

บทที่ 4

ทฤษฎีเชิงสเปกตรัมของคอมแพกต์เซล์ฟแอดจอยท์โอเปอเรเตอร์

(Spectral theorem of compact self - adjoint operators)

สำหรับบทนี้จะเป็นการศึกษาค่าไอเก้น ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของค่าสเปกตรัม ของ บาวด์ลีเนียโอเปอเรเตอร์ชนิดหนึ่งบนฮิลเบิร์ตสเปซ ซึ่งเรียกว่าคอมแพกต์เซล์ฟแอดจอยท์ โอเปอเรเตอร์ ซึ่งลิเนียโอเปอเรเตอร์ชนิดนี้เป็นทั้งคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์และเซล์ฟแอดจอยท์ โอเปอเรเตอร์พร้อมกัน คุณสมบัติที่เราควรรู้จักของลิเนียโอเปอเรเตอร์ชนิดนี้มีดัง ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1 : ถ้า T เป็นคอมแพกต์เซล์ฟแอดจอยท์โอเปอเรเตอร์บนฮิลเบิร์ตสเปซ H แล้ว จะมี $\lambda \in e(T)$ ซึ่ง $|\lambda| = \|T\|$.

พิสูจน์ : กรณีที่ $T = \overline{0}$ นั่นคือ $T(x) = 0$ ทุก ๆ $x \in H$ โดยทฤษฎีบท 3.7 เรามี

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} | \langle T(x), x \rangle | = \sup_{\|x\|=1} | \langle 0, x \rangle | = 0$$

เนื่องจาก $T(x) = 0 = 0 \cdot x$ ทุก ๆ $x \neq 0$ ใน H จึงได้ว่า $\lambda = 0 \in e(T)$ ซึ่ง $|\lambda| = |0| = 0 = \|T\|$

กรณีที่ $T \neq \overline{0}$ นั่นคือ $T(x) \neq 0$ สำหรับบาง $x \in H$ จาก T เป็นเซล์ฟแอดจอยท์-

โอเปอเรเตอร์บน H โดยทฤษฎีบท 3.3 ได้ว่า $\langle T(x), x \rangle \in \mathbb{R}$ ทุก ๆ $x \in H$ จาก $T \neq \overline{0}$

โดยทฤษฎีบท 3.7 ได้ว่า $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} | \langle T(x), x \rangle | \neq 0$ ซึ่งบ่งชี้ว่ามีซีควเอนซ์ $\{x_n\}$ ใน H

ซึ่ง $\|x_n\| = 1$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ และ $| \langle T(x_n), x_n \rangle | \rightarrow \|T\|$ นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} | \langle T(x_n), x_n \rangle | = \|T\|$

จาก $\|x_n\| = 1$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ เราได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นบาวด์ซีควเอนซ์ใน H และจาก T เป็น

คอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บน H เราได้ว่าซีควเอนซ์ $\{T(x_n)\}$ เป็นคอนเวอร์เจนต์ซีควเอนซ์

และให้ $(T(x_n)) \rightarrow y$ สำหรับบาง $y \in H$ นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = y$ สำหรับบาง $y \in H$

จาก $\lim_{n \rightarrow \infty} | \langle T(x_n), x_n \rangle | = \|T\|$ เราได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T(x_n), x_n \rangle = \lambda$ สำหรับบาง $\lambda \in \mathbb{R}$

ซึ่ง $|\lambda| = \|T\|$ ดังนั้น $\|y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n)\| \leq \|T\|$ ทั้งนี้เพราะ $\|x_n\| = 1$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\text{เนื่องจาก } \|T(x_n) - \lambda x_n\|^2 = \langle T(x_n) - \lambda x_n, T(x_n) - \lambda x_n \rangle$$

$$= \langle T(x_n), T(x_n) \rangle - \overline{\lambda} \langle T(x_n), x_n \rangle - \lambda \langle x_n, T(x_n) \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle x_n, x_n \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \|T(x_n)\|^2 - 2\lambda \langle T(x_n), x_n \rangle + \lambda^2 \|x_n\|^2 \\
&= \|T(x_n)\|^2 - 2\lambda \langle T(x_n), x_n \rangle + \lambda^2 \quad (\text{ทั้งนี้เพราะ } \|x_n\| = 1)
\end{aligned}$$

ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda \in \mathbb{R}$ และ T เป็นเซตที่แอ็คจอยท์โอเปอเรเตอร์บน H) และเรามี

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n) - \lambda x_n\|^2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} [\|T(x_n)\|^2 - 2\lambda \langle T(x_n), x_n \rangle + \lambda^2] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n)\|^2 - 2\lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T(x_n), x_n \rangle + \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^2 \\
&= \|y\|^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 \\
&= \|y\|^2 - \lambda^2 \\
&= \|y\|^2 - \|T\|^2 \leq 0
\end{aligned}$$

จึงได้ว่า $\|y\| = \|T\| \neq 0$ และโดยนิยามของนอร์มเราได้ว่า $y \neq 0$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = y \neq 0$$

$$\text{เนื่องจาก } \|\lambda\| = \|T\| \neq 0 \text{ จึงได้ว่า } \lambda \neq 0 \text{ ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{y}{\lambda} \neq 0$$

$$\text{เป็นผลให้ } \lim_{n \rightarrow \infty} (T - \lambda I)(x_n) = (T - \lambda I)\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{n \rightarrow \infty} (T - \lambda I)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n$$

$$= y - y$$

$$= 0$$

$$\text{จึงได้ว่า } (T - \lambda I)\left(\frac{y}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} T(y) - y = 0$$

$$\text{ดังนั้น } T(y) = \lambda \cdot y \text{ โดยที่ } y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) \neq 0 \text{ อยู่ใน } H \text{ แสดงว่า } \lambda \in e(T)$$

$$\text{ซึ่ง } \|\lambda\| = \|T\|. \quad \square$$

ทฤษฎีบท 4.2 : ถ้า T เป็นคอมแพกต์เซตที่แอ็คจอยท์โอเปอเรเตอร์บนฮิลเบิร์ตสเปซ H

$$\text{และ } \lambda \in \sigma(T) - \{0\} \text{ แล้ว } \lambda \in e(T)$$

พิสูจน์ : ให้ $\lambda \in \sigma(T) - \{0\}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.8 ได้ว่า มีซีควนซ์ $\{x_n\}$ ใน H

$$\text{ซึ่ง } \|x_n\| = 1 \text{ ทุก ๆ } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ และ } \|T(x_n) - \lambda x_n\| \rightarrow 0 \text{ จาก } \|x_n\| = 1 \text{ ทุก ๆ } n \in \mathbb{Z}^+$$

เราได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นบรรทัดฐานใน H ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.4 ได้ว่า $\{T(x_n)\}$ มีคอนเวอร์เจนต์สับซีแวนซ์ และให้ $\{T(x_{n_m})\}$ เป็นคอนเวอร์เจนต์สับซีแวนซ์ของ $\{T(x_n)\}$

โดยที่ $\{T(x_{n_m})\} \rightarrow y$ สำหรับบาง $y \in H$ (ทั้งนี้เพราะ H เป็นสเปซบริบูรณ์) นั่นคือ

$$\lim_{n_m \rightarrow \infty} T(x_{n_m}) = y \text{ สำหรับบาง } y \in H \text{ เนื่องจาก } x_{n_m} = \frac{1}{\lambda} [T(x_{n_m}) - \{T(x_{n_m}) - \lambda x_{n_m}\}] \rightarrow \frac{1}{\lambda} y \text{ (ทั้งนี้เพราะ } \{T(x_{n_m}) - \lambda x_{n_m}\} \rightarrow 0 \text{ และ } \{T(x_{n_m})\} \rightarrow y \text{ ดังนั้น)}$$

$$\lim_{n_m \rightarrow \infty} x_{n_m} = \frac{1}{\lambda} y \text{ เป็นผลให้ } y = \lim_{n_m \rightarrow \infty} T(x_{n_m}) = T\left(\frac{1}{\lambda} y\right) = \frac{1}{\lambda} T(y) \text{ นั่นคือ}$$

$$T(y) = \lambda y \text{ เนื่องจาก } \|x_{n_m}\| = 1 \text{ ทุก } n_m \in \mathbb{Z}^+ \text{ จึงได้ว่า } \|\frac{1}{\lambda} y\| = 1 \text{ นั่นคือ}$$

$$\|y\| = |\lambda| > 0 \text{ (ทั้งนี้เพราะ } \lambda \neq 0 \text{) และโดยนิยามของนอร์มเราได้ว่า } y \neq 0 \text{ ซึ่งขณะนี้เรามี}$$

$$T(y) = \lambda y \text{ โดยที่ } y \neq 0 \text{ แสดงว่า } \lambda \in e(T) \quad \square$$

คุณสมบัติของคอมแพคต์เซตที่แอดจอยท์โอเปอเรเตอร์ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ ต้องการนิยามของคำหลายคำ และต้องการเลื้มาดังต่อไปนี้.

นิยาม 4.3 : ถ้า K เป็นอินเนอร์โปรดักต์สเปซแล้ว

$$(4.3.1) \quad \text{สำหรับ } x, y \in K, x \text{ ออร์ธอกอนัลกับ } y \text{ (} x \text{ is orthogonal to } y \text{)}$$

$$\text{และเขียนแทนด้วย } x \perp y \text{ ก็ต่อเมื่อ } \langle x, y \rangle = 0$$

$$(4.3.2) \quad \text{สับเซต } S \neq \emptyset \text{ ของ } K \text{ เป็นออร์ธอกอนัลเซต (orthogonal set)}$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } x \perp y \text{ ทุก } x, y \in S \text{ ซึ่ง } x \neq y$$

$$(4.3.3) \quad \text{สับเซต } S \neq \emptyset \text{ ของ } K \text{ เป็นออร์ธอนอร์มัลเซต (orthonormal set)}$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } S \text{ เป็นออร์ธอกอนัลเซต และ } \|x\| = 1 \text{ ทุก } x \in S. \text{ (นั่นคือ ก็ต่อเมื่อ } S \text{ เป็นออร์ธอกอนัลเซต และ ทุก } x \in S \text{ เป็นยูนิตเวกเตอร์ (unit vector))}$$

$$(4.3.4) \quad \text{ออร์ธอกอนัลคอมพลีเมนต์ (orthogonal complement) ของสับเซต } S \neq \emptyset \text{ ของ } K \text{ คือ}$$

$$\{x \in K / x \perp y \text{ ทุก } y \in S\} \text{ และเขียนแทนเซตดังกล่าวนี้ด้วยสัญลักษณ์ } S^\perp \quad \square$$

เลมมา 4.4 (Pythagorean theorem) : ถ้า K เป็นอินเนอร์โปรดักต์สเปซที่ $x \perp y$

$$\text{ทุก } x, y \in K \text{ แล้ว } \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

พิสูจน์ : ให้ $x \perp y$ ทุก $x, y \in K$

$$\text{ดังนั้น } \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$= \|x\|^2 + 0 + 0 + \|y\|^2$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \square$$

ทฤษฎีบท 4.5 : ถ้า k เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ T เป็นคอมแพกต์เซตที่แอ็ดจอยท์
โอเปอเรเตอร์บนฮิลเบิร์ตสเปซ H และ $\{x_n\}$ เป็นออร์ธอนอร์มัลเซตของไอเกนเวกเตอร์
สำหรับค่าไอเกนใน $\{\lambda_n\}$ ของ T (นั่นคือ $T(x_n) = \lambda_n x_n$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$) โดยที่ $|\lambda_n| \geq k$
ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ แล้ว $\{x_n\}$ เป็นเซตจำกัด.

พิสูจน์ : สมมติว่า $\{x_n\}$ เป็นเซตอนันต์

เนื่องจาก $x_n \perp x_m$ ทุก ๆ $n \neq m$ นั่นคือ $\langle x_n, x_m \rangle = 0$ ทุก ๆ $n \neq m$.

$$\begin{aligned} \text{เป็นผลให้ } \langle \lambda_n x_n, \lambda_m x_m \rangle &= \lambda_n \overline{\lambda_m} \langle x_n, x_m \rangle \\ &= \lambda_n \overline{\lambda_m} \cdot 0 \\ &= 0 \text{ ทุก ๆ } n \neq m \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lambda_n x_n \perp \lambda_m x_m$ ทุก ๆ $n \neq m$ ดังนั้น โดยเลมมา 4.4

$$\begin{aligned} \text{เราได้ว่า } \|T(x_n) - T(x_m)\|^2 &= \|\lambda_n x_n - \lambda_m x_m\|^2 \\ &= \|\lambda_n x_n + (-\lambda_m) x_m\|^2 \\ &= \|\lambda_n x_n\|^2 + \|(-\lambda_m) x_m\|^2 \\ &= |\lambda_n|^2 \|x_n\|^2 + |-\lambda_m|^2 \|x_m\|^2 \\ &= \lambda_n^2 \cdot 1 + \lambda_m^2 \cdot 1 \\ &= \lambda_n^2 + \lambda_m^2 \text{ ทุก ๆ } n \neq m \end{aligned}$$

$$\text{เป็นผลให้ } \|T(x_n) - T(x_m)\| = \sqrt{\lambda_n^2 + \lambda_m^2} \geq \sqrt{k^2 + k^2} = \sqrt{2} k.$$

แสดงว่า $\{T(x_n)\}$ ไม่มีคอนเวอร์เจนต์ลำดับซีควเอนซ์ ขณะที่ $\{x_n\}$ เป็นบาวด์ซีควเอนซ์ใน H

(ทั้งนี้เพราะ $\|x_n\| = 1$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$) และ T เป็นคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บน H

ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 1.4 จึงสรุปได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นเซตจำกัด. $\square$

การพิสูจน์คุณสมบัติของคอมแพกต์เซตที่แอ็ดจอยท์โอเปอเรเตอร์ ต่อไปนี้เกี่ยวข้องกับเซตชนิดหนึ่งซึ่งเรียกว่าคอนเว็กซ์เซต (convex set) ดังนิยามต่อไปนี้.

นิยาม 4.8 : ลำดับเซต $S \neq \emptyset$ ของลิเนียสเปซ L เป็นคอนเว็กซ์เซต ก็ต่อเมื่อ $\alpha x + (1 - \alpha) y \in S$

ทุก ๆ $x, y \in S$ และทุก $\alpha \in [0, 1]$. $\square$

เลมมา 4.7 : ถ้า K เป็นอินเนอร์โพรดัคต์สเปซ แล้ว $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

ทุก ๆ $x, y \in K$.

พิสูจน์ : ให้ $x, y \in K$.

$$\begin{aligned}\text{เรามี } \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } \|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \square$$

เลมมา 4.8 : ถ้า K เป็นอินเนอร์โปรดักต์สเปซ และ $M \neq \emptyset$ เป็นคอนเว็กซ์สับเซต-

บริบูรณ์ (completed convex subset) ของ K แล้วทุก ๆ $x \in K$ จะมี $y \in M$

เพียงหนึ่งเท่านั้นที่ $\inf_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\| = \|x - y\|$.

พิสูจน์ : ให้ $x \in K$ และ $\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\|$ จะแสดงว่ามี $y \in M$ ที่ $\|x - y\| = \delta$

โดยนิยามของอินฟินัมได้ว่ามีซีแวนซ์ $\{y_n\}$ ใน M ที่ $\|x - y_n\| = \delta_n \rightarrow \delta$

ต่อไปจะแสดงว่า $\{y_n\}$ เป็นคอซีซีแวนซ์ ให้ $v_n = y_n - x$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ ดังนั้น

$$\|v_n\| = \|y_n - x\| = \|x - y_n\| = \delta_n \text{ ทุก ๆ } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ และ}$$

$$\begin{aligned}\|v_n + v_m\| &= \|(y_n - x) + (y_m - x)\| \\ &= \|(y_n + y_m) - 2x\| \\ &= 2\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\| \text{ ทุก ๆ } n, m \in \mathbb{Z}^+\end{aligned}$$

จาก M เป็นคอนเว็กซ์เซตเราได้ว่า $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$ ทุก ๆ $n, m \in \mathbb{Z}^+$ และโดยนิยาม

ของ δ ได้ว่า $\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\| \geq \delta$ ทุก ๆ $n, m \in \mathbb{Z}^+$ เป็นผลให้ $\|v_n + v_m\| \geq 2\delta$

ทุก ๆ $n, m \in \mathbb{Z}^+$ ดังนั้น $\|v_n + v_m\| \leq 2\delta$ ทุก ๆ $n, m \in \mathbb{Z}^+$ เนื่องจาก

$$y_n - y_m = (y_n - x) - (y_m - x) = v_n - v_m \text{ โดยเลมมา 4.7 จึงได้ว่า } \|y_n - y_m\|^2 = \|v_n - v_m\|^2$$

$$= -\|v_n + v_m\|^2 + 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2)$$

$$\text{ดังนั้น } \|y_n - y_m\|^2 \leq -(2\delta)^2 + 2(\delta_n^2 + \delta_m^2) \quad \text{ทุก } n, m \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{ดังนั้น } \|y_n - y_m\|^2 \leq -(2\delta)^2 + 2(\delta_n^2 + \delta_m^2) \rightarrow 0 \quad \text{เมื่อ } n, m \rightarrow \infty \text{ ซึ่งบ่งชี้ว่า } \|y_n - y_m\| \rightarrow 0$$

เมื่อ $n, m \rightarrow \infty$ แสดงว่า $\{y_n\}$ เป็นคอซีซีคอนซ์ จาก M เป็นเซตบริบูรณ์ เราได้ว่า $\{y_n\} \rightarrow y$ สำหรับบาง $y \in M$ ดังนั้นโดยนิยามของ δ เราได้ว่า $\|x - y\| \geq \delta$ ต่อไปพิจารณา

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|x - y_n + y_n - y\| \\ &\leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\| \quad (\text{นิยามของนอร์ม}) \\ &= \delta_n + \|y_n - y\| \quad \text{ทุก } n \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

จาก $\{y_n\} \rightarrow y$ เราได้ว่า $\|y_n - y\| \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ เป็นผลให้

$$\|x - y\| \leq \delta_n + \|y_n - y\| \rightarrow \delta \quad \text{เมื่อ } n \rightarrow \infty$$

นั่นคือ $\|x - y\| \leq \delta$ จึงสรุปได้ว่า $\|x - y\| = \delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\|$

สมมติว่า $y, y' \in M$ ซึ่ง $\|x - y\| = \delta = \|x - y'\|$ ดังนั้นโดยเลมมา 4.7

$$\begin{aligned} \text{เราได้ว่า } \|y - y'\|^2 &= \|(y - x) - (y' - x)\|^2 \\ &= 2\|y - x\|^2 + 2\|y' - x\|^2 - \|(y - x) + (y' - x)\|^2 \\ &= 2\delta^2 + 2\delta^2 - (2\|\frac{1}{2}(y + y') - x\|)^2 \\ &= 4\delta^2 - 4\|\frac{1}{2}(y + y') - x\|^2 \end{aligned}$$

จาก M เป็นคอนเวกซ์เซตเราได้ว่า $\frac{1}{2}(y + y') \in M$ ดังนั้นโดยนิยามของ δ เราได้ว่า

$$\|\frac{1}{2}(y + y') - x\| \geq \delta \quad \text{เป็นผลให้ } 4\delta^2 - 4\|\frac{1}{2}(y + y') - x\|^2 \leq 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0 \quad \text{นั่นคือ } \|y - y'\|^2 \leq 0$$

ซึ่งบ่งชี้ว่า $\|y - y'\| = 0$ ดังนั้นโดยนิยามของนอร์มเราได้ว่า $y - y' = 0$ นั่นคือ $y = y'$ จึงสรุปได้ว่า

$$\text{ทุก } x \in K \text{ จะมี } y \in M \text{ เพียงหนึ่งเท่านั้น ที่ } \|x - y\| = \inf_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\| \quad \square$$

เลมมา 4.9 (Projection theorem) : ถ้า $M \neq \emptyset$ เป็นสับสเปซปิดของฮิลเบิร์ตสเปซ H

แล้ว $H = M \oplus M^\perp$.

พิสูจน์ : ให้ $x \in H$

เนื่องจาก H เป็นสเปซบริบูรณ์ (completed space) และ $M \neq \emptyset$ เป็นสับสเปซปิดของ H

จึงได้ว่า M เป็นสับสเปซบริบูรณ์ของ H ดังนั้นโดยเลมมา 4.8 ได้ว่า มี $y \in M$ ซึ่ง $x - y = z$

นั่นคือ $x = y + z$ โดยที่ $z \in M^\perp$ ต่อไปจะแสดงว่า $x = y + z$ เขียนได้เพียงวิธีเดียว : สมมติว่า $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$ โดยที่ $y_1, y_2 \in M$ และ $z_1, z_2 \in M^\perp$ ดังนั้น $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$ จาก M และ $M^\perp$ เป็นสับสเปซของ H เราได้ว่า $y_1 - y_2 \in M$ เป็นผลให้ $z_2 - z_1 \in M$ ด้วย และ $z_2 - z_1 \in M^\perp$ เป็นผลให้ $y_1 - y_2 \in M^\perp$ ด้วย แสดงว่า $y_1 - y_2, z_2 - z_1 \in M \cap M^\perp$ แต่ $M \cap M^\perp = \{0\}$ จึงได้ว่า $y_1 - y_2 = 0$ และ $z_2 - z_1 = 0$ นั่นคือ $y_1 = y_2$ และ $z_1 = z_2$ ดังนั้น $x = y + z$ โดยที่ $y \in M$ และ $z \in M^\perp$ เขียนได้เพียงวิธีเดียวเท่านั้น สรุปได้ว่า

$$H = M \oplus M^\perp \quad \square$$

ขณะนี้เราพร้อมแล้วที่จะพิสูจน์คุณสมบัติที่สำคัญของคอมแพกต์เซตที่แอ็คจอยท์-โอเปอเรเตอร์ ซึ่งเราเรียกคุณสมบัติอันนี้ว่าทฤษฎีเชิงสเปกตรัมของคอมแพกต์เซตที่แอ็คจอยท์-โอเปอเรเตอร์นั่นเอง.

ทฤษฎีบท 4.10 : ถ้า $T \neq 0$ เป็นคอมแพกต์เซตที่แอ็คจอยท์โอเปอเรเตอร์บนฮิลเบิร์ตสเปซ H แล้วจะมีเซตจำกัดหรือเซตอนันต์ของจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ $\{\lambda_n\}$ ที่ $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$ ซึ่งแต่ละ λ_n เป็นค่าไอเก้นของ T และมีออร์ธอนอร์มัลเซตจำกัด หรือออร์ธอนอร์มัลเซตอนันต์ $\{u_n\}$ ใน H ซึ่งแต่ละ u_n เป็นไอเก้นเวกเตอร์สำหรับค่าไอเก้น λ_n ของ T และ $T(x) = \sum_n \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n$ ทุก ๆ $x \in H$ และถ้า $\{\lambda_n\}$ เป็นเซตอนันต์ แล้ว $\lambda_n \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$.

พิสูจน์ : โดยทฤษฎีบท 4.1 เรามี $\lambda_1 \in e(T)$ ซึ่ง $|\lambda_1| = \|T\| \neq 0$ ทั้งนี้เพราะ $T \neq 0$

ดังนั้น $|\lambda_1| = \|T\| > 0$ โดยเลมมา 2.2 เรามี $e(T) \subseteq \sigma(T)$ และโดยทฤษฎีบท 3.5 เรามี

$\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ ดังนั้น $\lambda_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$ โดยทฤษฎีบท 3.8 ได้ว่ามีซีเกวนซ์ $\{u_n\}$ ใน H ซึ่ง $\|u_n\| = 1$

ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ และ $\{T(u_n) - \lambda_1 u_n\} \rightarrow 0$ จาก $\lambda_1 \in e(T)$ เราได้ว่า มี $u_1 \neq 0$ ใน H ซึ่ง $\|u_1\| = 1$

และ $T(u_1) = \lambda_1 u_1$ ให้ $F_1 = \{ku_1 / k \text{ เป็นสเกลาร์ใด ๆ}\}$

เนื่องจาก $u_1 = 1 \cdot u_1$ จึงได้ว่า $u_1 \in F_1$ ดังนั้น $F_1 \neq \emptyset$ ต่อไปพิจารณา $x \in F_1^\perp$

$$\begin{aligned} \text{เราได้ว่า } \langle T(x), u_1 \rangle &= \langle x, T(u_1) \rangle \\ &= \langle x, \lambda_1 u_1 \rangle \\ &= \overline{\lambda_1} \langle x, u_1 \rangle \\ &= \lambda_1 \langle x, u_1 \rangle \quad (\text{เพราะ } \lambda_1 \in \mathbb{R}) \\ &= \lambda_1 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $T(x) \in F_1^\perp$ แสดงว่า T ส่ง $F_1^\perp$ ไปยัง (into) $F_1^\perp$ ให้ $H_1 = F_1^\perp$ เนื่องจาก
 $\langle \alpha x + \beta y, u_1 \rangle = \alpha \langle x, u_1 \rangle + \beta \langle y, u_1 \rangle = 0 + 0 = 0$ จึงได้ว่า $\alpha x + \beta y \in H_1$ ทุก ๆ $x, y \in H_1$
 และทุก ๆ สเกลาร์ α, β จึงได้ว่า H_1 เป็นสับสเปซของ H และ $T|_{H_1}$ เป็นคอมแพกต์เซลฟ-
 แอดจอยท์โอเปอเรเตอร์บน H_1 พิจารณากรณีที่ $T|_{H_1} = \overline{0}$ (นั่นคือ $T|_{H_1}(x) = 0$ ทุก ๆ $x \in H_1$)
 โดยเลมมา 4.9 ได้ว่า สำหรับ $x \in H$ จะมี $y \in F_1$ และ $z \in H_1$ ซึ่ง $x = y + z$ และ

$$\begin{aligned}
 T(x) &= T(y + z) \\
 &= T(y) + T(z) \\
 &= T(y) + 0 \\
 &= T(ku_1) \\
 &= kT(u_1) \\
 &= k\lambda_1 u_1 \\
 &= \lambda_1 \langle y, u_1 \rangle u_1 \text{ สำหรับบางสเกลาร์ } k = \langle y, u_1 \rangle \\
 &= \lambda_1 \langle y, u_1 \rangle u_1 + \lambda_1 \langle z, u_1 \rangle u_1 \text{ (ทั้งนี้เพราะ } \langle z, u_1 \rangle = 0) \\
 &= \lambda_1 \langle y + z, u_1 \rangle u_1 \\
 &= \lambda_1 \langle x, u_1 \rangle u_1
 \end{aligned}$$

กรณีที่ $T|_{H_1} \neq \overline{0}$ (นั่นคือ $T|_{H_1}(x) \neq 0$ สำหรับบาง $x \in H_1$) จาก $T|_{H_1}$ เป็นคอมแพกต์เซลฟ-
 แอดจอยท์โอเปอเรเตอร์บน H_1 โดยทฤษฎีบท 4.1 เราได้ว่า มี $\lambda_2 \in e(T|_{H_1})$ ซึ่ง $|\lambda_2|$
 $= \|T|_{H_1}\| > 0$ (เพราะ $T|_{H_1} \neq \overline{0}$) จาก H_1 เป็นสับสเปซของ H เราได้ว่า $|H_1| \leq |H|$

และเห็นได้ชัดว่า $|\lambda_1| = \|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x \rangle| \geq \sup_{\|x\|=1} |\langle T|_{H_1}(x), x \rangle| = \|T|_{H_1}\| =$

$|\lambda_1|$ จาก $\lambda_2 \in e(T|_{H_1})$ เราได้ว่า มี $u_2 \neq 0$ ใน H_1 ซึ่ง $\|u_2\| = 1$ และ $T|_{H_1}(u_2) = \lambda_2 u_2$

ให้ $F_2 = \{ k_1 u_1 + k_2 u_2 \mid k_1, k_2 \text{ เป็นสเกลาร์ใด ๆ} \}$ เนื่องจาก $1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_2 = u_1 + u_2 \in F_2$

จึงได้ว่า $F_2 \neq \emptyset$ และให้ $x \in F_2^\perp$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \langle T|_{H_1}(x), u_1 + u_2 \rangle &= \langle T|_{H_1}(x), u_1 \rangle + \langle T|_{H_1}(x), u_2 \rangle \\
 &= \langle x, \lambda_1 u_1 \rangle + \langle x, \lambda_2 u_2 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{\lambda}_1 \langle x, u_1 \rangle + \overline{\lambda}_2 \langle x, u_2 \rangle \\
&= 0 + 0 \quad (\text{ทั้งนี้เพราะ } u_1, u_2 \in F_2 \text{ และ } x \in F_2^\perp) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $T_{|H_1}(x) \in F_2^\perp$ แสดงว่า $T_{|H_1}$ ส่ง $F_2^\perp$ ไปยัง $F_2^\perp$

ให้ $H_2 = F_2^\perp$ จึงได้ว่า H_2 เป็นสับสเปซของ H (ทั้งนี้เพราะ $\langle \alpha x + \beta y, u_1 + u_2 \rangle$

$$= \langle \alpha x, u_1 \rangle + \langle \alpha x, u_2 \rangle + \langle \beta y, u_1 \rangle + \langle \beta y, u_2 \rangle$$

$$= \alpha \langle x, u_1 \rangle + \alpha \langle x, u_2 \rangle + \beta \langle y, u_1 \rangle + \beta \langle y, u_2 \rangle$$

$$= \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \beta \cdot 0$$

$$= 0 \text{ ทุก } x, y \in H_2 \text{ และทุก } \alpha, \beta \text{ เป็นผลให้ } \alpha x + \beta y \in H_2 \text{ ทุก } x, y \in H_2$$

และทุก α, β จึงได้ว่า H_2 เป็นสับสเปซของ H)

และได้ว่า $T_{|H_1}$ เป็นคอมแพกต์เชลฟ์แอ็ดจอยท์โอเปอเรเตอร์บน H_2

กรณีที่ $T_{|H_1} = \overline{0}$ (นั่นคือ $T_{|H_1}(x) = 0$ ทุก $x \in H_2$) โดยเลมมา 4.9 ได้ว่า

สำหรับ $x \in H$ จะมี $y' \in F_2$ และ $z' \in H_2$ ซึ่ง $x = y' + z'$ และ

$$\begin{aligned}
T(x) &= T(y' + z') \\
&= T(y') + T(z') \\
&= T(y') + 0 \\
&= T(k_1 u_1 + k_2 u_2) \\
&= k_1 T(u_1) + k_2 T(u_2) \\
&= k_1 \lambda_1 u_1 + k_2 \lambda_2 u_2 \\
&= \lambda_1 \langle y', u_1 \rangle u_1 + \lambda_2 \langle y', u_2 \rangle u_2 \text{ สำหรับบาง } k_1 = \langle y', u_1 \rangle \text{ และ } k_2 = \langle y', u_2 \rangle \\
&= \lambda_1 \langle y', u_1 \rangle u_1 + \lambda_1 \langle z', u_1 \rangle u_1 + \lambda_2 \langle y', u_2 \rangle u_2 + \lambda_2 \langle z', u_2 \rangle u_2 \\
&= \lambda_1 \langle y' + z', u_1 \rangle u_1 + \lambda_2 \langle y' + z', u_2 \rangle u_2 \\
&= \lambda_1 \langle x, u_1 \rangle u_1 + \lambda_2 \langle x, u_2 \rangle u_2
\end{aligned}$$

กรณีที่ $T_{|H_1} \neq \overline{0}$ (นั่นคือ $T_{|H_1}(x) \neq 0$ สำหรับบาง $x \in H_2$) เราสามารถดำเนินการตามขั้นตอน

ดังกล่าวข้างต้นได้ แต่ถ้ากระบวนการนี้ยุติลงที่ขั้นตอนใด ขั้นตอนหนึ่ง เช่น สมมติว่ายุติลงที่

ขั้นตอนที่ n เราได้ว่า $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ เป็นเซตจำกัดของค่าไอเกนของ T และ

$$\begin{aligned} T(x) &= \lambda_1 \langle x, u_1 \rangle u_1 + \lambda_2 \langle x, u_2 \rangle u_2 + \dots + \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, u_i \rangle u_i \quad \text{ทุก } x \in H \end{aligned}$$

ดังนั้น $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ จะเป็นออร์ธอนอร์มัลเซตจำกัดของไอเกนเวกเตอร์สำหรับค่าไอเกน $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ถ้ากระบวนการนี้ไม่ได้ยุติลงที่ขั้นตอนใด ๆ เราได้ว่า $\{\lambda_n\}$ เป็นเซตอนันต์ของจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ที่ $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$ ซึ่งแต่ละ λ_n เป็นค่าไอเกนของ T และมีออร์ธอนอร์มัลเซตอนันต์ $\{u_n\}$ ใน H ซึ่ง u_n เป็นไอเกนเวกเตอร์สำหรับค่าไอเกน λ_n นั่นคือ $T(u_n) = \lambda_n u_n$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$

ต่อไป จะแสดงว่า $\lambda_n \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ โดยสมมติให้ $|\lambda_n| \geq \delta > 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } \langle T(u_n), T(u_m) \rangle &= \langle \lambda_n u_n, \lambda_m u_m \rangle \\ &= \lambda_n \overline{\lambda_m} \langle u_n, u_m \rangle \\ &= 0 \quad \text{ทุก ๆ } n \neq m \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $T(u_n) \perp T(u_m)$ ทุก ๆ $n \neq m$ ดังนั้นโดยเลมมา 4.4 ได้ว่า

$$\begin{aligned} \|T(u_n) - T(u_m)\|^2 &= \|T(u_n)\|^2 + \|T(u_m)\|^2 \\ &= \|\lambda_n u_n\|^2 + \|\lambda_m u_m\|^2 \\ &= |\lambda_n|^2 \|u_n\|^2 + |\lambda_m|^2 \|u_m\|^2 \\ &= |\lambda_n|^2 \cdot 1 + |\lambda_m|^2 \cdot 1 \\ &= |\lambda_n|^2 + |\lambda_m|^2 \geq 2\delta^2 \quad \text{ทุก ๆ } n \neq m \end{aligned}$$

ดังนั้น $\|T(u_n) - T(u_m)\| \geq \sqrt{2}\delta$ ทุก ๆ $n \neq m$

แสดงว่า $\{T(u_n)\}$ ไม่สามารถที่จะมีคอนเวอร์เจนซ์แบบซีเควเอนซ์ ขณะที่ $\{u_n\}$ เป็นบาวด์-ซีเควเอนซ์ใน H (ทั้งนี้เพราะ $\|u_n\| = 1$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$) และ T เป็นคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บน H ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 1.4 จึงสรุปได้ว่า $\lambda_n \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$

ให้ F_∞ เป็นลิเนียร์สับสเปซปิด (closed linear subspace) ที่สแปนโดย (spanned by) $\{u_1, u_2, u_3, \dots\}$ นั่นคือ $F_\infty = \text{Span}(\{u_1, u_2, u_3, \dots\})$ และให้ $H_\infty = F_\infty^\perp$ โดยกระบวนการข้างต้น จะได้ว่า T ส่ง H_∞ ไปยัง H_∞ ต่อไปจะแสดงว่า $T|_{H_\infty} = 0$ นั่นคือ $T|_{H_\infty}(x) = 0$ ทุก ๆ $x \in H_\infty$:
ให้ $x \in H_\infty$ ดังนั้น $x \in H_n = F_n^\perp$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ และโดยอสมการของชวาร์ซเราได้ว่า

$$\begin{aligned}
| \langle T(x), x \rangle | &\leq \| T(x) \| \cdot \| x \| \\
&\leq \| T|_{H_n} \| \cdot \| x \| \cdot \| x \| \\
&= \| T|_{H_n} \| \cdot \| x \|^2 \\
&= |\lambda_n| \cdot \| x \|^2 \rightarrow 0 \text{ เมื่อ } n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

แสดงว่า $\langle T(x), x \rangle = 0$ ทุก ๆ $x \in H_\infty$ ดังนั้นโดยเลมมา 3.2 เราได้ว่า $T|_{H_\infty} = \overline{0}$ และ

โดยเลมมา 4.9 จะได้ว่าแต่ละ $x \in H$ จะมี $y_0 \in F_\infty$ และ $z_0 \in H_\infty$ ซึ่ง $x = y_0 + z_0$ และ

$$\begin{aligned}
T(x) &= T(y_0 + z_0) \\
&= T(y_0) + T(z_0) \\
&= T(y_0) + 0 \\
&= T\left(\sum_n \langle y_0, u_n \rangle u_n\right) \\
&= \sum_n \lambda_n \langle y_0, u_n \rangle u_n \\
&= \sum_n \lambda_n \langle y_0 + z_0, u_n \rangle u_n \\
&= \sum_n \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n \quad \square
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 4.10 นี้อาจเรียกว่า "ทฤษฎีการแตกออกในเทอมของสเปกตรัม" (spectral decomposition theorem) ซึ่งชื่อของทฤษฎีก็ทำให้เห็นภาพพจน์โดยชัดเจนแล้วว่า คอมแพกต์-เซลฟ์แอดจอยท์โอเปอเรเตอร์บนฮิลเบิร์ตสเปซสามารถแตกออกเป็นอนุกรมในเทอมของสเปกตรัมของมันได้ กล่าวคือ ถ้า T เป็นคอมแพกต์เซลฟ์แอดจอยท์โอเปอเรเตอร์บนฮิลเบิร์ตสเปซ H แล้ว $T = \sum_n \lambda_n \langle \cdot, u_n \rangle u_n$ โดยที่แต่ละ λ_n เป็นค่าไอเก้นของ T และ u_n เป็นไอเก้นเวกเตอร์สำหรับค่าไอเก้น λ_n ซึ่ง $T(u_n) = \lambda_n u_n$