

บทที่ 3

เซตพีแอ็ดจอยท์โอเปอเรเตอร์บนฮิลเบิร์ตสเปซ

(Self - adjoint operators on Hilbert spaces)

ในบทนี้จะเป็นการศึกษา คุณสมบัติที่สำคัญบางประการของเซตพีแอ็ดจอยท์

โอเปอเรเตอร์ (self - adjoint operators) บนฮิลเบิร์ตสเปซเชิงซ้อน (complex Hilbert spaces) โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เป็นการศึกษาทฤษฎีเชิงสเปกตรัม (spectral theorem) ของเซตพีแอ็ดจอยท์-โอเปอเรเตอร์บนฮิลเบิร์ตสเปซเชิงซ้อน ซึ่งตลอดการศึกษาของบทนี้ เราให้ $B(H)$ เป็นสเปซของบาวด์ลีเนียโอเปอเรเตอร์บนฮิลเบิร์ตสเปซเชิงซ้อน H และเป็นที่ทราบกันดีแล้วว่า แต่ละ $T \in B(H)$ จะมี $S \in B(H)$ อีกตัวหนึ่งประกอบเป็นคู่กับ T เสมอ ซึ่งเราเรียก S นี้ว่าเป็นแอ็ดจอยท์โอเปอเรเตอร์ (adjoint operator) ของ T กล่าวคือ แต่ละ $T \in B(H)$ จะมี $S \in B(H)$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ $\langle T(x), y \rangle = \langle x, S(y) \rangle$ ทุก ๆ $x, y \in H$ ซึ่งต่อไปนี้จะเขียนแทน S ด้วย T^*

นิยาม 3.1 : เราจะเรียก $T \in B(H)$ ว่าเป็นเซตพีแอ็ดจอยท์โอเปอเรเตอร์ (self - adjoint operator) หรือเฮอร์มิเชียนโอเปอเรเตอร์ (Hermitian operator) ก็ต่อเมื่อ $T^* = T$ $\square$

พิจารณาโอเปอเรเตอร์ศูนย์ (zero operator) $\overline{0}$ และโอเปอเรเตอร์เอกลักษณ์ (identity operator) I บนฮิลเบิร์ตสเปซเชิงซ้อน H เราได้ว่า $\langle x, \overline{0}^*(y) \rangle = \langle \overline{0}(x), y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0 = \langle x, 0 \rangle = \langle x, \overline{0}(y) \rangle$ ทุก ๆ $x, y \in H$ ซึ่งแสดงว่า $\overline{0}^* = \overline{0}$ และ $\langle x, I^*(y) \rangle = \langle I(x), y \rangle = \langle x, y \rangle = \langle x, I(y) \rangle$ ทุก ๆ $x, y \in H$ ซึ่งแสดงว่า $I^* = I$ ดังนั้น $\overline{0}$ และ I เป็นเซตพีแอ็ดจอยท์โอเปอเรเตอร์บน H

เราเรียกแมป (map) $T \rightarrow T^*$ นี้ว่าแอ็ดจอยท์โอเปอเรชัน (adjoint operation) ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีแล้วว่าแอ็ดจอยท์โอเปอเรชันมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้ :

1. $\|T^*\| = \|T\|$ ทุก ๆ $T \in B(H)$
2. $\langle T^*(y), x \rangle = \langle y, T(x) \rangle$ ทุก ๆ $T \in B(H)$ และทุก ๆ $x, y \in H$
3. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$ ทุก ๆ $T \in B(H)$ และทุก ๆ $\alpha \in \mathbb{C}$

4. $(T^*)^* = T$ ทุก ๆ $T \in B(H)$
5. $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$ ทุก ๆ $T \in B(H)$
6. ถ้า $T \in B(H)$ แล้ว $T^*T = \overline{0}$ ก็ต่อเมื่อ $T = \overline{0}$
7. $(S+T)^* = S^* + T^*$ ทุก ๆ $S, T \in B(H)$
8. $(ST)^* = T^*S^*$ ทุก ๆ $S, T \in B(H)$

เรามีเกณฑ์สำคัญอีกเกณฑ์หนึ่ง สำหรับการเป็นเซตฟัแอ็คจอยท์โอเปอเรเตอร์ของ-
บาวคัลนิยโอเปอเรเตอร์ ซึ่งการพิสูจน์เกณฑ์ดังกล่าวนี้ เราต้องการเลมมา 3.2 ต่อไปนี้

นิยาม 3.2 : ถ้า K เป็นอินเนอร์โปรดักต์สเปซเชิงซ้อน (complex inner product space) และ T เป็นลิเนียโอเปอเรเตอร์บน K ชนิดที่ $\langle T(x), x \rangle = 0$ ทุก ๆ $x \in K$ แล้ว $T = \overline{0}$

พิสูจน์ : ให้ $x, y \in K$ และ $\alpha, \beta \in C$

เรามี $\alpha x + \beta y \in K$ และ

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(\alpha x + \beta y), \alpha x + \beta y \rangle \\ &= \overline{\alpha} \langle T(\alpha x + \beta y), x \rangle + \overline{\beta} \langle T(\alpha x + \beta y), y \rangle \\ &= \overline{\alpha} \alpha \langle T(x), x \rangle + \overline{\alpha} \beta \langle T(y), x \rangle + \overline{\beta} \alpha \langle T(x), y \rangle + \overline{\beta} \beta \langle T(y), y \rangle \\ &= \overline{\alpha} \beta \langle T(y), x \rangle + \overline{\beta} \alpha \langle T(x), y \rangle \end{aligned}$$

ดังนั้นเมื่อ $\alpha = \beta = 1$ เราได้ $\langle T(y), x \rangle + \langle T(x), y \rangle = 0$ และเมื่อ $\alpha = i$ และ $\beta = 1$ เราได้ $-i \langle T(y), x \rangle + i \langle T(x), y \rangle = 0$ หรือ $-\langle T(y), x \rangle + \langle T(x), y \rangle = 0$ ทำให้ได้ว่า $2 \langle T(x), y \rangle = 0$ หรือ $\langle T(x), y \rangle = 0$ ทั้งหมดทุก ๆ $x, y \in K$ ดังนั้นเมื่อ $y = T(x)$ เราได้

$$0 = \langle T(x), T(x) \rangle = \|T(x)\|^2 \quad \text{ทุก } x \in K \text{ และดังนั้น } \|T(x)\| = 0 \quad \text{ทุก } x \in K$$

โดยนิยามของนอร์ม จึงได้ว่า $T(x)=0$ ทุก ๆ $x \in K$ นั่นคือ $T = \overline{0}$ $\square$

ขณะนี้เราพร้อมแล้วที่จะพิสูจน์เกณฑ์สำคัญสำหรับการเป็นเซลฟ์แอดจอยท์-
โอเปอเรเตอร์ ของบาวด์ลีเนียโอเปอเรเตอร์

ทฤษฎีบท 3.3 : ให้ $T \in B(H)$ จะได้ว่า T เป็นเซลล์ที่เอนต์จอยท์โอเปอเรเตอร์บน H ก็ต่อเมื่อ $\langle T(x), x \rangle \in \mathbb{R}$ ทุก $x \in H$.

พิสูจน์ : $(\Rightarrow)$ ให้ T เป็นเซตพีแอ็งจอยท์ไฮเปอร์เรเตอร์บนฮิลเบิร์ตสเปซเชิงซ้อน H

ดังนั้น $T^*(x) = T(x)$ ทุก ๆ $x \in H$ เป็นผลให้ $\overline{\langle T(x), x \rangle} = \langle x, T(x) \rangle = \langle x, T^*(x) \rangle = \langle T(x), x \rangle$ ทุก ๆ $x \in H$ นั่นคือ $\langle T(x), x \rangle \in \mathbb{R}$ ทุก ๆ $x \in H$.

($\Leftarrow$) ให้ $\langle T(x), x \rangle \in \mathbb{R}$ ทุก ๆ $x \in H$ ดังนั้น $\overline{\langle T(x), x \rangle} = \overline{\langle T(x), x \rangle} = \langle x, T^*(x) \rangle = \langle T^*(x), x \rangle$ ทุก ๆ $x \in H$ ดังนั้น $\langle T(x), x \rangle - \langle T^*(x), x \rangle = 0$ ทุก ๆ $x \in H$ นั่นคือ $\langle T(x) - T^*(x), x \rangle = \langle (T - T^*)(x), x \rangle = 0$ ทุก ๆ $x \in H$ ดังนั้นโดยเลมมา 3.2 ได้ว่า $T - T^* = 0$ นั่นคือ $T^* = T$ ซึ่งแสดงว่า T เป็นเซล์ฟแอดจอยท์โอเปอเรเตอร์บน H . $\square$

เรามีเกณฑ์สำคัญอีกเกณฑ์หนึ่งที่จะแสดงให้เห็นว่า สเปกตรัมของเซล์ฟแอดจอยท์โอเปอเรเตอร์เป็นจำนวนจริง ซึ่งการพิสูจน์เกณฑ์ดังกล่าวนี้เราต้องการเกณฑ์อีกเกณฑ์หนึ่งมาช่วย กล่าวคือ

ทฤษฎีบท 3.4 : ถ้า $T \in B(H)$ โดยที่ T เป็นเซล์ฟแอดจอยท์โอเปอเรเตอร์บน H แล้ว

$\lambda \in \rho(T)$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง $c > 0$ ซึ่ง $\|T_\lambda(x)\| \geq c\|x\|$ ทุก ๆ $x \in H$.

พิสูจน์ : ($\Rightarrow$) ให้ $\lambda \in \rho(T)$ ดังนั้น $T_\lambda = T - \lambda I$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และ T_λ^{-1} เป็นบาวด์ลิเนีย-โอเปอเรเตอร์บน $T_\lambda(H)$ จาก T_λ เป็นหนึ่งต่อหนึ่งเราได้ว่า $T_\lambda^{-1} \neq 0$ ดังนั้นมีจำนวนจริง $k > 0$ ซึ่ง $\|T_\lambda^{-1}\| = k$ เนื่องจาก $I = T_\lambda \circ T_\lambda^{-1} = T_\lambda^{-1} \circ T_\lambda$ จึงได้ว่า $\|x\| = \|I(x)\| = \|(T_\lambda^{-1} \circ T_\lambda)(x)\| = \|T_\lambda^{-1}(T_\lambda(x))\| \leq \|T_\lambda^{-1}\| \cdot \|T_\lambda(x)\| = k\|T_\lambda(x)\|$ ทุก ๆ $x \in H$ นั่นคือ $\|x\| \leq k\|T_\lambda(x)\|$ ทุก ๆ $x \in H$ ให้ $c = \frac{1}{k}$ ดังนั้น $c > 0$ และ $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ ทุก ๆ $x \in H$

($\Leftarrow$) ให้ $c > 0$ และ $\|T_\lambda(x)\| \geq c\|x\|$ ทุก ๆ $x \in H$ ให้ $x_1, x_2 \in H$ โดยที่ $T_\lambda(x_1) = T_\lambda(x_2)$ ดังนั้น $0 = \|T_\lambda(x_1) - T_\lambda(x_2)\| = \|T_\lambda(x_1 - x_2)\|$ โดยข้อกำหนดให้เรามี $\|T_\lambda(x_1 - x_2)\| \geq c\|x_1 - x_2\|$ ดังนั้น $0 \geq c\|x_1 - x_2\|$ เนื่องจาก $c > 0$ จึงได้ว่า $\|x_1 - x_2\| = 0$ โดยนิยามของนอร์มเราได้ว่า $x_1 - x_2 = 0$ นั่นคือ $x_1 = x_2$ แสดงว่า $T_\lambda : H \rightarrow T_\lambda(H)$ เป็นลิเนียโอเปอเรเตอร์หนึ่งต่อหนึ่ง จากข้อกำหนดให้เราได้ว่า $\|x\| \leq \frac{1}{c}\|T_\lambda(x)\|$ ทุก ๆ $x \in H$ ดังนั้น $\|T_\lambda^{-1}(x)\| \leq \frac{1}{c}\|T_\lambda^{-1}(T_\lambda(x))\| = \frac{1}{c}\|x\|$ ทุก ๆ $x \in T_\lambda(H)$ และถ้าให้ $k = \frac{1}{c}$ แล้วเราได้ว่า $k > 0$ และ $\|T_\lambda^{-1}(x)\| \leq k\|x\|$ ทุก ๆ $x \in T_\lambda(H)$ ซึ่งแสดงว่า T_λ^{-1} เป็นบาวด์ลิเนียโอเปอเรเตอร์บน $T_\lambda(H)$ ดังนั้นเราได้ว่า $\lambda \in \rho(T)$. $\square$

ขณะนี้เราพร้อมแล้วที่จะพิสูจน์เกณฑ์ที่ว่าสเปกตรัมของเซล์ฟแอดจอยท์โอเปอเรเตอร์เป็นจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 3.5 : ถ้า $T \in B(H)$ โดยที่ T เป็นเซล์ฟแอดจอยท์โอเปอเรเตอร์บน H แล้ว $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

พิสูจน์ : ให้ $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(T)$ โดยที่ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

สำหรับ $x \neq 0$ ใน H เรามี

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \langle T_\lambda(x), x \rangle &= \langle (T - \lambda I)(x), x \rangle \\
 &= \langle T(x) - \lambda I(x), x \rangle \\
 &= \langle T(x), x \rangle - \lambda \langle x, x \rangle
 \end{aligned}$$

โดยนิยามของอินเนอร์โปรดักต์สเปซเราได้ว่า $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ และโดยทฤษฎีบท 3.3

เราได้ว่า $\langle T(x), x \rangle \in \mathbb{R}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \overline{\langle T_\lambda(x), x \rangle} &= \overline{\langle T(x), x \rangle - \lambda \langle x, x \rangle} \\
 &= \overline{\langle T(x), x \rangle} - \overline{\lambda} \overline{\langle x, x \rangle} \\
 &= \langle T(x), x \rangle - \overline{\lambda} \langle x, x \rangle
 \end{aligned}$$

จากสมการ (1) และ (2) เราได้ $\overline{\langle T_\lambda(x), x \rangle} - \langle T_\lambda(x), x \rangle = (\lambda - \overline{\lambda}) \langle x, x \rangle$ จากนั้นและ

จากที่ $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ เราได้ $-2i\text{Im} \langle T_\lambda(x), x \rangle = 2i\beta \|x\|^2$ โดยที่ $\text{Im} \langle T_\lambda(x), x \rangle$ คือ

ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ $\langle T_\lambda(x), x \rangle$ แล้วได้ $-\text{Im} \langle T_\lambda(x), x \rangle = \beta \|x\|^2$

เนื่องจาก $|\text{Im} \langle T_\lambda(x), x \rangle| = |\text{Im} \langle T_\lambda(x), x \rangle| \leq |\langle T_\lambda(x), x \rangle|$ และโดยอสมการของ
ชวาร์ซ (Schwarz's inequality) เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
 (3) \quad |\beta| \cdot \|x\|^2 &= |\text{Im} \langle T_\lambda(x), x \rangle| \\
 &\leq |\langle T_\lambda(x), x \rangle| \\
 &\leq \|T_\lambda(x)\| \cdot \|x\| \quad \text{ทุก } x \neq 0 \text{ ใน } H
 \end{aligned}$$

จาก $x \neq 0$ เราได้ $\|x\| > 0$ ดังนั้นจากอสมการ (3) ได้ว่า $|\beta| \cdot \|x\| \leq \|T_\lambda(x)\|$ ทุก $x \neq 0$

ใน H ต่อไปจะแสดงว่า $\beta = 0$ โดยสมมติว่า $\beta \neq 0$ ดังนั้น $|\beta| > 0$ และโดยทฤษฎีบท 3.4

เราได้ว่า $\lambda \in \rho(T)$ แต่จากข้อกำหนดให้ $\lambda \in \sigma(T) = C - \rho(T)$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง สรุปได้ว่า

$\beta = 0$ ซึ่งเป็นผลให้ $\lambda = \alpha + i\beta = \alpha \in \mathbb{R}$ นั่นคือ $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. $\square$

ทฤษฎีบท 3.6 : ถ้า $T \in B(H)$ โดยที่ T เป็นเซล์ฟแอดจอยท์โอเปอเรเตอร์บน H แล้ว

$\sigma(T) \subseteq [m, M]$ โดยที่ $m = \inf_{\|x\|=1} \langle T(x), x \rangle$ และ $M = \sup_{\|x\|=1} \langle T(x), x \rangle$.

พิสูจน์ : โดยทฤษฎีบท 3.5 เรามี $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ พิจารณา $\lambda = M + c$ โดยที่ $\lambda \in \mathbb{R}$ และ $c > 0$

และพิจารณา $x \neq 0$ ใน H ให้ $v = \frac{x}{\|x\|}$ ได้ว่า $v \in H$ และ $\|v\| = 1$ และดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \langle T(x), x \rangle &= \langle T(\|x\| v), \|x\| v \rangle \\
 &= \langle \|x\| T(v), \|x\| v \rangle \\
 &= \|x\| \langle T(v), \|x\| v \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|x\| \cdot \overline{\|x\|} \langle T(v), v \rangle \\
&= \|x\|^2 \langle T(v), v \rangle \quad (\text{เพราะ } \|x\| \in \mathbf{R} \text{ ทำให้ } \overline{\|x\|} = \|x\|) \\
&\leq \|x\|^2 \sup_{\|v\|=1} \langle T(\tilde{v}), \tilde{v} \rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle x, x \rangle M$$

ดังนั้น $-\langle T(x), x \rangle \geq -\langle x, x \rangle M$ และโดยอสมการของชวาร์ซ เรามี

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda(x)\| \cdot \|x\| &\geq -\langle T_\lambda(x), x \rangle \\
&= -\langle (T - \lambda I)(x), x \rangle \\
&= -\langle T(x) - \lambda x, x \rangle \\
&= -\langle T(x), x \rangle + \lambda \langle x, x \rangle \\
&\geq -\langle x, x \rangle M + \lambda \langle x, x \rangle \\
&= (\lambda - M) \|x\|^2 \\
&= c \|x\|^2 \quad \text{โดยที่ } c = \lambda - M > 0
\end{aligned}$$

จาก $x \neq 0$ เราได้ว่า $\|x\| > 0$ และดังนั้น $\|T_\lambda(x)\| \geq c \|x\|$ ทุก ๆ $x \neq 0$ ใน H

โดยทฤษฎีบท 3.4 ได้ว่า $\lambda \in p(T)$

ต่อไปพิจารณา $\lambda = m - c'$ โดยที่ $\lambda \in \mathbf{R}$ และ $c' > 0$ และพิจารณา $x \neq 0$ ใน H และให้ $v' = \frac{x}{\|x\|}$ ได้ว่า $v' \in H$ และ $\|v'\| = 1$ และดังนั้น

$$\begin{aligned}
\langle T(x), x \rangle &= \langle T(\|x\| v'), \|x\| v' \rangle \\
&= \langle \|x\| T(v'), \|x\| v' \rangle \\
&= \|x\| \cdot \overline{\|x\|} \langle T(v'), v' \rangle \\
&= \|x\|^2 \langle T(v'), v' \rangle \quad (\text{เพราะ } \|x\| \in \mathbf{R} \text{ ทำให้ } \overline{\|x\|} = \|x\|) \\
&\geq \|x\|^2 \inf_{\|\tilde{v}\|=1} \langle T(\tilde{v}), \tilde{v} \rangle \\
&= \langle x, x \rangle m
\end{aligned}$$

โดยอสมการของชวาร์ซเรามี

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda(x)\| \cdot \|x\| &\geq \langle T_\lambda(x), x \rangle \\
&= \langle (T - \lambda I)(x), x \rangle \\
&= \langle T(x) - \lambda x, x \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle T(x), x \rangle - \lambda \langle x, x \rangle \\
&\geq \langle x, x \rangle m - \lambda \langle x, x \rangle \\
&= (m - \lambda) \|x\|^2 \\
&= c' \|x\|^2 \text{ โดยที่ } c' = m - \lambda > 0
\end{aligned}$$

จาก $x \neq 0$ เราได้ว่า $\|x\| > 0$ และดังนั้น $\|T_\lambda(x)\| \geq c' \|x\|$ ทุก ๆ $x \neq 0$ ใน H

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.4 ได้ว่า $\lambda \in \rho(T)$

จากทั้งสองกรณีเราได้ว่า $\sigma(T) \subseteq [m, M]$ โดยที่ $m = \inf_{\|x\|=1} \langle T(x), x \rangle$ และ

$$M = \sup_{\|x\|=1} \langle T(x), x \rangle. \quad \square$$

ทฤษฎีบท 3.7 ถ้า $T \in B(H)$ โดยที่ T เป็นเซล์ฟแอดจอยท์โอเปอเรเตอร์บน H แล้ว

$$\|T\| = \max \{ |m|, |M| \} = \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x \rangle| \text{ โดยที่ } m = \inf_{\|x\|=1} \langle T(x), x \rangle \text{ และ}$$

$$M = \sup_{\|x\|=1} \langle T(x), x \rangle.$$

พิสูจน์ : จากอสมการของชวาร์ซที่ว่า $|\langle T(x), x \rangle| \leq \|T(x)\| \cdot \|x\|$ ทุก ๆ $x \in H$ เราได้ว่า

$$\sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x \rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \cdot \|x\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \|T\| \text{ ดังนั้นถ้าให้}$$

$$K = \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x \rangle| \text{ แล้วเราได้ว่า } K \leq \|T\| \text{ ต่อไปจะแสดงว่า } \|T\| \leq K: \text{ พิจารณากรณีที่}$$

$$T(x) = 0 \text{ ทุก ๆ } x \in H \text{ ซึ่ง } \|x\| = 1 \text{ เราได้ว่า } \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|0\|$$

$$= 0 = \sup_{\|x\|=1} |\langle 0, x \rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x \rangle| = K$$

ดังนั้นโดยนิยามของนอร์มได้ว่า $T = \overline{0}$ นั่นคือ $0 = \|T\| = K$

ต่อไปพิจารณากรณีที่ $T(x) \neq 0$ ทุก ๆ $x \in H$ ซึ่ง $\|x\| = 1$

$$\text{ให้ } v = \|T(x)\|^{1/2} x, \text{ และ } w = \frac{T(x)}{\|T(x)\|^{1/2}} \text{ จะได้ว่า } v, w \in H$$

$$\text{และ } \|v\|^2 = \langle \|T(x)\|^{1/2} x, \|T(x)\|^{1/2} x \rangle$$

$$= \|T(x)\|^{1/2} \langle x, \|T(x)\|^{1/2} x \rangle$$

$$= \|T(x)\|^{1/2} \|T(x)\|^{1/2} \langle x, x \rangle$$

$$= \|T(x)\| \cdot \|x\|^2$$

$$= \|T(x)\| \cdot 1$$

$$= \|T(x)\|$$

$$\begin{aligned} \text{และ } \|w\|^2 &= \left\langle \frac{T(x)}{\|T(x)\|^{1/2}}, \frac{T(x)}{\|T(x)\|^{1/2}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|T(x)\|^{1/2}} \left\langle T(x), \frac{T(x)}{\|T(x)\|^{1/2}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|T(x)\|^{1/2} \|T(x)\|^{1/2}} \langle T(x), T(x) \rangle \\ &= \frac{\|T(x)\|^2}{\|T(x)\|} \\ &= \|T(x)\| \end{aligned}$$

ดังนั้น $\|v\|^2 = \|w\|^2 = \|T(x)\|$ ทุก ๆ $x \in H$ ซึ่ง $\|x\| = 1$ ต่อไป ให้ $y_1 = v + w$ และ $y_2 = v - w$ ดังนั้น $y_1 \neq 0$ และ $y_2 \neq 0$ และได้ว่า $\langle T(y_1), y_1 \rangle - \langle T(y_2), y_2 \rangle = \langle T(v+w), v+w \rangle -$

$$\begin{aligned} \langle T(v-w), v-w \rangle &= \langle T(v), v+w \rangle + \langle T(w), v+w \rangle - \langle T(v), v-w \rangle + \langle T(w), v-w \rangle \\ &= \langle T(v), v \rangle + \langle T(v), w \rangle + \langle T(w), v \rangle + \langle T(w), w \rangle - \langle T(v), v \rangle + \\ &\quad \langle T(v), w \rangle + \langle T(w), v \rangle - \langle T(w), w \rangle \\ &= 2 [\langle T(v), w \rangle + \langle T(w), v \rangle] \end{aligned}$$

เนื่องจาก T เป็นเซล์ที่แอ็ดจอยท์โอเปอเรเตอร์บน H จึงได้ว่า $\langle T(w), v \rangle = \langle w, T(v) \rangle$

ทุก $v, w \in H$ เป็นผลให้ $\langle T(y_1), y_1 \rangle - \langle T(y_2), y_2 \rangle = 2 [\langle T(v), w \rangle + \langle w, T(v) \rangle]$

จากนิยามของ v เราได้ว่า $T(v) = T(\|T(x)\|^{1/2} x) = \|T(x)\|^{1/2} T(x)$ และจากนิยามของ w

เราได้ว่า $\langle T(y_1), y_1 \rangle - \langle T(y_2), y_2 \rangle =$

$$\begin{aligned} &2 \left[\left\langle \|T(x)\|^{1/2} T(x), \frac{T(x)}{\|T(x)\|^{1/2}} \right\rangle + \left\langle \frac{T(x)}{\|T(x)\|^{1/2}}, \|T(x)\|^{1/2} T(x) \right\rangle \right] \\ &= 2 \left[\frac{\|T(x)\|^{1/2}}{\|T(x)\|^{1/2}} \langle T(x), T(x) \rangle + \frac{\|T(x)\|^{1/2}}{\|T(x)\|^{1/2}} \langle T(x), T(x) \rangle \right] \\ &= 2 [\|T(x)\|^2 + \|T(x)\|^2] \end{aligned}$$

$$= 4 \|T(x)\|^2$$

นั่นคือ $|\langle T(y_1), y_1 \rangle - \langle T(y_2), y_2 \rangle| = 4 \|T(x)\|^2 = 4 \|T(x)\|^2$ ทุก ๆ $x \in H$ ซึ่ง $\|x\| = 1$

ดังนั้นสำหรับ $y \neq 0$ และ $x = \frac{y}{\|y\|} \neq 0$ ใน H เราได้ว่า $\|x\| = 1$ และ $y = \|y\| x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} |\langle T(y), y \rangle| &= |\langle T(\|y\| x), \|y\| x \rangle| \\ &= |\langle \|y\| T(x), \|y\| x \rangle| \\ &= \|y\| \cdot \overline{\|y\|} |\langle T(x), x \rangle| \\ &= \|y\|^2 |\langle T(x), x \rangle| \\ &= \|y\|^2 |\langle T(x), x \rangle| \\ &\leq \|y\|^2 \sup_{\|\tilde{x}\|=1} |\langle T(\tilde{x}), \tilde{x} \rangle| \\ &= \|y\|^2 K \text{ ทุก ๆ } y \neq 0 \text{ ใน } H \end{aligned}$$

จาก $y_1 \neq 0$ และ $y_2 \neq 0$ และโดยอสมการสามเหลี่ยม (triangle inequality) เราได้ว่า

$$\begin{aligned} |\langle T(y_1), y_1 \rangle - \langle T(y_2), y_2 \rangle| &\leq |\langle T(y_1), y_1 \rangle| + |\langle T(y_2), y_2 \rangle| \\ &\leq \|y_1\|^2 K + \|y_2\|^2 K \\ &= (\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2) K \\ &= [\langle v+w, v+w \rangle + \langle v-w, v-w \rangle] K \\ &= [\langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle + \langle v, v \rangle - \\ &\quad \langle w, v \rangle - \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle] K \\ &= 2 [\langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle] K \\ &= 2 [\|v\|^2 + \|w\|^2] K \\ &= 2 [\|T(x)\| + \|T(x)\|] K \\ &= 4 \|T(x)\| K \end{aligned}$$

เป็นผลให้ $4 \|T(x)\|^2 \leq 4 \|T(x)\| K$ ดังนั้น $\|T(x)\|^2 \leq \|T(x)\| K$ จาก $T(x) \neq 0$ เราได้ว่า

$\|T(x)\| > 0$ ดังนั้น $\|T(x)\| \leq K$ ทุก ๆ $x \in H$ ซึ่ง $\|x\| = 1$ เป็นผลให้ $\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \|T\| \leq K$

จากทั้งสองกรณีเราได้ว่า $\|T\| \leq K$ จึงสรุปได้ว่า $\|T\| = K = \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x \rangle| = \max\{|m|, |M|\}$

โดยที่ $m = \inf_{\|x\|=1} \langle T(x), x \rangle$ และ $M = \sup_{\|x\|=1} \langle T(x), x \rangle$ $\square$

ต่อไปเราจะใช้ทฤษฎีบท 3.4 และทฤษฎีบท 3.7 มาช่วยในการพิสูจน์เกณฑ์สำคัญสำหรับการเป็นค่าสเปกตรัมของเซล์ฟแอดจอยท์โอเปอเรเตอร์ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.8 : ถ้า $T \in B(H)$ โดยที่ T เป็นเซล์ฟแอดจอยท์โอเปอเรเตอร์บน H

แล้ว $\lambda \in \sigma(T)$ ก็ต่อเมื่อ มีซีควอนซ์ $\{x_n\}$ ใน H ซึ่ง $\|x_n\| = 1$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ และ

$$\{T(x_n) - \lambda x_n\} \rightarrow 0.$$

พิสูจน์ : $(\Rightarrow)$ ให้ $\lambda \in \sigma(T) = C - \rho(T)$ ดังนั้น $\lambda \notin \rho(T)$ โดยคอนทราโพลิทีฟของ

ทฤษฎีบท 3.4 ได้ว่าไม่มีจำนวนจริง $c > 0$ จำนวนใดที่ $\|T_\lambda(x)\| = \|(T - \lambda I)(x)\| =$

$\|T(x) - \lambda x\| \geq c \|x\|$ ทุก ๆ $x \in H$ ซึ่งบ่งชี้ว่า ไม่มีจำนวนจริง $c > 0$ จำนวนใดที่

$\|T(x) - \lambda x\| \geq c$ ทุก ๆ $x \in H$ ซึ่ง $\|x\| = 1$ แสดงว่า มีซีควอนซ์ $\{x_n\}$ ใน H ซึ่ง

$\|x_n\| = 1$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ และ $\|T(x_n) - \lambda x_n\| \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ ซึ่งบ่งชี้ว่า

$$\{T(x_n) - \lambda x_n\} \rightarrow 0.$$

$(\Leftarrow)$ ให้ $\{x_n\}$ เป็นซีควอนซ์ ใน H ซึ่ง $\|x_n\| = 1$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ และ

$\{T(x_n) - \lambda x_n\} \rightarrow 0$ ซึ่งบ่งชี้ว่า $\|T(x_n) - \lambda x_n\| \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n) - \lambda x_n\| = 0$

สมมติให้ $c > 0$ ซึ่ง $\|T(x_n) - \lambda x_n\| \geq c \|x_n\| = c \cdot 1 = c$ ดังนั้น $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n) - \lambda x_n\| \geq c$

นั่นคือ $0 \geq c > 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ สรุปได้ว่า ไม่มีจำนวนจริง $c > 0$ ซึ่ง $\|T(x_n) - \lambda x_n\| =$

$\|(T - \lambda I)(x_n)\| = \|T_\lambda(x_n)\| \geq c$ ทุก ๆ $x_n \in H$ ซึ่ง $\|x_n\| = 1$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$

แสดงว่าไม่มีจำนวนจริง $c > 0$ จำนวนใดที่ $\|T_\lambda(x)\| \geq c \|x\|$ ทุก ๆ $x \in H$ ดังนั้น

โดยคอนทราโพลิทีฟของทฤษฎีบท 3.4 ได้ว่า $\lambda \notin \rho(T)$ นั่นคือ $\lambda \in \sigma(T) = C - \rho(T)$ $\square$