้อวัสดุ



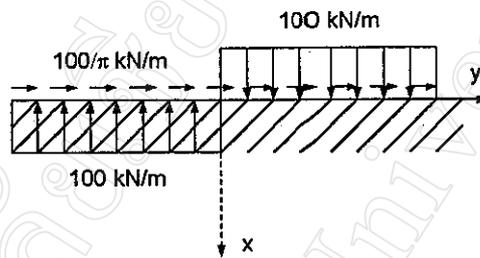
รูปที่ 4.32 ความเค้นตามเส้นรอบวงที่ขอบในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 3

จากการคำนวณค่าความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นโดยใช้โปรแกรมพบว่าค่า σ_r สูงสุดเกิดที่ $r=0$ โดยมีค่าเข้าสู่ $-\infty$ และมีค่าน้อยลงเมื่อ r มีค่าเพิ่มขึ้น สรุปการใช้งานของโปรแกรมในกรณีนี้ได้ว่าค่าความเค้นและความเครียดที่ได้จากโปรแกรมมีค่าเหมือนกับค่าที่คำนวณได้ตามทฤษฎีฟังก์ชันความเค้น และความเค้นที่ขอบมีค่าสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ขอบทุก ๆ ด้านของวัสดุดังรูปที่ 4.32

ง. ตัวอย่างที่ 4

แผ่นระนาบขนาดใหญ่มีขอบเป็นเส้นตรงรับภาระกระจายอย่างสม่ำเสมอขนาด 100 kN/m และรับแรงเฉือนขนาด $100/\pi \text{ kN}$ กระทำที่ขอบตามทิศทางดังรูป ค่าสัมประสิทธิ์ในสมการของฟังก์ชันความเค้นหาได้จากเงื่อนไขที่ขอบตามวิธีการในตัวอย่างที่ 1 จะได้ว่า

$$\Phi = -\frac{100}{\pi} r^2 \theta \text{ kN}$$

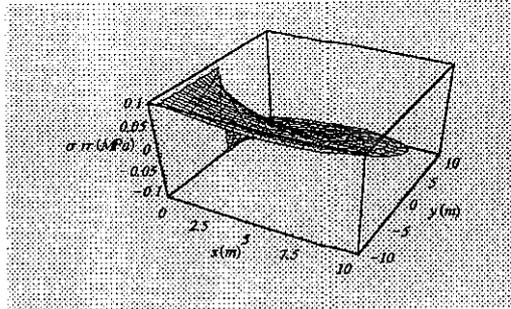


รูปที่ 4.33 การรับภาระในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 4

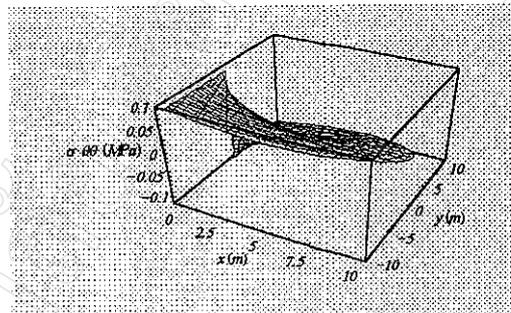
ที่ขอบของแผ่นระนาบ

$$\theta = \pi/2 \text{ rad}; \tau_{\theta\theta} = 100/\pi \text{ MPa}, \sigma_{\theta\theta} = -0.1 \text{ MPa}$$

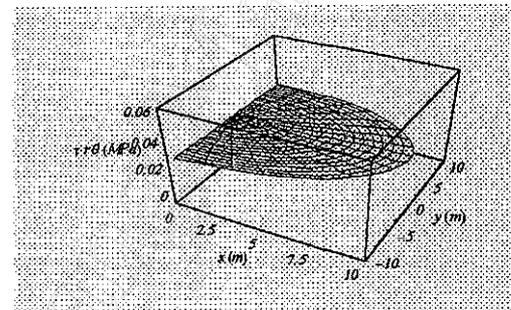
$$\theta = -\pi/2 \text{ rad}; \tau_{\theta\theta} = 100/\pi \text{ MPa}, \sigma_{\theta\theta} = 0.1 \text{ MPa}$$



(ก) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน r



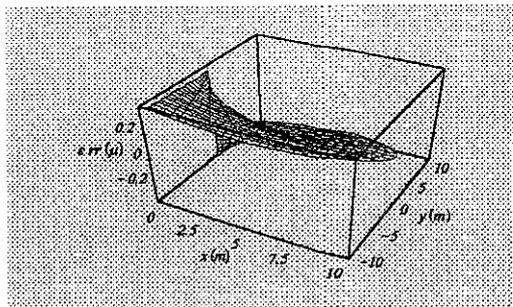
(ข) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน θ



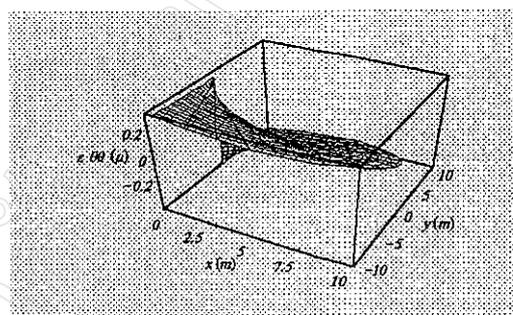
(ค) แสดงการกระจายความเค้นเฉือน

รูปที่ 4.34 การกระจายความเค้นในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 4

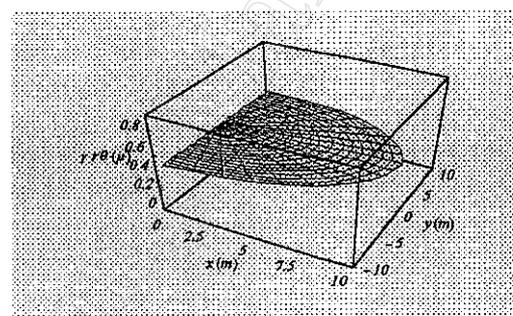
เมื่อแทนค่าสมการของฟังก์ชันความเค้นในโปรแกรมจะได้ภาพการกระจายความเค้นดังรูปที่ 4.34 ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.34(ก) เป็นภาพการกระจายของ σ_r พิจารณาที่ขอบของแผ่นระนาบ σ_r มีค่าเท่ากับ 0.1 MPa เมื่อ $y < 0$ และมีค่าเท่ากับ -0.1 MPa เมื่อ $y > 0$ โดยมีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่อ r มีค่าเพิ่มขึ้น รูปที่ 4.34(ข) เป็นภาพการกระจายของ σ_θ ซึ่งมีลักษณะเหมือนกับ σ_r และรูปที่ 4.34(ค) เป็นภาพการกระจายของ $\tau_{\theta r}$ ซึ่งมีค่าคงที่ทุก ๆ จุดในเนื้อวัสดุมีค่าเท่ากับ $100/\pi$ kPa



(ก) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน r



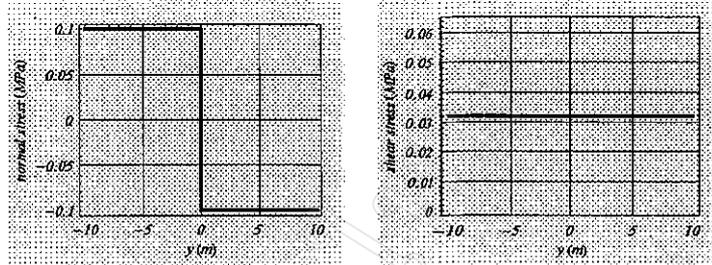
(ข) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน θ



(ค) แสดงการกระจายความเค้นเฉือน

รูปที่ 4.35 การกระจายความเค้นในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 4

รูปที่ 4.35 เป็นภาพการกระจายความเค้นซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.35(ก) เป็นภาพการกระจายของ ϵ_{rr} พิจารณาที่ขอบของแผ่นระนาบ ϵ_{rr} มีค่ามากที่สุดเมื่อ $y < 0$ และมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $y > 0$ โดยมีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่อ r มีค่าเพิ่มขึ้น รูปที่ 4.35(ข) เป็นภาพการกระจายของ $\epsilon_{\theta\theta}$ ซึ่งมีลักษณะเหมือนกับ ϵ_{rr} และรูปที่ 4.35(ค) เป็นภาพการกระจายของ γ_{rz} ซึ่งมีค่าคงที่ทุก ๆ จุดในเนื้อวัสดุ



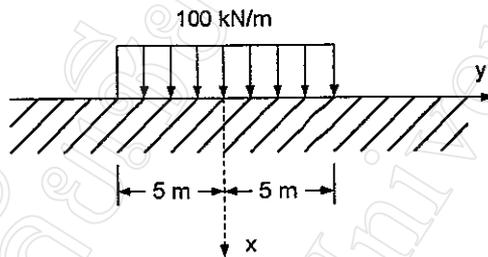
รูปที่ 4.36 ความเค้นตามเงื่อนไขที่ขอบในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 4

จากการคำนวณค่าความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นโดยใช้โปรแกรมพบว่าค่า σ_{rr} และค่า $\sigma_{\theta\theta}$ สูงสุดเกิดที่ขอบของแผ่นระนาบ โดยมีค่าเท่ากับ 0.1 MPa และ -0.1 MPa เมื่อ $y < 0$ และ $y > 0$ ตามลำดับ และค่า $\tau_{r\theta}$ มีค่าเท่ากับ $100/\pi$ kPa ที่ทุก ๆ จุดในเนื้อวัสดุ สรุปการใช้งานของโปรแกรมในกรณีนี้ได้ว่าค่าความเค้นและความเครียดที่ได้จากโปรแกรมมีค่าเหมือนกับค่าที่คำนวณได้ตามทฤษฎีฟังก์ชันความเค้น และความเค้นที่ขอบมีค่าสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ขอบทุก ๆ ด้านของวัสดุดังรูปที่ 4.36

จ. ตัวอย่างที่ 5

แผ่นระนาบขนาดใหญ่มีขอบเป็นเส้นตรงรับภาระแรงกดอย่างสม่ำเสมอขนาด 100 kN/m กระทำในช่วง $-5 < y < 5$ m ที่ขอบตามทิศทางดังรูป ค่าสัมประสิทธิ์ในสมการของฟังก์ชันความเค้นหาได้จากเงื่อนไขที่ขอบตามวิธีการในตัวอย่างที่ 1 จะได้ว่า

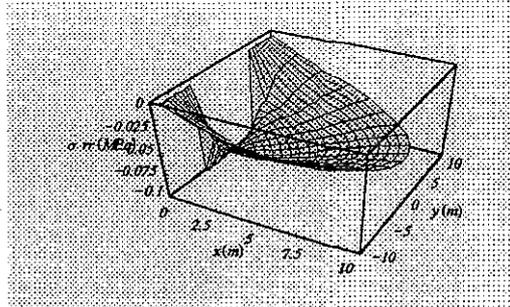
$$\Phi = \frac{50}{\pi} (r_1^2 \theta_1 - r_2^2 \theta_2) \text{ kN}$$



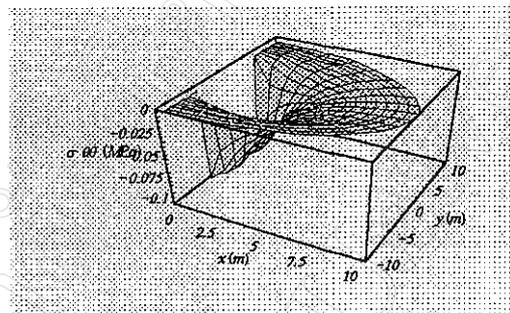
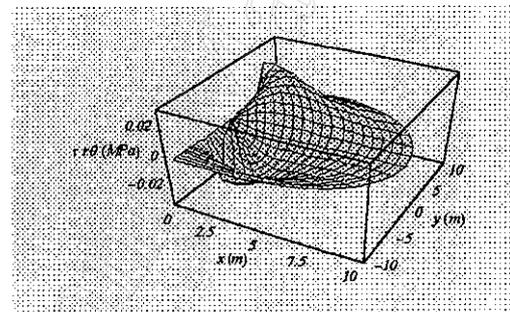
รูปที่ 4.37 การรับภาระในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 5

ที่ขอบของแผ่นระนาบ

$$0 < r \leq 5 \text{ m}, \theta = \pm \pi/2 \text{ rad}; \sigma_{\theta\theta} = -0.1 \text{ MPa}$$



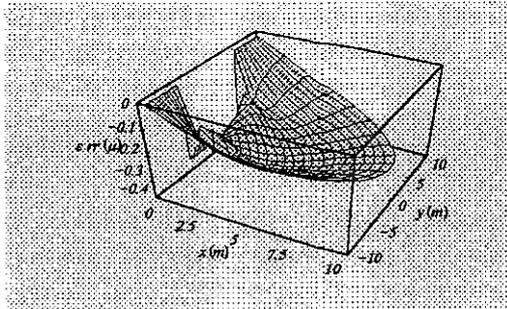
(ก) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน r

(ข) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน θ 

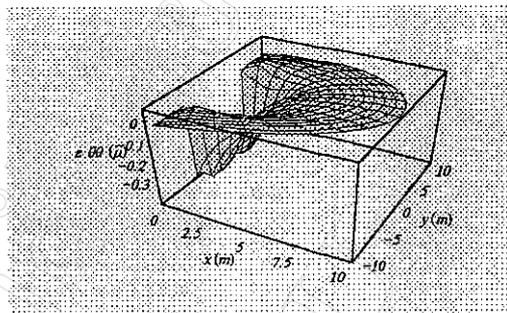
(ค) แสดงการกระจายความเค้นเฉือน

รูปที่ 4.38 การกระจายความเค้นในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 5

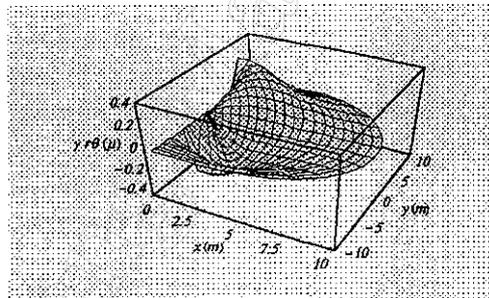
เมื่อแทนค่าสมการของฟังก์ชันความเค้นในโปรแกรมจะได้ภาพการกระจายความเค้นดังรูปที่ 4.38 ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.38(ก) เป็นภาพการกระจายของ σ_{rr} พิจารณาที่ขอบของแผ่นระนาบ σ_{rr} มีค่าเท่ากับ -0.1 MPa เมื่อ $-5 < y < 5$ m โดยมีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่อ r มีค่าเพิ่มขึ้น รูปที่ 4.38(ข) เป็นภาพการกระจายของ $\sigma_{\theta\theta}$ ซึ่งมีลักษณะเหมือนกับ σ_{rr} และรูปที่ 4.38(ค) เป็นภาพการกระจายของ $\tau_{r\theta}$ ซึ่งมีค่ามากที่สุดที่ตำแหน่งใกล้เคียงกับภาระที่มากกระทำ และมีค่าลดลงเมื่อระยะห่างจากขอบของแผ่นระนาบมีค่าเพิ่มขึ้น



(ก) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน r



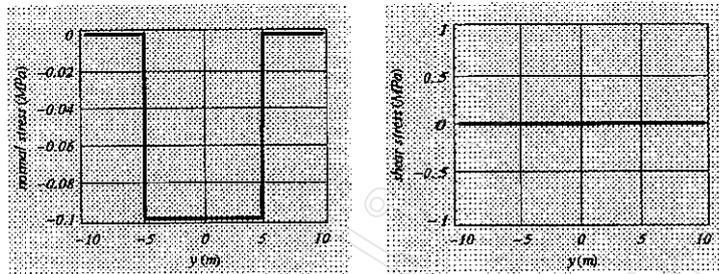
(ข) แสดงการกระจายความเค้นในแนวแกน θ



(ค) แสดงการกระจายความเค้นเฉือน

รูปที่ 4.39 การกระจายความเค้นในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 5

รูปที่ 4.39 เป็นภาพการกระจายความเค้นซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วน รูปที่ 4.39(ก) เป็นภาพการกระจายของ ϵ_r พิจารณาที่ขอบของแผ่นระนาบ ϵ_r มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $-5 < y < 5$ m โดยมีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่อ r มีค่าเพิ่มขึ้น รูปที่ 4.39(ข) เป็นภาพการกระจายของ ϵ_{θ} ซึ่งมีลักษณะเหมือนกับ ϵ_r และรูปที่ 4.39(ค) เป็นภาพการกระจายของ $\gamma_{\theta z}$ ซึ่งมีค่ามากที่สุดที่ตำแหน่งใกล้เคียงกับภาระที่มากกระทำ และมีค่าลดลงเมื่อระยะห่างจากขอบของแผ่นระนาบมีค่าเพิ่มขึ้น



รูปที่ 4.40 ความเค้นตามเงื่อนไขที่ขอบในระบบพิกัดเชิงขั้วตัวอย่างที่ 5

จากการคำนวณค่าความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นโดยใช้โปรแกรมพบว่าค่า σ_{rr} และค่า $\sigma_{\theta\theta}$ สูงสุดเกิดที่ขอบของแผ่นระนาบ โดยมีค่าเท่ากับ -0.1 MPa เมื่อ $-5 < y < 5$ m สรุปการใช้งานของโปรแกรมในกรณีนี้ได้ว่าค่าความเค้นและความเครียดที่ได้จากโปรแกรมมีค่าเหมือนกับค่าที่คำนวณได้ตามทฤษฎีฟังก์ชันความเค้น และความเค้นที่ขอบมีค่าสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ขอบทุก ๆ ด้านของวัสดุดังรูปที่ 4.40