

บทที่ 2

ทฤษฎี

Kerr effect ในของเหลวเป็นปรากฏการณ์ทางแสงที่เกิดขึ้นเมื่อของเหลวแบบ Isotropic อยู่ในสนามไฟฟ้าแรงสูงแล้วจะมีสมบัติเป็นตัวกลาง Anisotropic แบบ Uniaxial crystals ทำให้เกิดปรากฏการณ์ Birefringence ขึ้น ดังนั้น จึงมีความจำเป็นที่จะต้องศึกษาถึงการเคลื่อนที่ของแสงในตัวกลาง Anisotropic แบบ Uniaxial crystals ก่อน โดยที่จะมีความสัมพันธ์เกี่ยวเนื่องกับ Kerr effect ในของเหลวซึ่งจะได้กล่าวถึงต่อไป

2.1 การเคลื่อนที่ของแสงในตัวกลาง Anisotropic แบบ Uniaxial crystals

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า ปรากฏการณ์ Birefringence สามารถเกิดขึ้นได้เมื่อมีแสงเคลื่อนที่ผ่าน Anisotropic crystals ซึ่งจะพิจารณาเฉพาะ Uniaxial crystals เท่านั้น คุณสมบัติดังกล่าวของผลึก มีสาเหตุมาจากความไม่สมมาตรของอะตอมที่จัดเรียงตัวกันเป็นโครงร่างผลึก ทำให้แรงยึดเหนี่ยวระหว่างนิวเคลียสและอิเล็กตรอนของอะตอมมีค่าแตกต่างกันในทิศทางที่ต่างกัน และ Uniaxial crystals ที่พบได้ทั่วไปได้แก่ ผลึกของแคลไซต์ ควอทซ์ เป็นต้น

จากทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของ Maxwell⁽¹⁾ ความสัมพันธ์ระหว่าง Electric displacement และ Electric vector ของแสงที่เคลื่อนที่ใน Uniaxial crystals จะเป็นดังสมการ

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

โดยที่

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \quad (2.2)$$

สมการ (2.1) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

ถ้า ϵ_{ij} ทุกตัวเป็นจำนวนจริงและเป็นไปตามสมการ (2.2) แล้ว สมการ (2.3) จะเป็น Symmetric matrix และให้ A แทน Symmetric matrix ดังกล่าว จึงทำให้สามารถลดรูปเมตริกซ์ A ให้อยู่ในรูปของ Diagonal matrix S ได้โดยการใช้องค์การ Orthogonal transformation matrix C จะได้

$$S = C^{-1}AC \quad (2.4)$$

$$\text{และ } C^{-1} = C^T \quad (2.5)$$

ซึ่งสมการ (2.5) เป็น Orthogonal condition สำหรับเมตริกซ์ C โดยที่ C^{-1} และ C^T เป็น Inverse matrix และ Transpose matrix ตามลำดับ ดังนั้นจึงสามารถเขียนสมการ

(2.3) ใน Diagonalized form S ได้เป็น

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \varepsilon_x E_x \\ D_y &= \varepsilon_y E_y \\ D_z &= \varepsilon_z E_z \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

เมื่อแกน x, y และ z คือ Principal axes และเรียก $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ และ ε_z ว่า Principal dielectric constants ทำให้ได้ Principal refraction indices มีค่าเป็น

$$\left. \begin{aligned} n_x &= \sqrt{\varepsilon_x} \\ n_y &= \sqrt{\varepsilon_y} \\ n_z &= \sqrt{\varepsilon_z} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

สมการ (2.6) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ Diagonal matrix ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

และให้

$$n_x = n_y = n_o, \quad n_z = n_e \neq n_o \quad (2.9)$$

เมื่อ n_o และ n_e จะหมายถึงค่าดัชนีหักเหสำหรับ O-ray และ E-ray ซึ่งเรียกว่า Ordinary index

และ Extraordinary index ตามลำดับ จากสมการของ Maxwell

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

ในกรณีที่ไม่มีประจุอิสระและ $\vec{B} = \mu \vec{H}$ สมการ (2.10) จึงลดรูปลงเป็น

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

ให้ Plane-wave solutions อยู่ในรูป

$$\left. \begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}, t) &= \vec{D}_0 \exp(i[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t]) \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \exp(i[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t]) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}_0 \exp(i[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t]) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

แทนค่า ∇ ด้วย $i\vec{k}$ และแทน $\frac{\partial}{\partial t}$ ด้วย $-i\omega$ ทำให้สมการ (2.10) เปลี่ยนรูปเป็น

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\left(\frac{\omega}{c}\right) \vec{D} \quad (2.13a)$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \left(\frac{\omega}{c}\right) \vec{H} \quad (2.13b)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \quad (2.13c)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.13d)$$

คูณ สมการ(2.13b) ด้วย \vec{k} ทั้งสองข้างและแทนค่า $\vec{k} \times \vec{H}$ จากสมการ (2.13a) จะได้

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -k_0^2 \vec{D} \quad (2.14)$$

โดยที่ $k_0 = \frac{\omega}{c}$ และ ให้ $\mu=1$

จากเอกลักษณ์ของเวกเตอร์

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (2.15)$$

สมการ (2.14) จึงเปลี่ยนรูปเป็น

$$k^2 \vec{E} - \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) = k_0^2 \vec{D} \quad (2.16)$$

จากสมการ (2.13c) $\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$ สามารถกระจายให้อยู่ในรูปของ Rectangular coordinate จะ
ได้

$$k_x D_x + k_y D_y + k_z D_z = 0 \quad (2.17)$$

แทนค่า $D = \epsilon E$ ในสมการ (2.17) จะได้สมการ

$$k_x \epsilon_x E_x + k_y \epsilon_y E_y + k_z \epsilon_z E_z = 0 \quad (2.18)$$

จากสมการ (2.16) ได้

$$\left. \begin{aligned} k^2 E_x - k_x (\bar{k} \cdot \bar{E}) &= k_0^2 D_x \\ k^2 E_y - k_y (\bar{k} \cdot \bar{E}) &= k_0^2 D_y \\ k^2 E_z - k_z (\bar{k} \cdot \bar{E}) &= k_0^2 D_z \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

จาก $n_x = n_y = n_o, n_z = n_e \neq n_o$

เลือก ระนาบ xz ทำให้ได้

$$k_y = 0 \quad (2.20a)$$

$$k^2 = k_x^2 + k_z^2 \quad (2.20b)$$

$$\text{และ } \bar{k} \cdot \bar{r} = k_x x + k_z z \quad (2.20c)$$

แทนสมการ (2.20) ในสมการ (2.19) จะได้

$$(k_z^2 - n_o^2 k_o^2) E_x - k_x k_z E_z = 0 \quad (2.21a)$$

$$(k^2 - n_o^2 k_o^2) E_y = 0 \quad (2.21b)$$

$$-k_x k_z E_x + (k_x^2 - n_e^2 k_o^2) E_z = 0 \quad (2.21c)$$

จากสมการ (2.21) พบว่ามีสอง Solutions โดยจะให้สัมประสิทธิ์ของสมการ (2.21b) เท่ากับศูนย์

นั่นคือ $E_y \neq 0$ แต่ $E_x = E_z = 0$ จะได้

$$k^2 - n_o^2 k_o^2 = 0$$

$$\text{ทำให้ได้ } k' = n_o k_o \quad (2.22)$$

จากสมการ (2.20b) จะได้ว่า

$$k'^2 = k_x'^2 + k_z'^2 = (n_o k_o)^2 \quad (2.23)$$

k' หมายถึง Wave vector ของ Solution แรกของสมการ (2.21) และจะพบว่าสมการ (2.23) เป็นสมการวงกลมและเป็นสมการการเคลื่อนที่ของคลื่นในตัวกลาง Isotropic โดยที่สมการดังกล่าวจะมีหน้าคลื่นเป็นทรงกลมเสมอ จึงเรียกคลื่นนี้ว่า Ordinary wave หรือ O-wave สำหรับ Solutions ที่สองหาได้โดยให้ E_y ในสมการ (2.21b) เป็นศูนย์ แต่ E_x และ E_z ในสมการ (2.21a) และ (2.21c) ไม่เท่ากับศูนย์ ทำให้ได้ว่า

$$(k_z^2 - n_o^2 k_o^2) E_x - k_x k_z E_z = 0$$

$$-k_x k_z E_x + (k_x^2 - n_e^2 k_o^2) E_z = 0$$

เพราะว่า E_x และ E_z ไม่เท่ากับศูนย์ ดีเทอร์มิแนนท์ของสัมประสิทธิ์ของ E_x และ E_z จึงต้องเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\begin{vmatrix} (k_x^2 - n_o^2 k_o^2) & -k_x k_z \\ -k_x k_z & (k_x^2 - n_e^2 k_o^2) \end{vmatrix} = 0$$

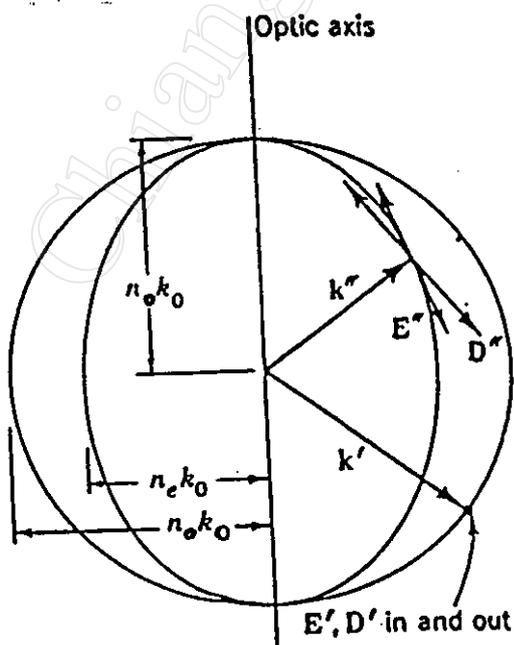
ทำให้ได้

$$\frac{k_x^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} = k_o^2 \tag{2.24}$$

และ

$$\frac{E_z''}{E_x''} = -\frac{n_o^2 k_x''}{n_e^2 k_z''} \tag{2.25}$$

เมื่อ k'' เป็น Wave vector ใน Solution ที่สองของสมการ (2.21) และจะได้คลื่นที่มีหน้าคลื่นเป็นรูปทรงรีซึ่งไม่พบในตัวกลาง Isotropic จึงเรียกคลื่นนี้ว่า Extraordinary wave หรือ E-wave จาก Solutions ทั้งสองของสมการ ในกรณีนี้ $n_e > n_o$ จะเรียก Uniaxial crystals แบบนี้ว่าเป็น Positive uniaxial crystal แต่ถ้า $n_e < n_o$ จะเรียกว่าเป็น Negative uniaxial crystal รูป 2.1 แสดง Surface of revolution ของ E-ray และ O-ray ใน Negative uniaxial crystal โดยหมุนไปรอบๆ แกนสมมาตรของผลึก การหมุนของ E-ray และ O-ray จะทำให้เกิดพื้นผิวที่เรียกว่า Wave vector surfaces \bar{k} ซึ่ง \bar{k}' เป็นทรงกลมที่มีรัศมี $n_o k_o$ ซึ่งเป็นรัศมีในแนวตั้งฉากกับแกนสมมาตร ส่วน \bar{k}'' เป็นทรงรีที่มีรัศมีตามแนวของแกนสมมาตรซึ่งเท่ากับ $n_e k_o$ ดังรูป



รูป 2.1 แสดง Surface of revolution ของ E-ray และ O-ray ใน Negative uniaxial crystal

พิจารณาการเคลื่อนที่ของคลื่นไปตามแนวแกนสมมาตรของผลึก ซึ่งในกรณีนี้ $k_x = 0$ ดังนั้นจากสมการ (2.23) และ (2.24) จะได้

$$k_z' = n_o k_o \quad (2.26a)$$

$$k_z'' = n_o k_o \quad (2.26b)$$

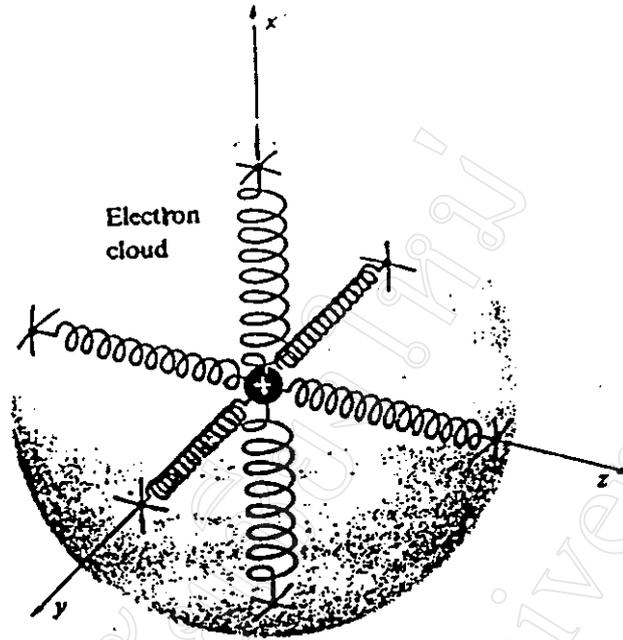
แต่ Wave vector นั้นปรากฏอยู่ในส่วนที่เป็นเฟสของสมการคลื่นและจากสมการ (2.26a) และ (2.26b) ทำให้ทราบว่าทั้ง O-wave และ E-wave เคลื่อนที่ไปด้วยเฟสที่เหมือนกันทุกประการหรือกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า คลื่นทั้งสองเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วที่เท่ากันทำให้เกิดปรากฏการณ์ Birefringence ขึ้น และเรียกทิศทางตามแกนสมมาตรของผลึกนั้นว่า Optic axis ในกรณีนี้คลื่นเคลื่อนที่ในแนวตั้งฉากกับ Optic axis ซึ่งในกรณีนี้ $k_x = 0$ และในทำนองเดียวกัน จากสมการ (2.23) และ (2.24) จะได้ว่า

$$k_x' = n_o k_o \quad (2.27a)$$

$$k_x'' = n_e k_o \quad (2.27b)$$

ซึ่งจะพบว่าทั้ง O-wave และ E-wave เคลื่อนที่ไปด้วยเฟสที่ต่างกันทำให้เกิดปรากฏการณ์ Birefringence ขึ้นซึ่งในกรณีนี้นั้นจะมีความคล้ายคลึงกับในกรณีของ Kerr effect ที่ต้องการจะศึกษา

จุดเริ่มต้นของปรากฏการณ์นี้นั้นมาจากการที่อะตอมของโครงร่างผลึกเหล่านี้จัดเรียงตัวกันอย่างไม่สมมาตรทำให้แรงยึดเหนี่ยว (Binding forces) ของอิเล็กตรอนมีค่าไม่เท่ากันในทิศทางที่ต่างกันซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูป 2.2⁽²⁾



รูป 2.2 แสดงแบบจำลองแรงยึดเหนี่ยวระหว่างประจุของอะตอมของโครงร่างของ Uniaxial crystals

จากรูปแสดงถึงการยึดเหนี่ยวระหว่างนิวเคลียสซึ่งมีประจุเป็นบวกและอิเล็กตรอนซึ่งมีประจุลบด้วยแรงที่ต่างกันซึ่งแทนด้วยสปริงที่มีค่านิจสปริงที่ต่างกันในทิศทางที่ต่างกัน ถ้ามีสนามไฟฟ้าภายนอกกระทำต่อระบบนี้ จะทำให้อิเล็กตรอนและนิวเคลียสมีการเคลื่อนที่ที่ทำให้เกิดไดโพลโมเมนต์ขึ้น ให้ \vec{F} เป็นการกระจัดของแต่ละอนุภาคที่เคลื่อนที่จากตำแหน่งสมดุลของมันและจะสมมติว่าอิเล็กตรอนแต่ละตัวถูกกระทำด้วย Lorentz force $\vec{F}^{(3)}$

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}') \quad (2.28)$$

เมื่อ \vec{v} เป็นความเร็วของอิเล็กตรอนที่มีประจุ e ในกรณีที่ความเร็วของอิเล็กตรอนมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความเร็วแสง c ในสุญญากาศทำให้พจน์ที่สองทางขวามือของสมการ (2.28) มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ $e\vec{E}$ นอกจากนี้จะกำหนดให้อิเล็กตรอนยึดติดกับนิวเคลียสด้วยสปริงที่มีแรงดึงกลับเป็น \vec{F}_r

$$\vec{F}_r = -k\vec{r} \quad (2.29)$$

ถ้า m เป็นมวลของอิเล็กตรอน สมการการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนสามารถเขียนได้เป็น

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} + kr = eE \quad (2.30)$$

ให้สนามไฟฟ้าที่มากกระทำต่อระบบมีความถี่เท่ากับ ω และอยู่ในรูปของ

$$E = E_0 e^{-i\omega t} \quad (2.31)$$

และให้คำตอบของสมการเป็น

$$r = r_0 e^{-i\alpha x} \quad (2.32)$$

แทนค่า r ลงในสมการที่ (2.30) จะได้

$$r = \frac{eE}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (2.33)$$

โดยที่ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (2.34)

เรียกว่าความถี่เรโซแนนซ์ เพราะว่าอิเล็กตรอนแต่ละตัวถูกโพลาไรซ์และทำให้เกิดโพลาไรเซชัน

$p = er$ ดังนั้นโพลาไรเซชันทั้งหมด P คือ

$$P = Np = Ner = N \frac{e^2 E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (2.35)$$

จากสมการ

$$P = Np = N\alpha E \quad (2.36)$$

โดยที่ α เป็น mean polarizability ทำให้ได้ความสัมพันธ์

$$N\alpha = N \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (2.37)$$

และจากความสัมพันธ์

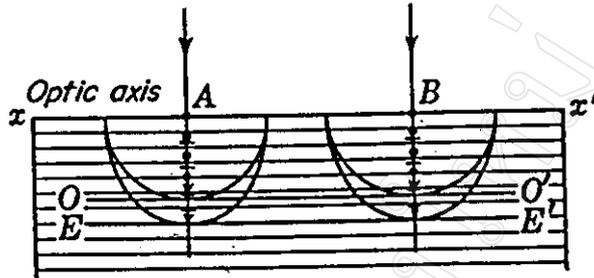
$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} N\alpha \quad (2.38)$$

จะได้

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (2.39)$$

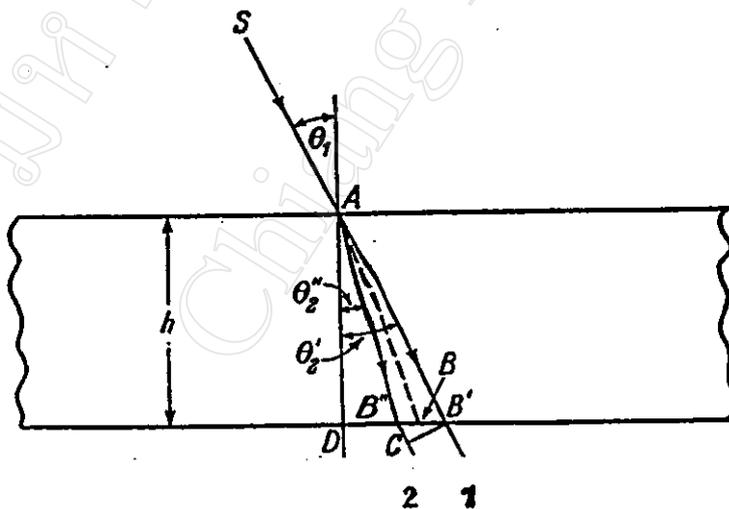
ซึ่งเป็น Dispersion equation ที่แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างดัชนีหักเห n และความถี่ ω ของสนามไฟฟ้าภายนอกซึ่งในที่นี้จะหมายถึงสนามไฟฟ้าของแสงที่เดินทางผ่านตัวกลางนี้และจะเห็นว่าความแตกต่างกันของแรงยึดเหนี่ยวระหว่างอิเล็กตรอนกับนิวเคลียสในทิศทางที่ต่างกันจะทำให้เกิดความแตกต่างกันของดัชนีหักเหด้วย สำหรับการเคลื่อนที่ของคลื่นใน Uniaxial crystals ซึ่งเป็นกรณีเดียวกับ Kerr effect ที่ต้องการศึกษานั้นจะแสดงดังรูป 2.3⁽⁵⁾ โดยคลื่นแสงจะตกกระทบบนตั้งฉากกับหน้าผลึกที่จุด A และจุด B โดยที่จะตัดหน้าผลึกให้มีทิศทางขนานกับระนาบของ Optic axis xx' สำหรับสัญลักษณ์ \bullet และ $-$ จะหมายถึงแนวการสั่นของ Electric vector ของ O-ray และ E-ray ซึ่งสั่นในแนวตั้งฉากและในแนวเดียวกับระนาบของ Optic axis ตามลำดับ จากรูปเห็นได้ว่าจะเกิด O-ray กับ E-ray ขึ้นในแนวเดียวกันแต่รังสีทั้งสองนั้นเดินทางด้วยความเร็วที่ต่างกันโดยที่หน้าคลื่นของ O-ray จะเป็นทรงกลมในขณะที่หน้าคลื่นของ E-ray เป็น

ทรงรีสำหรับเส้นตรง OO' และ EE' จะเป็นเส้นสัมผัสหน้าคลื่นของ O-ray และ E-ray ตามลำดับ



รูป 2.3 แสดงการเคลื่อนที่ของ E-ray และ O-ray เมื่อแสงตกกระทบ Uniaxial crystals ในแนวตั้งฉากกับระนาบของ Optic axis

พิจารณาแสงตกกระทบ Uniaxial crystals ด้วยมุมใดๆ θ_1 และเคลื่อนที่ผ่านผลึกดังกล่าวด้วยรังสีหักเหสองแนวคือ แนว 1 และ แนว 2 ให้ λ เป็นความยาวคลื่นของแสงในอากาศและ $\lambda' = \frac{\lambda}{n'}$, $\lambda'' = \frac{\lambda}{n''}$ เป็นความยาวคลื่นของรังสีในแนวที่ 1 และแนวที่ 2 ตามลำดับ ซึ่งแสดงดังรูป 2.4⁽³⁾



รูป 2.4 แสดงรังสีหักเหของคลื่นแสงที่เคลื่อนที่ผ่าน Uniaxial crystals

รังสีทั้งสองนั้นมีเฟสต่างกัน

$$\delta = 2\pi \left[\frac{AB''}{\lambda''} + \frac{B''C}{\lambda} - \frac{AB'}{\lambda'} \right] \quad (2.40)$$

จากรูป 2.4 ได้ความสัมพันธ์

$$AB' = \frac{h}{\cos \theta_2'}, AB'' = \frac{h}{\cos \theta_2''} \quad (2.41)$$

และ $B''C = B''B' \sin \theta_1 = h \sin \theta_1 (\tan \theta_2' - \tan \theta_2'')$ (2.42)

แทนค่าสมการที่ (2.41) และ (2.42) ใน สมการ (2.40) จะได้

$$\delta = 2\pi h \left[\frac{1}{\cos \theta_2''} \left(\frac{1}{\lambda''} - \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2''}{\lambda} \right) - \frac{1}{\cos \theta_2'} \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2'}{\lambda} \right) \right] \quad (2.43)$$

โดยการใชกฎการหักเห แทน $\frac{\sin \theta_1}{\lambda}$ ด้วย $\frac{\sin \theta_2''}{\lambda''}$ ในวงเล็บแรก และแทนด้วย $\frac{\sin \theta_2'}{\lambda'}$ ในวงเล็บหลังจะได้

$$\delta = 2\pi h \left[\frac{\cos \theta_2''}{\lambda''} - \frac{\cos \theta_2'}{\lambda'} \right] = \frac{2\pi h}{\lambda} (n'' \cos \theta_2'' - n' \cos \theta_2') \quad (2.44)$$

เนื่องจาก n' และ n'' มีค่าไม่แตกต่างกันมากนัก ดังนั้น $n'' - n'$ จึงมีค่าน้อยกว่า n' และ n'' มาก พจน์ในวงเล็บทางด้านขวาของสมการ (2.44) จึงประมาณ ได้เป็น

$$\begin{aligned} n'' \cos \theta_2'' - n' \cos \theta_2' &\cong (n'' - n') \frac{d}{dn} (n \cos \theta_2) \\ &\cong (n'' - n') \left[\cos \theta_2 - n \sin \theta_2 \frac{d\theta_2}{dn} \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

เมื่อ n และ θ_2 เป็นค่าเฉลี่ยระหว่าง n' n'' และ θ_2' θ_2'' ตามลำดับ

จากการหาอนุพันธ์ของกฎการหักเห $\sin \theta_1 = n \sin \theta_2$ ในกรณีที่มี θ_1 คงที่ จะได้

$$0 = \sin \theta_2 + n \cos \theta_2 \frac{d\theta_2}{dn} \quad (2.46)$$

หรือ

$$\frac{d\theta_2}{dn} = -\frac{\sin \theta_2}{n \cos \theta_2} \quad (2.47)$$

แทนสมการที่ (2.47) ลงในสมการ (2.45) จะได้

$$\begin{aligned}
 n'' \cos \theta_2'' - n' \cos \theta_2' &= (n'' - n') \left[\cos \theta_2 + \frac{\sin^2 \theta_2}{\cos \theta_2} \right] \\
 &= (n'' - n') \left(\frac{1}{\cos \theta_2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

แทนสมการ (2.48) ลงในสมการ (2.44) จะได้

$$\delta = \frac{2\pi h (n'' - n')}{\lambda \cos \theta_2} \tag{2.49}$$

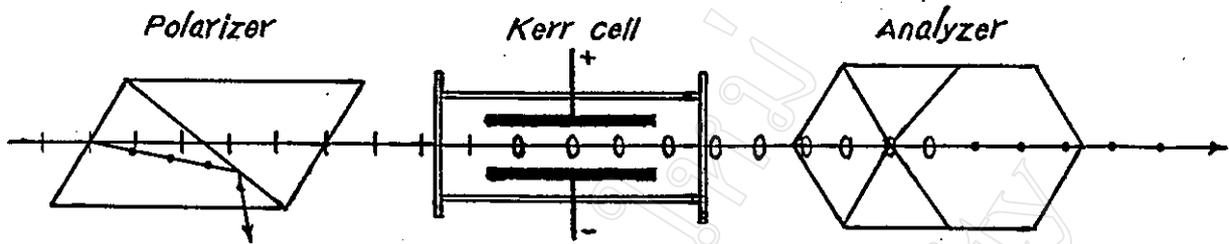
ถ้าแสงตกกระทบบนตั้งฉากกับระนาบผลึก นั่นคือ $\theta_2 = 0$ ดังนั้น

$$\delta = \frac{2\pi h}{\lambda} (n_e - n_o) = \frac{2\pi h}{\lambda} \Delta n \tag{2.50}$$

2.2 Kerr effect

Kerr effect เป็นปรากฏการณ์ทางแสงที่เกิดขึ้นเมื่อให้สนามไฟฟ้าแรงสูงกับตัวกลางโปร่งใสแบบ Isotropic แล้วทำให้ตัวกลางนั้นประพฤติตัวเป็น Uniaxial crystals ที่มี Optic axis ในทิศทางเดียวกับทิศของสนามไฟฟ้า สำหรับตัวกลางที่เป็นของเหลว นั้นผลจากสนามไฟฟ้าจะทำให้เกิด Displacement ของนิวเคลียสและอิเล็กตรอนที่อยู่ในโมเลกุลของของเหลว นั้นๆ และแรงจากสนามไฟฟ้าพยายามที่จะทำให้เกิดไดโพลโมเมนต์และเปลี่ยนทิศทางการเรียงตัวของไดโพลโมเมนต์ดังกล่าวให้อยู่ในแนวเดียวกันกับทิศของสนามไฟฟ้า แนวของไดโพลโมเมนต์ตามทิศของสนามไฟฟ้าจะเทียบได้กับ Optic axis ของ Uniaxial crystals แต่อย่างไรก็ตาม ไดโพลโมเมนต์ที่เกิดขึ้นไม่ได้เรียงตัวในทิศของสนามไฟฟ้าเสียทั้งหมด ความแตกต่างกันของทิศทางการเรียงตัวของไดโพลโมเมนต์นี้จะทำให้เกิดสมบัติแบบเดียวกันกับสมบัติของ Uniaxial crystals ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว และเมื่อมีแสงตกกระทบบนแนวตั้งฉากกับระนาบของ Optic axis หรือระนาบของทิศของสนามไฟฟ้าจึงเกิดปรากฏการณ์ Birefringence ขึ้นและแสงจะมีพฤติกรรมแบบเดียวกันกับที่แสดงในรูป 2.3

การสังเกต Kerr effect จะสามารถทำได้โดยใช้ชุดทดลองที่เรียกว่า Electro-optic shutter ซึ่งแสดงดังรูป 2.5⁽⁵⁾



รูป 2.5 แสดงชุดทดลอง Electro-optic shutter

จากรูปจะประกอบไปด้วยโพลาไรเซอร์ ซึ่งเป็นอุปกรณ์ทางแสงอย่างหนึ่งที่สามารถเปลี่ยนแนวโพลาไรเซชันของแสงที่ตกกระทบโดยจะยอมให้แนวโพลาไรเซชันดังกล่าวแนวใดแนวหนึ่งผ่านออกไปได้มากที่สุดและเรียกแนวนี้ว่า Transmission axis นอกจากนี้ยังมีแอนาไลเซอร์ เซลล์บรรจุของเหลวตัวอย่าง (Sample cell) หรือ Kerr cell ซึ่งเป็นหลอดแก้วที่มีขั้วไฟฟ้าอยู่ภายในและบรรจุด้วยของเหลวโดยที่ Kerr cell จะวางอยู่ระหว่าง โพลาไรเซอร์ และแอนาไลเซอร์ ซึ่งในการทดลองนั้นจะให้ Transmission axis ของโพลาไรเซอร์มีทิศทางทำมุม 45 องศากับทิศของสนามไฟฟ้าและตั้งฉากกับ Transmission axis ของแอนาไลเซอร์ ในกรณีที่ยังไม่มีสนามไฟฟ้ามาระกระทำต่อ Kerr cell ความเข้มแสงที่ทะลุผ่านออกมาจากแอนาไลเซอร์จะมีค่าน้อยที่สุด แต่ถ้ามีสนามไฟฟ้ามาระกระทำต่อ Kerr cell แล้วจะได้แสงที่มีแอมพลิจูดลัพท์ซึ่งทะลุผ่านออกมาจากแอนาไลเซอร์แสดงดังรูป 2.6⁽³⁾

โดยใช้เอกลักษณ์ $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$

ในการทดลองให้ Transmission axis ของโพลาไรเซอร์ และแอนาไรเซอร์ตั้งฉากกัน ทำให้ $\chi = 90$ องศา จะได้

$$I = E^2 \sin^2 2\phi \sin^2 \frac{\delta}{2} \tag{2.56}$$

และเมื่อให้ Transmission axis ของโพลาไรเซอร์นั้นทำมุม 45 องศา กับทิศของสนามไฟฟ้า จะได้

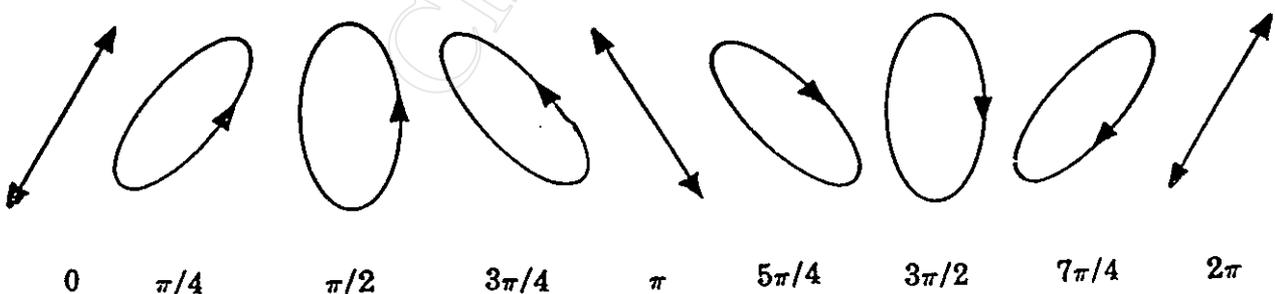
$$\begin{aligned} I &= E^2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \\ &= I_m \sin^2 \frac{\delta}{2} \end{aligned} \tag{2.57}$$

โดยที่

I เป็นความเข้มแสงขณะใดๆ

I_m เป็นความเข้มแสงที่มีค่ามากที่สุด เมื่อโพลาไรเซอร์และแอนาไรเซอร์ อยู่ในตำแหน่งที่มี Transmission axis อยู่ในแนวเดียวกันอย่างสมบูรณ์

ดังนั้น ความเข้มลัพท์ที่วัดได้ของแสงซึ่งออกมาจากแอนาไรเซอร์นั้นจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับ ความต่างเฟส δ ของ O-ray และ E-ray ที่ขึ้นอยู่กับขนาดของสนามไฟฟ้าที่มากกระทำต่อ Kerr cell ด้วย ความต่างเฟสดังกล่าวทำให้การรวมกันของแอมพลิจูดของ Electric vector ของ O-ray และ E-ray มีแอมพลิจูดลัพท์และแนวของโพลาไรเซชันในลักษณะต่างๆกันซึ่งแสดงดังรูป 2.7⁽⁶⁾



รูป 2.7 แสดงโพลาไรเซชันของ แอมพลิจูดลัพท์ของแสงซึ่งเปลี่ยนแปลงไป พร้อมกับความต่างเฟส δ

จากรูป จะเห็นได้ว่าเมื่อ $\delta = \pi$ ความเข้มแสงลัพธ์ที่ทะลุผ่านออกมาจากแอนาไลเซอร์ จะมีค่ามากที่สุด เรียกความเข้มแสงดังกล่าวในกรณีนี้ว่า First transmission maximum intensity I_m และเรียกความต่างศักย์ของสนามไฟฟ้าที่ทำให้เกิดความต่างเฟสดังกล่าวว่า First transmission maximum voltage V_m

จากการทดลอง Kerr ได้ความสัมพันธ์⁽⁷⁾

$$\Delta n = n_e - n_o = \lambda K E^2 \quad (2.58)$$

โดยที่ λ เป็นความยาวคลื่นของแสงตกกระทบ

K เป็นค่า Kerr constant

E เป็นความเข้มของสนามไฟฟ้า

Δn เป็น Birefringence

ส่วนความต่างเฟสของ E-ray และ O-ray เป็นไปตามสมการ

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n = 2\pi K I E^2 \quad (2.59)$$

เมื่อ l เป็นระยะทางที่แสงเดินทางในของเหลว (Optical path length)

จากสมการ (2.59) และสมการ (2.57) ได้

$$\frac{I}{I_m} = \sin^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{E}{E_m} \right)^2 \right] \quad (2.60)$$

โดยที่ $E_m = \frac{1}{\sqrt{2KI}}$ คือ First transmission maximum electric field ที่สอดคล้องกับค่า V_m ดังที่ได้กล่าวมาแล้วและจากความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้ากับความต่างศักย์จะได้

$$V_m = \frac{d}{\sqrt{2KI}} \quad (2.61)$$