บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของงานวิจัย

การวิเคราะห์ปัญหาสองมิติสำหรับวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear Elasticity) แบบเอกพันธุ์ (Homogeneous) และมีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทาง (Isotropic) โดยไม่คิดผลของความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ (Thermal Stresses) ส่วนมากได้คำตอบมาจากการประมาณค่า (Approximate Solutions) แต่สำหรับปัญหาที่ค่อนข้างซับซ้อนการหาคำตอบที่แท้จริง (Exact Solutions) จะทำให้ทราบค่าที่ถูกต้องซึ่งช่วยลดค่าความปลอดภัย (Safety Factor) และค่าใช้จ่ายในการออกแบบวัสดุเพื่อการใช้งาน การหาคำตอบที่แท้จริงโดยการนำคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการทำงานจะช่วยเพิ่มความสะดวกรวดเร็วและความถูกต้องในการคำนวณ รวมทั้งสามารถแสดงผลในลักษณะของรูปภาพ (Graphics) ซึ่งทำให้เกิดความชัดเจน โดยผลที่ได้จากการวิจัยจะเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาเพื่อให้ครอบคลุมปัญหาได้มากยิ่งขึ้น

การหาคำตอบที่แท้จริงพบว่า เมื่อมีภาระมากระทำต่อวัสดุ ค่าความเค้น (Stress) ความเครียด (Strain) และการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement) ที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุนั้นจะต้องสอดคล้องกับสมการสมดุล (Equilibrium Equations) ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบความเครียด (Strain Compatibility Relations) ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด (Stress-Strain Relations) และเงื่อนไขที่ขอบ (Boundary Conditions) พร้อม ๆ กัน วิธีหนึ่งที่ใช้วิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวเริ่มต้นจากการหาค่าความเค้นในรูปของฟังก์ชันความเค้น (Stress Function) ซึ่งมีตัวคงที่ใด ๆ อยู่โดยที่ความเค้นที่คำนวณได้จากฟังก์ชันความเค้นนี้จะต้องสอดคล้องกับสมการสมดุล ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบความเครียด และความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด แล้วจึงหาค่าคงที่ทั้งหมดในฟังก์ชันความเค้นจากเงื่อนไขที่ขอบ จากนั้นจึงนำฟังก์ชันความเค้นไปวิเคราะห์ความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุต่อไป

1.2 สรุปสาระสำคัญจากเอกสารที่เกี่ยวข้อง

Collins (1999) ได้ทำการวิเคราะห์โครงสร้างของวัสดุรูปร่างสี่เหลี่ยมที่ทำจากวัสดุต่างชนิดกันนำมาต่อกัน และมีรอยแยกเกิดขึ้นตรงรอยต่อ ใช้ฟังก์ชันความเค้นที่อยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนโดยวิธีการเปลี่ยนค่าของความเค้นและการเปลี่ยนตำแหน่งของรอยแยกแรกให้อยู่ในรูปอนุกรมของความสัมพันธ์ของรอยแยก ซึ่งได้มาจากแบบจำลองที่แท้จริงของรอยแยกหลักและรอยแยกที่ตามมา ผลการวิเคราะห์แสดงให้เห็นว่าสามารถลดรูปของปัญหาให้อยู่ในระบบสมการเชิงเส้นของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าคือ แรงที่จุดสัมผัสระหว่างแผ่นสี่เหลี่ยมและค่าของปัจจัยความเค้นค่าสูง (Stress Intensity Factor) เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับวิธีระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) พบว่ามีค่าใกล้เคียงกัน

Filon (1903) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับคานสี่เหลี่ยมอย่างง่ายที่มีหน้าตัดแคบ ซึ่งรับภาระแรงกดในทิศทางตั้งฉากกับแนวแกนของคาน โดยกระทำที่บริเวณกึ่งกลางของความยาวคานที่ผิวด้านบนและด้านล่างของคาน เมื่อพื้นที่ของแรงกระทำมีความกว้างน้อยมาก ๆ พบว่า สามารถหาความเค้นกดบริเวณแกนสะเทิน (Neutral Axis) ได้จากฟังก์ชันความเค้นในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series) ซึ่งความเค้นกดจะมีค่ามากที่สุดที่บริเวณกึ่งกลางคาน และจะลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อระยะทางจากจุดศูนย์กลางมีค่ามากขึ้น โดยจะมีค่าเป็นศูนย์เมื่ออัตราส่วนของระยะทางจากจุดศูนย์กลางต่อความหนาของคานมีค่าเท่ากับ 0.675

Howland (1929) ได้ให้ค่าของฟังก์ชันความเค้นในกรณีของคานยาวมาก ๆ ที่มีความหนาเท่ากับ 2c คานรับแรงกดคงที่ P ที่ผิวและพื้นที่ที่แรงกระทำมีความกว้าง a ซึ่งมีค่าน้อยมาก ได้ฟังก์ชันความเค้นในรูปของปริพันธ์ฟูเรียร์ดังนี้

$$\Phi = \frac{Pa}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(\alpha c\cdot\cosh\alpha c + \sinh\alpha c)\cosh\alpha y - \sinh\alpha c\cdot\sinh\alpha y\cdot\alpha y}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c}\cos\alpha x\,dx$$
$$-\frac{Pa}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(\alpha c\cdot\sinh\alpha c + \cosh\alpha c)\sinh\alpha y - \cosh\alpha c\cdot\cosh\alpha y\cdot\alpha y}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c}\cos\alpha x\,dx$$

Kardomateas (1995) ได้ทำการศึกษาการโก่งตัวของเสาหน้าตัดรูปวงกลม และทำจากวัสดุที่มีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทาง โดยพิจารณาจากระบบพิกัดเชิงขั้วแบบสามมิติพบว่า ค่าภาระวิกฤติที่ได้ต่ำกว่าค่าที่คำนวณได้ตามวิธีออยเลอร์ (Euler) ซึ่งภาระวิกฤติเมื่อคิดตามทฤษฎีการยืดหยุ่นหาได้จากการหาค่าฟังก์ชันความเค้น

Matemilola (1995) ได้ทำการศึกษาการกระจายความเค้นในวัสดุที่มีคุณสมบัติไม่เหมือนกันทุกทาง (Anisotropic) จากการทดสอบแผ่นระนาบรับแรงกดที่ด้านบนและด้านล่างของแผ่น ได้ความเค้นที่กระทำตั้งฉากกับระนาบในรูปผลรวมของฟังก์ชันเฉพาะ (Eigenfunctions) จากนั้นจึงพิจารณาปัญหาแบบความเครียดระนาบ (Plane Strain) และหาสมการความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบความเครียดในรูปของความเค้น เพื่อหาค่าของฟังก์ชันความเค้นซึ่งอยู่ในรูปของปริพันธ์ฟูเรียร์

Murase (1996) ได้ทำการวิเคราะห์ความเค้นที่บริเวณรอยแยกตามแนวเส้นรอบวงของรอยต่อของวัสดุ 2 ชนิด ซึ่งมีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมอยู่ตรงกลาง โดยทำการแบ่งฟังก์ชันความเค้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่รอยแยกจากปัญหาเมื่อวัสดุรับแรงดึงสม่ำเสมอที่ระยะไกลมาก ๆ ออกเป็น 6 ชนิด โดยทำการหาค่าและลักษณะของลักษณะของการกระจายความเค้นและการเปลี่ยนตำแหน่งที่บริเวณรอย

แยก แล้วเปรียบเทียบกับผลที่ได้จาก 3 วิธีคือ วิธีฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Weight Function) วิธีอัตราคายพลังงาน (Energy Release Rate) และวิเคราะห์ไฟไนท์อิลลิเมนต์ (Finite Element Analysis)

Neuber (1958) ได้ใช้หลักการหาค่าความเค้นจากฟังก์ชันความเค้นในรูปของพิกัดเชิงขั้ว เพื่อคำนวณค่าปัจจัยของความเค้นสูงสุด โดยพิจารณาจากรูปร่างของวัสดุและภาระที่กระทำกับวัสดุ และได้รวบรวมไว้เป็นแผนภาพเพื่อการออกแบบวัสดุให้สามารถใช้งานได้อย่างปลอดภัย

1.3 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.3.1 เพื่อแสดงภาพการกระจายของความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุ และแสดงเงื่อนไขที่ขอบของวัสดุ โดยการแทนค่าของฟังก์ชันความเค้น ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian Coordinates) และระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinates) สำหรับปัญหาแบบสองมิติโดยใช้คอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล

1.3.2 เพื่อหาสมการของความเค้นและความเครียดจากฟังก์ชันความเค้น และหาค่าของความเค้นและความเครียดที่จุดต่าง ๆ ภายในเนื้อวัสดุ โดยการแทนค่าพิกัดของจุดที่ต้องการพิจารณา

1.3.3 เพื่อหาและแสดงค่าความเค้นและความเครียดสูงสุดที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุได้

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

1.4.1 สามารถนำผลที่ได้ไปใช้ทำนายความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นที่จุดต่าง ๆ ในวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นที่รับภาระซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ขอบภายในขอบเขตที่ได้ศึกษา

1.4.2 ได้ข้อมูลที่จำเป็นต้องใช้ในการออกแบบวัสดุยืดหยุ่น เพื่อนำไปใช้งานเมื่อถูกกระทำโดยภาระแบบต่าง ๆ กัน

1.4.3 เป็นพื้นฐานในการวิเคราะห์ความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุเมื่อรับภาระที่มีความยุ่งยากซับซ้อนต่อไป

1.4.4 เป็นประโยชน์สำหรับการเรียนการสอนในระดับบัณฑิตศึกษา โดยเฉพาะในสาขาวิชากลศาสตร์ของแข็ง

1.5 ขอบเขตของการวิจัย

1.5.1 วัสดุที่ใช้วิเคราะห์เป็นวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ และมีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทาง โดยละทิ้งผลของความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

1.5.2 พิจารณาปัญหาเป็นแบบสองมิติ ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนและพิกัดเชิงขั้ว

1.5.3 ค่าฟังก์ชันความเค้นซึ่งเป็นคำตอบของสมการไบฮาร์โมนิค (Biharmonic Equation) ที่เลือกใช้ในวิทยานิพนธ์นี้คือ ฟังก์ชันความเค้นของแอรี (Airy's Stress Function)

1.5.4 ในการวิเคราะห์ปัญหาจะหาคำตอบที่ตำแหน่งไกลพอประมาณกับภาระที่มากระทำ ตามหลักการของเซนท์-วีนองท์ (Siant-Venant)

1.5.5 วิทยานิพนธ์นี้เลือกใช้โปรแกรม Mathematica 3.0 ช่วยในการคำนวณค่าความเค้นและความเครียด รวมทั้งแสดงภาพการกระจายของความเค้นและความเครียดในเนื้อวัสดุ

1.5.6 เงื่อนไขที่ขอบเงื่อนไขที่ขอบแบบความเค้น

1.5.7 ลักษณะรูปร่างของวัสดุที่เลือกพิจารณาในวิทยานิพนธ์นี้คือ

ก. ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน เลือกพิจารณาวัสดุที่มีรูปร่างเป็นแบบคานยาว (Long Beam) ซึ่งมีความกว้างของคานน้อยมากเมื่อเทียบกับความยาว

ข. ในระบบพิกัดเชิงขั้ว เลือกพิจารณาวัสดุที่มีรูปร่างเป็นแบบจานวงกลม (Circular Disk) และแบบครึ่งระนาบ (Half-Plane)

1.5.8 ฟังก์ชันความเค้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนเป็นฟังก์ชันพหุนามระดับขั้นตั้งแต่ 2 ขึ้นไป

1.5.9 ฟังก์ชันความเค้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนและพิกัดเชิงขั้วซึ่งอยู่ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์เป็นอนุกรมอันตะจนถึงพจน์ที่ทำให้ค่าที่คำนวณได้มีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.1% เมื่อเทียบกับค่าที่คำนวณได้ตามทฤษฎี