บทที่ 2
หลักการและทฤษฎี

2.1 ความเค้น

ความเค้นเฉลี่ยบนระนาบพื้นที่ ΔA คืออัตราส่วนของแรง ΔF ต่อขนาดของพื้นที่ ΔA ที่แรงนั้นกระทำ ถ้ากำหนดให้พื้นที่ ΔA นั้นมีขนาดเล็กมาก ๆ และล้อมรอบจุด P ความเค้นเฉลี่ยจะกลายเป็นความเค้นบนระนาบที่จุด P นั้นและมีทิศทางเดียวกันกับแรงที่กระทำตามสมการ

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \tag{2.1}$$

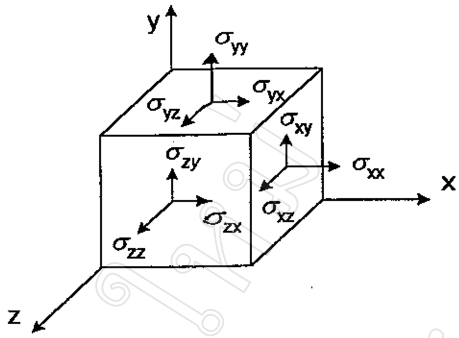
เนื่องจากแรง ΔF ที่กระทำมีทิศทางใด ๆ จึงสามารถแตกแรงออกเป็นองค์ประกอบที่ตั้งฉากกันคือ ΔF_n และ ΔF_s ซึ่งมีทิศทางตั้งฉากและสัมผัสกับพื้นที่ตามลำดับ เมื่อพิจารณาความเค้นในสามมิติโดยให้แกนหนึ่งทับกับแกนตั้งฉากกับระนาบจะได้องค์ประกอบความเค้นสามองค์ประกอบคือความเค้นในแนวตั้งฉาก σ_n หนึ่งองค์ประกอบและความเค้นในแนวสัมผัส σ_s สององค์ประกอบซึ่งมีทิศทางตั้งฉากกัน

2.1.1 ความเค้นเชิงเทนเซอร์ (Stress Tensor)

สภาวะของความเค้นที่จุดใดจุดหนึ่งในเนื้อวัสดุกำหนดได้ด้วยองค์ประกอบของความเค้นซึ่งกระทำที่ผิวนอกของวัสดุที่มีลักษณะเป็นกล่องตันและมีขอบขนานกับแกน x, y และ z โดยที่ขนาดของกล่องมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ องค์ประกอบความเค้นแสดงได้โดยใช้ตัวห้อยท้ายสองตัว ตัวห้อยท้ายตัวแรกแสดงระนาบซึ่งบอกได้ด้วยเส้นตั้งฉากกับด้านของกล่องและมีทิศทางพุ่งออกจากกล่อง ตัวห้อยท้ายตัวที่สองแสดงทิศทางของความเค้น องค์ประกอบความเค้นบนระนาบ i ในทิศทาง j มีค่าเป็น [Mase (1970)]

$$\sigma_{ij} = t^{(\bar{e}_i)} \cdot \bar{e}_j \tag{2.2}$$

เมื่อ $t^{(\bar{e}_i)}$ เป็นขนาดความเค้นที่กระทำที่ผิวกล่องด้านที่มีเวคเตอร์ตั้งฉากกับผิวกล่องคือ $\bar{e}_i$ และมีองค์ประกอบความเค้นตามทิศทาง $\bar{e}_j$ เครื่องหมายขององค์ประกอบความเค้นเป็นบวกเมื่อ i และ j มีทิศทางไปทางแกนบวกหรือลบทั้งคู่ จำนวนขององค์ประกอบความเค้นที่จุดใด ๆ ในเนื้อวัสดุประกอบด้วยองค์ประกอบความเค้นจำนวนเก้าองค์ประกอบดังแสดงในรูปที่ 2.1 วัสดุมีลักษณะเป็นกล่องเล็ก ๆ ล้อมรอบจุด O เมื่อคิดการสมดุลของโมเมนต์ในแต่ละแกนโดยไม่คิดผลแรงคู่ควบที่เกิดขึ้นบนผิวและในตัววัสดุ เนื่องจากขนาดของกล่องที่พิจารณามีขนาดเล็กมาก ๆ สามารถสรุปได้ว่า $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ทำให้องค์ประกอบความเค้นมีสมมาตร ค่าที่เหลือคือ σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, σ_{xy}, σ_{yz} และ σ_{zx}

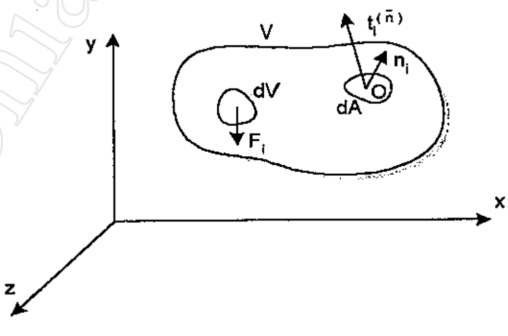


รูปที่ 2.1 องค์ประกอบความเค้นในเนื้อวัสดุ

2.1.2 สมการสมดุล

ปกติความเค้นที่จุดต่าง ๆ ภายในเนื้อวัสดุจะมีค่าแตกต่างกันออกไป องค์ประกอบของความเค้นมักจะเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x, y และ z ซึ่งเป็นตัวแปรบอกตำแหน่งของวัสดุ เมื่อพิจารณาที่สภาวะสมดุลของวัสดุปริมาตร V ในรูปที่ 2.2 ความเค้น $t_i^{(\hat{n})}$ กระทำที่จุด O บนพื้นที่ dA ซึ่งมีเวคเตอร์ n_i ตั้งฉากกับพื้นที่และมีแรงภายในตัววัสดุ (Body Force) ซึ่งแสดงด้วยองค์ประกอบของแรงต่อหน่วยปริมาตรในทิศทางต่าง ๆ ใช้สัญลักษณ์ F_i กระทำกับปริมาตร dV เมื่อวัสดุอยู่ในสภาวะสมดุลผลรวมของแรงที่กระทำกับปริมาตร V เท่ากับศูนย์ จากการคิดการสมดุลของแรงโดยใช้ทฤษฎีของเกาส์ (Gauss) และสัญลักษณ์ตัวห้อยที่เหมือนกันในพจน์เดียวกันแทนผลบวกของสามเทอม ได้สมการเทนเซอร์ (Tensor) คือ [Mase (1970)]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \qquad (2.3)$$



รูปที่ 2.2 ความเค้นที่เกิดขึ้นกับวัสดุ

i,j = 1,2 และ 3 โดยที่ x_1, x_2 และ x_3 แทน x, y และ z ตามลำดับ ตัวห้อย 1,2 และ 3 ของ σ และ F แทน x, y และ z ตามลำดับ สมการ (2.3) กระจายออกเป็นสามสมการดังนี้

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \\
&\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \\
&\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

2.2 การเปลี่ยนตำแหน่งและความเครียด

พิจารณาการเปลี่ยนตำแหน่งของจุดต่าง ๆ ภายในเนื้อวัสดุเมื่อกำหนดให้ตำแหน่งของจุดในเนื้อวัสดุก่อนการเปลี่ยนตำแหน่งแสดงด้วยพิกัด (X, Y, Z) ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนและเมื่อวัตถุเปลี่ยนตำแหน่งไปแล้วแสดงด้วยพิกัด (x, y, z) ซึ่งวัดเทียบกับระบบพิกัดคาร์ทีเซียนชุดเดิม กำหนดให้การเปลี่ยนตำแหน่งของจุดในเนื้อวัสดุแสดงด้วยเวคเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่ง (u, v, w) ได้ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดทั้งสองดังนี้

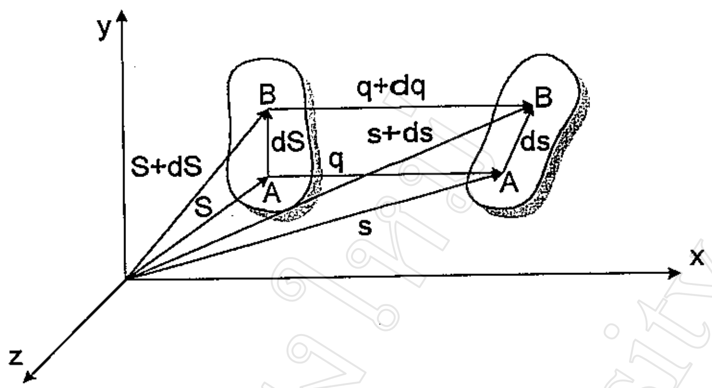
$$
x = X + u,\ y = Y + v,\ z = Z + w \tag{2.5}
$$

ตำแหน่งเดิมของวัสดุก่อนการเปลี่ยนตำแหน่งสามารถกำหนดพิกัดได้โดยใช้จุดของวัสดุเมื่อเปลี่ยนตำแหน่งไปแล้วเป็นตัวแปรอิสระ หรือพิกัด (X, Y, Z) เป็นฟังก์ชันของพิกัด (x, y, z) ซึ่งวิธีการกำหนดตำแหน่งแบบนี้เรียกว่าวิธีของออยเลอร์ และพิกัดที่ได้เรียกว่าพิกัดสปาเชียล (Spatial Coordinates) หรือพิกัดแบบออยเลอเรียน (Eulerian Coordinates)

2.2.1 ความเครียดเชิงเทนเซอร์ (Strain Tensor)

จากรูปที่ 2.3 กำหนดให้ระยะทางระหว่างจุด A และจุด B ซึ่งอยู่ใกล้กันมากภายในเนื้อวัสดุก่อนการเปลี่ยนตำแหน่งมีความยาว dS และหลังการเปลี่ยนตำแหน่งมีความยาว ds เขียนความยาว dS และ ds ในเทอมของพิกัดได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
dS^2 &= dX^2 + dY^2 + dZ^2 \\
ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2
\end{aligned} \tag{2.6}
$$



รูปที่ 2.3 การเปลี่ยนตำแหน่งของวัสดุ

แทนค่า x,y และ z จากสมการ (2.5) แล้วเขียนสมการในเชิงเทนเซอร์โดยที่ E_{ij} เป็นความเครียดเชิงเทนเซอร์ดังนี้ [Mase (1970)]

$$ds^2 - dS^2 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)dx_i dx_j = 2E_{ij}\,dx_i dx_j \tag{2.7}$$

จากสมการ (2.7) เมื่อการเปลี่ยนตำแหน่งมีค่าน้อยมาก ๆ สามารถตัดเทอมของผลคูณของอนุพันธ์ (Differential) ออกได้

$$E_{ij} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.8}$$

โดยที่ ε_{ij} เป็นความเครียดเชิงเทนเซอร์แบบออยเลอร์สำหรับการเปลี่ยนตำแหน่งไปน้อยมาก ๆ และเนื่องจาก $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ความเครียดมีสมมาตร ค่าองค์ประกอบความเครียดเท่ากันสามค่า ค่าที่เหลือคือ ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz}, ε_{xy}, ε_{yz} และ ε_{zx}

2.2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบความเครียด

สมการ (2.8) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบความเครียดหกค่ากับการเปลี่ยนตำแหน่งสามค่า ดังนั้นเพื่อที่จะได้การเปลี่ยนตำแหน่งเพียงสามค่าเมื่อกำหนดค่าองค์ประกอบความเครียดหกค่า องค์ประกอบความเครียดจะต้องมีความสัมพันธ์กัน ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบความเครียดหาได้จากการกำจัดการเปลี่ยนตำแหน่งออกจากสมการ (2.8) ได้สมการความสัมพันธ์ดังนี้ [Mase (1970)]

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jm}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \qquad (2.9)$$

สมการ (2.9) มีจำนวนสมการทั้งหมดแปดสิบเอ็ดสมการแต่มีเพียงหกสมการที่ไม่ซ้ำกันคือ

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} \\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} \\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} \\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

2.3 วัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้น

วัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นคือวัสดุที่มีความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดเป็นเส้นตรง เมื่อวัสดุเป็นแบบเอกพันธุ์โดยไม่คิดผลของอุณหภูมิสมการของความสัมพันธ์ดังกล่าวคือ

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad (2.11)$$

โดยที่ c_{ijkl} คือค่าสัมประสิทธิ์ซึ่งมีทั้งหมดแปดสิบเอ็ดค่า แต่เนื่องจากองค์ประกอบความเค้นและองค์ประกอบความเครียดมีสมมาตรทำให้ค่าสัมประสิทธิ์ลดลงเหลือสามสิบหกค่า

2.3.1 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด สำหรับวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นที่มีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทาง

เมื่อวัสดุมีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทางสมการ (2.11) ลดรูปลงเป็น [Mase (1970)]

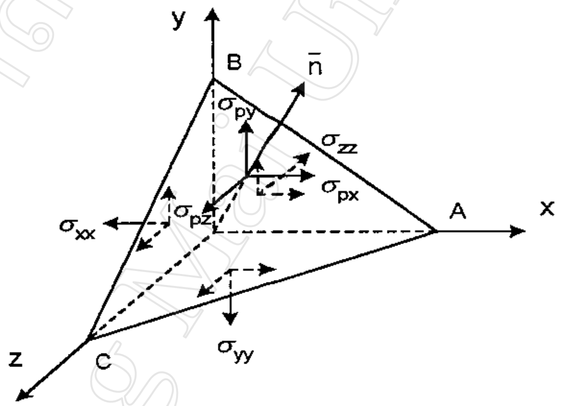
$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (2.12)$$

หรือ
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}((1+\upsilon)\sigma_{ij} - \upsilon\delta_{ij}\sigma_{kk}) \tag{2.13}$$

จากสมการ (2.12) หรือ (2.13) ค่าสัมประสิทธิ์ c_{ijkl} จากสมการ (2.11) ลดลงเหลือสองค่าคือ λ และ μ หรือ E และ ν โดยที่ λ และ μ เป็นค่าคงที่ของลาเม (Lame's Constant) E เป็นโมดูลัสของยังก์ (Young's Modulus) และ ν เป็นอัตราส่วนของปัวส์ซอง (Poisson's Ratio)

2.3.2 เงื่อนไขที่ขอบ

เมื่อพิจารณาปัญหาเกี่ยวกับวัสดุยืดหยุ่นโดยทั่วไปพบว่าค่าความเค้นและการเปลี่ยนตำแหน่งจะต้องเป็นฟังก์ชันของพิกัด เมื่อแทนค่าพิกัดของจุดที่ขอบของวัสดุ ผลลัพธ์ที่ได้จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขภายนอกอย่างใดอย่างหนึ่งในสามกรณีต่อไปนี้คือ [Saada (1974)]



รูปที่ 2.4 เงื่อนไขที่ขอบในรูปของความเค้น

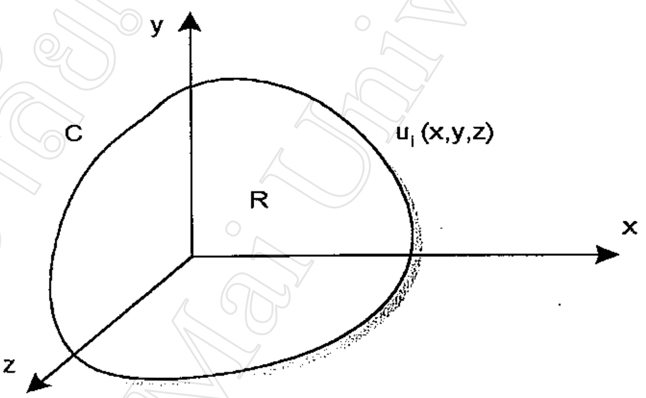
ก. เงื่อนไขที่ขอบในรูปของความเค้น

กรณีแรกเป็นการหาค่าของความเค้นและการเปลี่ยนตำแหน่งของทุก ๆ จุดในเนื้อวัสดุยืดหยุ่นเมื่ออยู่ในสภาวะสมดุลเมื่อทราบค่าแรงภายในตัววัสดุและแรงที่ขอบของวัสดุ ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่ขอบที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ จากรูปที่ 2.4 พิจารณาระนาบ ABC ที่บริเวณขอบของวัสดุซึ่งมีแรง P กระทำ เมื่อแตกแรง P เป็นแรงประกอบขนานกับแกน x, y และ z แล้วหารแรงประกอบแต่ละแรงด้วยขนาดของพื้นที่เล็ก ๆ ที่แรงนั้นกระทำ เมื่อละทิ้งผลของแรงภายในตัววัสดุได้องค์ประกอบความเค้น σ_{px}, σ_{py} และ σ_{pz} จากการแทนค่าโคซายน์ (Cosine) ของมุมที่เส้นตั้งฉากกับระนาบ ABC กระทำกับแกน x, y และ z ด้วย l, m และ n ตามลำดับได้เงื่อนไขที่ขอบดังนี้

$$
\begin{aligned}
\sigma_{px} &= l\sigma_{xx} + m\sigma_{yx} + n\sigma_{zx} \\
\sigma_{py} &= l\sigma_{xy} + m\sigma_{yy} + n\sigma_{zy} \\
\sigma_{pz} &= l\sigma_{xz} + m\sigma_{yz} + n\sigma_{zz}
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

ข. เงื่อนไขที่ขอบในรูปของการเปลี่ยนตำแหน่ง

กรณีที่สองเป็นการหาค่าของความเค้นและการเปลี่ยนตำแหน่งของทุก ๆ จุดในเนื้อวัสดุยืดหยุ่นเมื่ออยู่ในสภาวะสมดุลเมื่อทราบค่าแรงที่เกิดจากตัววัสดุและการเปลี่ยนตำแหน่งที่ขอบของวัสดุ จากรูปที่ 2.5 วัสดุมีบริเวณ R และมีการเปลี่ยนตำแหน่ง u_i ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x, y และ z ที่ขอบ C ของวัสดุ



รูปที่ 2.5 เงื่อนไขที่ขอบในรูปของการเปลี่ยนตำแหน่ง

ค. เงื่อนไขที่ขอบแบบผสม

ในบางครั้งทั้งความเค้นและการเปลี่ยนตำแหน่งที่ขอบของวัสดุเกิดขึ้นพร้อม ๆ กัน เงื่อนไขที่ขอบกรณีนี้เป็นการรวมกันของเงื่อนไขที่ขอบทั้งสองกรณีดังที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น เรียกว่าเงื่อนไขที่ขอบแบบผสมซึ่งเป็นกรณีที่สามของเงื่อนไขที่ขอบ

2.4 ปัญหาสองมิติ

ปัญหาสองมิติสองกลุ่มใหญ่ ๆ ที่พบโดยทั่วไปประกอบด้วยปัญหาความเครียดระนาบ (Plane Strain) และความเค้นระนาบ (Plane Stress)

2.4.1 ความเครียดระนาบ

ปัญหาความเครียดระนาบเกิดขึ้นเมื่อไม่เกิดการเปลี่ยนตำแหน่งในทิศทางใดทิศทางหนึ่ง และองค์ประกอบความเครียดในระนาบที่ตั้งฉากกับทิศทางนั้นมีค่าเท่ากับศูนย์ โดยที่องค์ประกอบ

ความเครียดที่เหลือไม่ขึ้นอยู่กับทิศทางนั้น สมการความเครียดระนาบสำหรับทิศทาง z ประกอบด้วย ε_{zz}, ε_{xz} และ ε_{yz} = 0 ทำให้สมการสมดุลจากสมการ (2.4) ลดรูปลงเป็น

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + F_x = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + F_y = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \tag{2.15}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบความเครียดจากสมการ (2.10) ลดรูปลงเป็น

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{2.16}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดจากสมการ (2.12) และ(2.13) ลดรูปลงเป็น

$$\sigma_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2G\varepsilon_{xx}$$
$$\sigma_{yy} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2G\varepsilon_{yy}$$
$$\sigma_{zz} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$
$$\sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}$$
$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$
$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \upsilon(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}))$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \upsilon(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}))$$
$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{E}(1 + \upsilon)$$
$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy} = 0 \tag{2.17}$$

เมื่อ G คือค่าเชียร์โมดูลัส (Shear Modulus) และเงื่อนไขที่ขอบจากสมการ (2.14) ลดรูปลงเป็น

$$\sigma_{px} = \sigma_{xx} l + \sigma_{xy} m$$

$$\sigma_{py} = \sigma_{xy} l + \sigma_{yy} m$$
$$\sigma_{pz} = \sigma_{zz} n \qquad (2.18)$$

กำจัด ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{xy} และ σ_{xy} ออกจากสมการสมดุล ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบความเครียด และความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดได้สมการ [Ugural (1995)]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{1}{(1-\upsilon)}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right) \qquad (2.19)$$

2.4.2 ความเค้นระนาบ

ปัญหาความเค้นระนาบเกิดขึ้นเมื่อองค์ประกอบความเค้นในทิศทางใดทิศทางหนึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ และองค์ประกอบความเค้นในระนาบที่ตั้งฉากกับทิศทางมีค่าเท่ากับศูนย์ โดยที่องค์ประกอบความเค้นที่เหลือไม่ขึ้นอยู่กับทิศทางนั้น สมการความเค้นระนาบสำหรับทิศทาง z ประกอบด้วย σ_{zz}, σ_{xz} และ $\sigma_{yz} = 0$ ทำให้สมการสมดุลจากสมการ (2.4) ลดรูปลงเป็น

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + F_x = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y = 0 \qquad (2.20)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบความเครียดจากสมการ (2.10) ลดรูปลงเป็น

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = 0 \qquad (2.21)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดจากสมการ (2.12) และ (2.13) ลดรูปลงเป็น

$$\sigma_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{xx}$$
$$\sigma_{yy} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{yy}$$
$$\sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$
$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \upsilon\sigma_{yy})$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \upsilon\sigma_{xx})$$
$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\upsilon}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$
$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{E}(1 + \upsilon)$$
$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy} = 0 \qquad (2.22)$$

เงื่อนไขที่ขอบจากสมการ (2.14) ลดรูปลงเป็น

$$\sigma_{px} = \sigma_{xx} l + \sigma_{xy} m$$
$$\sigma_{py} = \sigma_{xy} l + \sigma_{yy} m$$
$$\sigma_{pz} = 0 \qquad (2.23)$$

กำจัด ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{xy} และ σ_{xy} ออกจากสมการสมดุล ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบความเครียด และความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดได้สมการ [Ugural (1995)]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(1+\upsilon)\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right) \qquad (2.24)$$

2.4.3 ฟังก์ชันความเค้น

พิจารณาสมการสมดุลในกรณีของความเค้นระนาบและความเครียดระนาบเมื่อไม่คิดแรงภายในตัววัสดุหรือ F_x และ F_y เป็นศูนย์ พบว่าสมการสมดุลเป็นจริงเมื่อแทนค่า σ_{xx}, σ_{yy} และ σ_{xy} ด้วยพจน์ของฟังก์ชันความเค้นของแอรีดังต่อไปนี้

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\ \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \qquad (2.25)$$

เมื่อแทนค่า σ_{xx} และ σ_{yy} ลงในสมการ (2.19) หรือ (2.24) ได้สมการไบฮาร์โมนิค [Ugural (1995)]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{2.26}$$

หรือเขียนในรูป $\nabla^4\Phi = 0$ เมื่อ Φ เป็นฟังก์ชันของ x และ y หรือ Φ (x, y)

2.5 การแก้ปัญหาสองมิติในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ฟังก์ชัน Φ (x, y) ที่เป็นคำตอบของสมการไบฮาร์โมนิคมีอยู่หลายแบบซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้เลือก Φ (x, y) ในรูปของอนุกรมฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Functions) และอนุกรมฟูเรียร์เท่านั้น

2.5.1 คำตอบในรูปอนุกรมฟังก์ชันพหุนาม

ค่าฟังก์ชันความเค้นอยู่ในรูป [Little (1973)]

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}x^m y^n \tag{2.27}$$

โดยที่ A_{mn} เป็นค่าคงที่และเมื่อกระจายเทอมของอนุกรมฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น p เมื่อ m+n = p และกำหนดให้ c_0, c_1, c_2, ... c_p หรือ c_i คือค่าคงที่ A_{mn} จากสมการ (2.27) จะได้

$$\Phi = c_0x^p + c_1x^{p-1}y + c_2x^{p-2}y^2 + \ldots + c_py^p \tag{2.28}$$

ตามปกติค่าฟังก์ชันความเค้นที่พบมากมักจะมีระดับขั้นไม่เกินสี่เนื่องจากฟังก์ชันพหุนามระดับขั้นสูงจะให้ค่าความคลาดเคลื่อนในระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่สูง และสำหรับฟังก์ชันความเค้นในรูปของอนุกรมฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น p เมื่อ $p \geq 4$ สมการไบฮาร์โมนิคจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ c_4, c_5, ... , c_p เป็นฟังก์ชันของ c_0, c_1, c_2 และ c_3 ตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
(p)(p-1)(p-2)(p-3)c_0 + 2(2\cdot1)(p-2)(p-3)c_2 + (4\cdot3\cdot2\cdot1)c_4 &= 0\\
(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)c_1 + 2(3\cdot2)(p-3)(p-4)c_3 + (5\cdot4\cdot3\cdot2)c_5 &= 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= 0\\
(5\cdot4\cdot3\cdot2)c_{p-5} + 2(p-3)(p-4)(3\cdot2)c_{p-3} + (p-1)(p-2)(p-3)(p-4)c_{p-1} &= 0\\
(4\cdot3\cdot2\cdot1)c_{p-4} + 2(p-2)(p-3)(2\cdot1)c_{p-2} + (p)(p-1)(p-2)(p-3)c_p &= 0
\end{aligned} \tag{2.29}$$

ค่าคงที่ของสมการ (2.28) หาได้จากสมการ (2.29) และเงื่อนไขที่ขอบ คำตอบที่อยู่ในรูปอนุกรมของฟังก์ชันพหุนามเป็นการรวมกันระหว่างอนุกรมฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น p ต่าง ๆ กันเมื่อ $p \geq 2$

2.5.2 คำตอบในรูปของอนุกรมฟูเรียร์

ค่าฟังก์ชันความเค้นอยู่ในรูป [Little (1973)]

$$\Phi = e^{\alpha x}e^{\beta y} \tag{2.30}$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการ (2.26) จะได้ว่า

$$(\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4)e^{\alpha x}e^{\beta y} = 0 \tag{2.31}$$

แก้สมการ (2.31) ได้ $\alpha = \pm i\beta$ และ $\beta = \pm i\alpha$ เมื่อ α และ β เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ พิจารณาเฉพาะรากในเทอม $\alpha = \pm i\beta$ ได้ค่าฟังก์ชันความเค้นคือ

$$\Phi = Ae^{i\beta x}e^{\beta y} + A'e^{-i\beta x}e^{\beta y}$$

เมื่อ A และ A′ เป็นค่าคงที่ จากคุณสมบัติฮาร์โมนิคและไบฮาร์โมนิคพบว่า

- ถ้า $e^{i\beta x}e^{\beta y}$ มีคุณสมบัติฮาร์โมนิคแล้ว $e^{i\beta x}e^{-\beta y}$ ต้องมีคุณสมบัติฮาร์โมนิคด้วย
- ถ้า Φ มีคุณสมบัติฮาร์โมนิคแล้ว Φy และ Φx มีคุณสมบัติไบฮาร์โมนิค

จากคุณสมบัติดังกล่าวจัดสมการให้อยู่ในรูป $\Phi = e^{i\beta x}f(y) + e^{-i\beta x}g(y)$ เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชันของ y

$$\begin{aligned}\Phi = {} & e^{i\beta x}(Ae^{\beta y} + Be^{-\beta y} + Cye^{\beta y} + Dye^{-\beta y}) + \\ & e^{-i\beta x}(A'e^{\beta y} + B'e^{-\beta y} + C'ye^{\beta y} + D'ye^{-\beta y})\end{aligned} \tag{2.32}$$

หรือแสดงคำตอบทั่วไปของฟังก์ชันความเค้นในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Functions) ดังนี้

$$\begin{aligned}\Phi = {} & \sin\beta x(A\sinh\beta y + B\cosh\beta y + C\beta y\sinh\beta y + D\beta y\cosh\beta y) + \\ & \cos\beta x(A'\sinh\beta y + B'\cosh\beta y + C'\beta y\sinh\beta y + D'\beta y\cosh\beta y)\end{aligned} \tag{2.33}$$

เมื่อ A, B, C, D และ A′, B′, C′, D′ เป็นค่าคงที่ ซึ่งสามารถหาได้จากเงื่อนไขที่ขอบ

2.6 การแก้ปัญหาสองมิติในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ในการแก้ปัญหาสองมิติซึ่งรูปร่างของวัสดุเป็นแบบแผ่นจานวงกลมหรือแบบครึ่งระนาบ การวิเคราะห์โดยใช้ระบบพิกัดเชิงขั้วจะเหมาะสมกว่า ดังนั้นจึงต้องเปลี่ยนสมการต่าง ๆ จากระบบพิกัดคาร์ทีเซียนมาเป็นสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วแทนโดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดคาร์ทีเซียนกับพิกัดเชิงขั้วคือ

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ และ } \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{2.34}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนและพิกัดเชิงขั้วคือ

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \sigma_{xx}\cos^2\theta + \sigma_{yy}\sin^2\theta + 2\sigma_{xy}\sin\theta\cos\theta \\
\sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{xx}\sin^2\theta + \sigma_{yy}\cos^2\theta - 2\sigma_{xy}\sin\theta\cos\theta \\
\sigma_{r\theta} &= (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin\theta\cos\theta + \sigma_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

จากการไม่แปรเปลี่ยนของความเค้น (Stress Invariant) โดยนำสมการที่ (1) และ (2) ของชุดสมการ (2.35) มารวมกันได้

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \tag{2.36}$$

แปลงอนุพันธ์ย่อย (Partial Derivatives) เทียบกับตัวแปร x และ y ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร r และ θ ในระบบพิกัดเชิงขั้วจากสมการ (2.34) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r^2} + \sin^2\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) - 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r^2} + \cos^2\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} &= \sin\theta\ \cos\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) - \\
&\qquad (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

จากสมการ (2.37) สรุปได้ว่า

$$(\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2})=(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}) \tag{2.38}$$

เมื่อกำหนดให้ u และ v เป็นการเปลี่ยนตำแหน่งของจุดในเนื้อวัสดุในทิศทางตามแนวรัศมีและตั้งฉากกับแนวรัศมีตามลำดับ องค์ประกอบความเครียดในระบบพิกัดเชิงขั้วจะมีค่าตามสมการ

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r},\ \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \theta},\ \varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{2}(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}) \tag{2.39}$$

ให้ F_r และ F_θ เป็นองค์ประกอบของแรงต่อหน่วยปริมาตรในทิศทาง r และ θ ตามลำดับได้สมการสมดุลในปัญหาสองมิติคือ

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta}+F_r=0\\&\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2\sigma_{r\theta}}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}+F_\theta=0\end{aligned} \tag{2.40}$$

เมื่อละทิ้งแรงภายในตัววัสดุ หรือ F_r และ F_θ เป็นศูนย์ พบว่าสมการสมดุลเป็นจริงเมื่อแทนค่าองค์ประกอบความเค้นด้วยพจน์ของฟังก์ชันความเค้นดังนี้

$$\sigma_{rr}=\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2},\ \sigma_{\theta\theta}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2},\ \sigma_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}) \tag{2.41}$$

เมื่อแทนค่าจากสมการ (2.38) และ (2.41) ลงในสมการ (2.26) ได้สมการไบฮาร์โมนิคในรูปของพิกัดเชิงขั้วดังนี้ [Ugural (1995)]

$$(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2})(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2})=0 \tag{2.42}$$

ฟังก์ชัน Φ (r,θ) ที่เป็นคำตอบของสมการไบฮาร์โมนิคในระบบพิกัดเชิงขั้วสามารถแสดงได้ในรูปของอนุกรมอนันต์ (Infinite Series) ดังนี้ [Timoshenko (1970)]

$$
\begin{aligned}
\Phi = {} & a_0 \ln r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \ln r + d_0 r^2\theta + a_0'\theta + \\
& \frac{a_1}{2} r\theta \sin\theta + (b_1 r^3 + a_1' r^{-1} + b_1' r \ln r)\cos\theta + \\
& \frac{c_1}{2} r\theta \cos\theta + (d_1 r^3 + c_1' r^{-1} + d_1' r \ln r)\sin\theta + \\
& \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{n+2} + a_n' r^{-n} + b_n' r^{-n+2})\cos(n\theta) + \\
& \sum_{n=2}^{\infty} (c_n r^n + d_n r^{n+2} + c_n' r^{-n} + d_n' r^{-n+2})\sin(n\theta)
\end{aligned} \tag{2.43}
$$

สามพจน์แรกในบรรทัดแรกแสดงกรณีความเค้นเป็นฟังก์ชันของ r อย่างเดียว พจน์ที่สี่ในบรรทัดแรกแสดงกรณีการรับความเค้นสม่ำเสมอกระทำที่ขอบของแผ่นระนาบ พจน์ที่ห้าในบรรทัดแรกแสดงกรณีความเค้นเฉือนกระทำเพียงอย่างเดียว พจน์แรกในบรรทัดที่สองแสดงกรณีรับแรงกดเป็นจุดกระทำที่ขอบของแผ่นระนาบ พจน์ที่เหลือในบรรทัดที่สองแสดงกรณีการรับโมเมนต์เนื่องจากแรงในแนวรัศมี บรรทัดที่สามเหมือนกับบรรทัดที่สองแต่ทิศทางของแรงเปลี่ยนไป 90° บรรทัดที่สี่และห้าแสดงกรณีความเค้นเป็นสัดส่วนกับ sin $(n\theta)$ และ $\cos(n\theta)$ กระทำที่ขอบด้านนอกและด้านในของระนาบวงแหวน ค่าคงที่ของสมการ (2.43) หาได้จากเงื่อนไขที่ขอบ จากการแทนค่าฟังก์ชันความเค้นลงในสมการขององค์ประกอบความเค้นโดยกำหนดให้ a และ b เป็นรัศมีด้านในและนอกของระนาบวงแหวนและ A, B, C และ D คือค่าคงที่ ได้เงื่อนไขที่ขอบในรูปของอนุกรมฟูเรียร์คือ [Timoshenko (1970)]

$$
\begin{aligned}
(\sigma_{rr})_{r=a} &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\theta) \\
(\sigma_{rr})_{r=b} &= A_0' + \sum_{n=1}^{\infty} A_n' \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n' \sin(n\theta) \\
(\sigma_{r\theta})_{r=a} &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(n\theta) \\
(\sigma_{r\theta})_{r=b} &= C_0' + \sum_{n=1}^{\infty} C_n' \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n' \sin(n\theta)
\end{aligned} \tag{2.44}
$$