

บทที่ 2

ทฤษฎีเชิงสเปกตรัมของคอมแพคต์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ (Spectral theorem of compact operators on Banach spaces)

ในบทนี้จะเป็นการศึกษาทฤษฎีเชิงสเปกตรัมของคอมแพคต์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ ซึ่งการพิสูจน์ทฤษฎีดังกล่าวนี้เราต้องการสิ่งต่อไปนี้มาช่วย กล่าวคือ

นิยาม 2.1 : (1) จำนวนเชิงซ้อน λ เป็นค่าปกติ (regular value) ของลิเนียร์โอเปอเรเตอร์ T บนบานาคสเปซ B ก็ต่อเมื่อ โอเปอเรเตอร์ $T_\lambda = T - \lambda I$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง (one - to - one) และ T_λ^{-1} เป็นบาวด์ลีนีโอเปอเรเตอร์บน $T_\lambda(B)$ โดยที่ I เป็นโอเปอเรเตอร์เอกลักษณ์ (identity operator) บน B เราจะเรียกเซตของค่าปกติทั้งหมดของ T ว่ารีซอลเวนต์เซต (resolvent set) ของ T และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\rho(T)$ นอกจากนี้เรื่ยกเซต $\sigma(T) = C - \rho(T)$ ว่าสเปกตรัม (spectrum) ของ T และเรียก $\lambda \in \sigma(T)$ ว่าค่าสเปกตรัม (spectral value) ของ T .

(2) จำนวนเชิงซ้อน λ เป็นค่าไอเก้น (eigenvalue) ของลิเนียร์โอเปอเรเตอร์ T บนบานาคสเปซ B ก็ต่อเมื่อ มีเวกเตอร์ $x \neq 0$ ใน B ชนิดที่ $T(x) = \lambda x$ เราจะเขียนแทนเซตของค่าไอเก้นทั้งหมดของ T ด้วยสัญลักษณ์ $e(T)$ นอกจากนี้เราเรียกเวกเตอร์ $x \neq 0$ ทั้งหมดที่ $T(x) = \lambda x$ ว่าไอเก้นเวกเตอร์ (eigenvectors) สำหรับ λ และเรียกเซตของไอเก้นเวกเตอร์ x ทั้งหมดสำหรับ λ พร้อมด้วย 0 (zero vector) ว่าไอเก้นสเปซ (eigenspace) ของ T สำหรับ λ $\square$

จากนิยาม 2.1 นี้เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $e(T) \subseteq \sigma(T)$ ดังเลมมา 2.2 ต่อไปนี้

เลมมา 2.2 : ถ้า T เป็นลิเนียร์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ B แล้ว $e(T) \subseteq \sigma(T)$.

พิสูจน์ : ให้ $\lambda \in e(T)$ ดังนั้นมีเวกเตอร์ $x \neq 0$ ใน B ชนิดที่ $T(x) = \lambda x$ ดังนั้น $0 = T(x) - \lambda x = (T - \lambda I)(x)$ โดยที่ I เป็นโอเปอเรเตอร์เอกลักษณ์บน B จากนั้นเราได้ว่า $x \in \text{Ker}(T - \lambda I)$ เนื่องจาก $x \neq 0$ จึงได้ว่า $T - \lambda I$ ไม่เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง แสดงว่า $\lambda \notin \rho(T)$ นั่นคือ $\lambda \in \sigma(T) = C - \rho(T)$ จึงได้ว่า $e(T) \subseteq \sigma(T)$ $\square$

เลมมา 2.3 : ถ้า S เป็นพรอพเพอร์สับสเปซปิด (closed proper subspace) ของ
นอร์มลิเนียสเปซ (normed linear space) N แล้ว ทุก ๆ จำนวนจริง $k \in (0, 1)$ จะมี
 $x_0 \in N - S$ ซึ่ง $\|x_0\| = 1$ และ $\|x_0 - y\| \geq k$ ทุก ๆ $y \in S$.

พิสูจน์ : จะแสดงว่ามี $x_0 \in N - S$ ซึ่ง $\|x_0\| = 1$

เนื่องจาก $S \subsetneq N$ จึงได้ว่า มี $v \in N - S$ นั่นคือ $v \in N$ แต่ $v \notin S$ ให้
 $d = \inf_{y \in S} \|v - y\|$ จาก $v \notin S$ เราได้ว่า $v - y \neq 0$ ทุก ๆ $y \in S$ เป็นผลให้ $\|v - y\| > 0$

ทุก ๆ $y \in S$ ดังนั้น $d \geq 0$ ต่อไปจะแสดงว่า $d > 0$ โดยสมมติให้ $d = 0$ ดังนั้นทุก ๆ
 $n \in \mathbb{Z}^+$ จะมี $y_n \in S$ ซึ่ง $0 < \|v - y_n\| < \frac{1}{n}$ ซึ่งบ่งชี้ว่า $\{y_n\}$ เป็นซีควเอนซ์ใน S ที่ $\{y_n\} \rightarrow v$
แต่ S เป็นเซตปิดจึงได้ว่า $v \in S$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง จึงสรุปได้ว่า $d > 0$ ดังนั้นสำหรับ
 $0 < k < 1$ เรามี $\frac{d}{k} > d$ และโดยนิยามของอินฟิมัม (infimum) เราได้ว่า มี $y_0 \in S$
ซึ่ง $0 < d < \|v - y_0\| < \frac{d}{k}$ ต่อไปให้ $x_0 = c(v - y_0)$ เมื่อ $c = \frac{1}{\|v - y_0\|}$ ดังนั้น $c > 0$

และ $x_0 \in N$ โดยที่ $\|x_0\| = \|c(v - y_0)\| = \frac{\|v - y_0\|}{\|v - y_0\|} = 1$ ต่อไปจะแสดงว่า $x_0 \in N - S$

โดยสมมติให้ $x_0 \in S$ ดังนั้น $x_0 \in S$ เนื่องจาก $cy_0 \in S$ จึงได้ว่า $x_0 + cy_0$
 $= c(v - y_0) + cy_0 = cv \in S$ ดังนั้น $c^{-1}(cv) = v \in S$ ซึ่งขัดแย้งกับ $v \notin S$ จึงสรุปได้ว่า
 $x_0 \in N - S$

ต่อไปจะแสดงว่า $\|x_0 - y\| \geq k$ ทุก ๆ $y \in S$

สำหรับ $y \in S$ และ $k \in (0, 1)$ เรามี $\|x_0 - y\| = \|c(v - y_0) - y\| =$
 $\|c(v - y_0 - \frac{y}{c})\| = |c| \cdot \|v - (y_0 + \frac{y}{c})\| = c \|v - (y_0 + \frac{y}{c})\|$ ทั้งนี้เพราะ $c > 0$ จึงได้ว่า
 $|c| = c$ ต่อไปให้ $y_1 = y_0 + \frac{y}{c}$ ดังนั้น $\|x_0 - y\| = c \|v - y_1\|$ ทุก ๆ $y \in S$ จาก
 $y, y_0 \in S$ เราได้ว่า $y_1 = y_0 + \frac{y}{c} \in S$ ดังนั้นโดยนิยามของ d จึงได้ว่า $\|v - y_1\| \geq d$
เป็นผลให้ $\|x_0 - y\| = c \|v - y_1\| \geq cd = \frac{d}{\|v - y_0\|} \geq \frac{d}{\frac{d}{k}} = k$ ทุก ๆ $y \in S$

นั่นคือ $\|x_0 - y\| \geq k$ ทุก ๆ $y \in S$ $\square$

เลมมา 2.4 : ถ้า T เป็นลิเนียโอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ B และ $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ เป็น
เซตจำกัดของค่าไอเกนที่แตกต่างกันของ T แล้ว $\{x_j \neq 0 / T(x_j) = \lambda_j x_j \text{ ทุก ๆ } j = 1, 2, \dots, n\}$
เป็นลิเนียลีนดีเพนเดนทเซต (linearly independent set)

พิสูจน์ : ให้ $\{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}$ เป็นเซตจำกัดของค่าไอเก้นที่แตกต่างกันของ T และให้ $A = \{ x_j \neq 0 / T(x_j) = \lambda_j x_j \text{ ทุก } j = 1, 2, \dots, n \}$ ต่อไปจะแสดงว่า A เป็นลิเนียลอินดีเพนเดนทเซต โดยสมมติว่า A เป็นลิเนียลอินดีเพนเดนทเซต (linearly dependent set) ดังนั้นมีบางเวกเตอร์ใน A ที่สามารถเขียนเป็นลิเนียลคอมบิเนชัน (linear combination) ของเวกเตอร์อื่น ๆ ที่เหลือใน A ได้ โดยการจัดเรียงสมาชิกของ A ใหม่เราให้ x_m เป็นเวกเตอร์แรกใน A ที่สามารถเขียนเป็นลิเนียลคอมบิเนชันของเวกเตอร์ที่มาก่อนหน้ามันได้ กล่าวคือ

$$(1) \quad x_m = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{m-1} x_{m-1} \text{ สำหรับบางชุดของสเกลาร์ (scalars)}$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}.$$

ดังนั้น $\{ x_1, x_2, \dots, x_{m-1} \}$ เป็นลิเนียลอินดีเพนเดนทเซต พิจารณาโอเปอเรเตอร์ $T - \lambda_m I$ โดยที่ I เป็นโอเปอเรเตอร์เอกลักษณ์บน B จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (2) \quad (T - \lambda_m I)(x_m) &= (T - \lambda_m I)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{m-1} x_{m-1}) \\ &= (T - \lambda_m I)(\alpha_1 x_1) + (T - \lambda_m I)(\alpha_2 x_2) + \dots + \\ &\quad (T - \lambda_m I)(\alpha_{m-1} x_{m-1}) \\ &= \alpha_1 (T - \lambda_m I)(x_1) + \alpha_2 (T - \lambda_m I)(x_2) + \dots + \\ &\quad \alpha_{m-1} (T - \lambda_m I)(x_{m-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j (T - \lambda_m I)(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j (\lambda_j x_j - \lambda_m x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_m) x_j \quad \text{ทั้งนี้เพราะ } T(x_j) = \lambda_j x_j \end{aligned}$$

และ $I(x_j) = x_j$ ทุก $j = 1, 2, \dots, m-1$.

เนื่องจาก x_m เป็นไอเก้นเวกเตอร์สำหรับค่าไอเก้น λ_m จึงได้ว่า

$$(3) \quad (T - \lambda_m I)(x_m) = T(x_m) - \lambda_m I(x_m) = \lambda_m x_m - \lambda_m x_m = 0$$

เนื่องจากเวกเตอร์ทางขวาของสมการ (2) อยู่ในลิเนียลอินดีเพนเดนทเซต $\{ x_1, x_2, \dots, x_{m-1} \}$

และจากสมการ (3) จึงได้ว่า $\alpha_j(\lambda_j - \lambda_m) = 0$ ทุก $j = 1, 2, \dots, m-1$ ทั้งนี้เพราะ $x_j \neq 0$ ทุก $j = 1, 2, \dots, m-1$ เนื่องจาก $\lambda_j - \lambda_m \neq 0$ ทุก $j = 1, 2, \dots, m-1$ จึงได้ว่า $\alpha_j = 0$ ทุก $j = 1, 2, \dots, m-1$ จากนั้นและจากสมการ (1) จึงได้ว่า $x_m = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่า $x_m \neq 0$ เป็นไอเกนเวกเตอร์สำหรับ λ_m จึงสรุปได้ว่า A เป็นลิเนียลอินดีเพนเดนทซ์เซต $\square$

บทแทรก 2.5 : ถ้า T เป็นลิเนียลโอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ B และ $\{\lambda_\alpha / \alpha \in K\}$ เป็นเซตอนันต์ของค่าไอเกนของ T ชนิดที่แต่ละคู่แตกต่างกัน แล้ว $\{x_\alpha \neq 0 / T(x_\alpha) = \lambda_\alpha x_\alpha$ ทุก $\alpha \in K\}$ เป็นลิเนียลอินดีเพนเดนทซ์เซต.

พิสูจน์ : ให้ $A = \{x_\alpha \neq 0 / T(x_\alpha) = \lambda_\alpha x_\alpha \text{ ทุก } \alpha \in K\}$

สมมุติว่า A เป็นลิเนียลอินดีเพนเดนทซ์เซต ดังนั้นจะมี $y \in A$ ซึ่ง $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ สำหรับบางชุดของสเกลาร์ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ซึ่งไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และบางชุดของไอเกนเวกเตอร์ $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ ดังนั้น $y - (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = 0$ เป็นสมการที่มีสัมประสิทธิ์ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จึงได้ว่า $\{y, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นลิเนียลอินดีเพนเดนทซ์เซต ซึ่งขัดแย้งกับเลมมา 2.4 จึงสรุปได้ว่า A เป็นลิเนียลอินดีเพนเดนทซ์เซต. $\square$

เลมมา 2.6 : สับสเปซ S ของเมตริกสเปซบริบูรณ์ (completed metric space) M เป็นสับสเปซบริบูรณ์ (completed subspace) ก็ต่อเมื่อ S เป็นเซตปิดใน M .

พิสูจน์ : $(\Rightarrow)$ ให้ S เป็นสับสเปซบริบูรณ์ของ M

และให้ $x \in \overline{S}$ ดังนั้นมีซีควเอนซ์ $\{x_n\}$ ใน S ที่ $\{x_n\} \rightarrow x$ จาก $\{x_n\}$ เป็นคอนเวอร์เจนต์ซีควเอนซ์ใน S เราได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นคอกซีซีควเอนซ์ (Cauchy sequence) ใน S แต่ S เป็นสับสเปซบริบูรณ์ของ M จึงได้ว่า มี $x_0 \in S$ ที่ $\{x_n\} \rightarrow x_0$ เนื่องจากคอนเวอร์เจนต์ซีควเอนซ์มีจุดลิมิต (limit point) เพียงจุดเดียว จึงได้ว่า $x_0 = x$ ดังนั้น $x \in S$ แสดงว่า $\overline{S} \subseteq S$ จึงสรุปได้ว่า S เป็นเซตปิดใน M .

$(\Leftarrow)$ ให้ S เป็นเซตปิดใน M และให้ $\{x_n\}$ เป็นคอกซีซีควเอนซ์ใน S เนื่องจาก S เป็นสับสเปซของ M จึงได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นคอกซีซีควเอนซ์ใน M จาก M เป็นสเปซบริบูรณ์ เราได้ว่า มี $x_0 \in M$ ที่ $\{x_n\} \rightarrow x_0$ นั่นคือ $\{x_n\}$ เป็นซีควเอนซ์ใน S ที่ $\{x_n\} \rightarrow x_0$ ซึ่งบ่งชี้ว่า $x_0 \in \overline{S}$ แต่ S เป็นเซตปิด จึงได้ว่า $\overline{S} = S$ เป็นผลให้ $x_0 \in S$ นั่นคือคอกซีซีควเอนซ์ $\{x_n\}$ ใน S คอนเวอร์จ ใน S จึงสรุปได้ว่า S เป็นเซตบริบูรณ์. $\square$

เลมมา 2.7 : ถ้า $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ เป็นลีนีอิดีเพนเดนทซ์เชิงเส้นของเวกเตอร์ในนอร์ม-
 ลีนีอิดีเพนเดนทซ์ N แล้วจะมีจำนวนจริง $c > 0$ ซึ่ง $\left\| \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \right\| \geq c \left(\sum_{i=1}^k |\alpha_i| \right)$ ทุก ๆ ชุดของ
 สเกลาร์ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

พิสูจน์ : ให้ $\alpha = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|$

กรณี $\alpha = 0$ เราได้ว่า $\alpha_i = 0$ ทุก ๆ $i = 1, 2, \dots, k$ ดังนั้น $\left\| \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \right\| = c\alpha = c \left(\sum_{i=1}^k |\alpha_i| \right)$

ทุก ๆ จำนวนจริง $c > 0$.

กรณี $\alpha \neq 0$ เรามี $\alpha > 0$ ดังนั้นสมการ $\left\| \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \right\| \geq c \left(\sum_{i=1}^k |\alpha_i| \right)$ เขียนได้เป็น

$$(1) \quad \left\| \sum_{i=1}^k \beta_i x_i \right\| \geq c \quad \text{เมื่อ} \quad \beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha} \quad \text{และ} \quad \sum_{i=1}^k |\beta_i| = 1$$

ฉะนั้นเป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า มีจำนวนจริง $c > 0$ ที่สมการ (1) เป็นจริง ทุก ๆ

ชุดของสเกลาร์ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ ซึ่ง $\sum_{i=1}^k |\beta_i| = 1$

พิจารณา $\sum_{i=1}^k |\beta_i| = 1$ เราได้ว่า $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน แต่

$\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ เป็นลีนีอิดีเพนเดนทซ์เชิงเส้น จึงได้ว่า $\sum_{i=1}^k \beta_i x_i \neq 0$ ดังนั้น $\left\| \sum_{i=1}^k \beta_i x_i \right\| > 0$

ซึ่งแสดงว่ามีจำนวนจริง $c > 0$ ซึ่ง $\left\| \sum_{i=1}^k \beta_i x_i \right\| \geq c > 0$. $\square$

เลมมา 2.8 : ถ้า S เป็นสับสเปซที่มีมิติจำกัด (finite dimensional subspace) ของ
 นอร์มลีนีอิดีเพนเดนทซ์ N แล้ว S เป็นสับสเปซบริบูรณ์ของ N .

พิสูจน์ : ให้ $\dim(S) = k$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{Z}^+$ และให้ $\{x_n\}$ เป็นค่อซีซีควเอนซ์ใน S
 จะแสดงว่ามี $x_0 \in S$ ซึ่ง $\{x_n\} \rightarrow x_0$: ให้ $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ เป็นฐาน (basis) สำหรับ S
 ดังนั้น $x_n = \alpha_1^{(n)} e_1 + \alpha_2^{(n)} e_2 + \dots + \alpha_k^{(n)} e_k$ โดยที่สเกลาร์ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_k^{(n)}$
 มีเพียงชุดเดียวเท่านั้น จาก $\{x_n\}$ เป็นค่อซีซีควเอนซ์ เราได้ว่า ทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$

จะมีจำนวนเต็มบวก M ซึ่งถ้า $n, m > M$ แล้ว $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$

จาก $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ เป็นฐานสำหรับ S เรามี $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$

เป็นลีนีอิดีเพนเดนทซ์เชิงเส้น ดังนั้นโดยเลมมา 2.7 เราได้ว่า มีจำนวนจริง $c > 0$

$$\begin{aligned}
\text{ซึ่ง } \varepsilon &> \|x_n - x_m\| \\
&= \|(\alpha_1^{(n)} e_1 + \alpha_2^{(n)} e_2 + \dots + \alpha_k^{(n)} e_k) - (\alpha_1^{(m)} e_1 + \alpha_2^{(m)} e_2 + \dots + \alpha_k^{(m)} e_k)\| \\
&= \|(\alpha_1^{(n)} - \alpha_1^{(m)}) e_1 + (\alpha_2^{(n)} - \alpha_2^{(m)}) e_2 + \dots + (\alpha_k^{(n)} - \alpha_k^{(m)}) e_k\| \\
&= \left\| \sum_{j=1}^k (\alpha_j^{(n)} - \alpha_j^{(m)}) e_j \right\| \\
&= c \left(\sum_{j=1}^k |\alpha_j^{(n)} - \alpha_j^{(m)}| \right) \text{ ทุก ๆ ชุดของสเกลาร์ } \alpha_j^{(n)} - \alpha_j^{(m)} \text{ เมื่อ}
\end{aligned}$$

$j = 1, 2, \dots, k$ และ $n, m > M$.

จาก $c > 0$ เราได้ว่า $|\alpha_j^{(n)} - \alpha_j^{(m)}| \leq \sum_{j=1}^k |\alpha_j^{(n)} - \alpha_j^{(m)}| < \frac{\varepsilon}{c}$ ทุก ๆ $j = 1, 2, \dots, k$

และ $n, m > M$. ซึ่งบ่งชี้ว่าแต่ละซีควেনซ์ $\{\alpha_j^{(n)}\}$ เป็นคอซีซีควেনซ์ใน $\mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$ ทุก ๆ

$j = 1, 2, \dots, k$ ดังนั้น $\{\alpha_j^{(n)}\}$ เป็นคอนเวอร์เจนต์ซีควেনซ์ทุก ๆ $j = 1, 2, \dots, k$ และให้

$\{\alpha_j^{(n)}\} \rightarrow \alpha_j$ ทุก ๆ $j = 1, 2, \dots, k$ พิจารณา $x_0 = \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j$ จะได้ว่า $x_0 \in S$ และ

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_0\| &= \left\| \sum_{j=1}^k \alpha_j^{(n)} e_j - \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \right\| \\
&= \left\| \sum_{j=1}^k (\alpha_j^{(n)} - \alpha_j) e_j \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^k \|(\alpha_j^{(n)} - \alpha_j) e_j\| \quad (\text{นิยามของนอร์ม}) \\
&= \sum_{j=1}^k |\alpha_j^{(n)} - \alpha_j| \cdot \|e_j\| \quad (\text{นิยามของนอร์ม})
\end{aligned}$$

จาก $\{\alpha_j^{(n)}\} \rightarrow \alpha_j$ ทุก ๆ $j = 1, 2, \dots, k$ เราได้ว่า $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$

เมื่อ $n \rightarrow \infty$ นั่นคือ $\{x_n\} \rightarrow x_0$ แสดงว่า $\{x_n\}$ คอนเวอร์จใน S จึงสรุปได้ว่า S เป็นสับสเปซบริบูรณ์ของ N . $\square$

เลมมา 2.9 : ถ้า S เป็นสับสเปซที่มีมิติจำกัดของนอร์มลิเนียสเปซ N แล้ว S เป็นเซตปิด.

พิสูจน์ : ให้ S เป็นสับสเปซที่มีมิติจำกัดของนอร์มลิเนียสเปซ N ดังนั้นโดยเลมมา 2.8

ได้ว่า S เป็นสับสเปซบริบูรณ์ของ N และโดยเลมมา 2.6 จึงได้ว่า S เป็นเซตปิด. $\square$

จากเลมมา 2.2 ถึงเลมมา 2.9 ทำให้เราสามารถพิสูจน์ทฤษฎีเชิงสเปกตรัมของ

คอมแพคท์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.10 : ถ้า T เป็นคอมแพคท์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ B และ k เป็นจำนวน

จริงบวกใด ๆ แล้ว $\{\lambda \in e(T) / |\lambda| \geq k\}$ เป็นเซตจำกัด.

พิสูจน์ : ให้ T เป็นคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ B และให้ $k > 0$ จะแสดงว่า

$\{\lambda \in e(T) / |\lambda| \geq k\}$ เป็นเซตจำกัด :

สมมติว่า $\{\lambda \in e(T) / |\lambda| \geq k\}$ เป็นเซตอนันต์ ดังนั้น มีซีแวนซ์ (λ_n) ใน $e(T)$ ที่แต่ละคู่แตกต่างกัน และ $|\lambda_n| \geq k$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ และดังนั้นมีซีแวนซ์ของโอเพอเรเตอร์ (x_n) ใน B ที่แต่ละคู่แตกต่างกันโดยที่ $T(x_n) = \lambda_n x_n$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ ดังนั้นโดยบทแทรก 2.5 ได้ว่า $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ เป็นลิเนียลอินดีเพนเดนซ์เช็ต ต่อไปให้ $M_n = \text{Span}((x_1, x_2, \dots, x_n))$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ ดังนั้นสำหรับ $x \in M_n$ จะเขียนได้เป็น

$$(1) \quad x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

โดยที่สเกลาร์ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ มีเพียงชุดเดียวเท่านั้น และจากสมการ (1) นี้เราได้ว่า

$$\begin{aligned} (T - \lambda_n I)(x) &= T(x) - \lambda_n I(x) \quad (\text{โดยที่ } I \text{ เป็นโอเปอเรเตอร์เอกลักษณ์บน } B) \\ &= T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) - \lambda_n I(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \\ &= \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) + \dots + \alpha_n T(x_n) - \lambda_n (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \\ &= \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_n) x_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_n) x_2 + \dots + \alpha_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) x_{n-1} + 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ

(2) $(T - \lambda_n I)(x) \in M_{n-1} = \text{Span}((x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))$ ทุก ๆ $x \in M_n$ เนื่องจาก M_{n-1} เป็นสับสเปซที่มีมิติจำกัดของ M_n โดยเลมมา 2.9 จึงได้ว่า M_{n-1} เป็นสับสเปซปิดของ M_n ซึ่งขณะนี้เรามี M_{n-1} เป็นพหุคูณสับสเปซปิดของ M_n ดังนั้นโดยเลมมา 2.3 ได้ว่า มีซีแวนซ์ (y_n) ใน $M_n - M_{n-1}$ โดยที่ $\|y_n\| = 1$ และ $\|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}$ ทุก ๆ $x \in M_{n-1}$ นั่นคือ (y_n) เป็นบาวด์ซีแวนซ์ใน B ต่อไปจะแสดงว่าซีแวนซ์ $(T(y_n))$ ใน $T(B)$ ไม่มีคอนเวอร์เจนต์สับซีแวนซ์ : พิจารณาสมการต่อไปนี้

(3) $T(y_n) - T(y_m) = \lambda_n y_n - \overline{x}$ โดยที่ $\overline{x} = \lambda_n y_n - T(y_n) + T(y_m)$ ต่อไปจะแสดงว่า $\overline{x} \in M_{n-1}$: ให้ $m < n$ ดังนั้น $m \leq n-1$ และได้ว่า $y_m \in M_m \subseteq M_{n-1} = \text{Span}((x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))$ ดังนั้น $T(y_m) = \lambda_m y_m \in M_{n-1}$ เนื่องจาก $y_n \in M_n - M_{n-1}$ โดยสมการ (2) ได้ว่า $(T - \lambda_n I)(y_n) \in M_{n-1}$ แต่ M_{n-1} เป็นสับสเปซของ M_n จึงได้ว่า $-(T - \lambda_n I)(y_n) = -T(y_n) + \lambda_n y_n \in M_{n-1}$ ซึ่งเป็นผลให้ $\overline{x} \in M_{n-1}$ ต่อไปพิจารณา $x = (\lambda_n^{-1}) \overline{x} \in M_{n-1}$ เราได้ว่า $\lambda_n x = \overline{x}$ และดังนั้น $\|\lambda_n y_n - \overline{x}\| = \|\lambda_n y_n - \lambda_n x\| = |\lambda_n| \|y_n - x\| \geq \frac{1}{2} |\lambda_n| \geq \frac{k}{2}$ ทั้งนี้เพราะ $|\lambda_n| \geq k$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ จากนี้และจาก

สมการ (3) เราได้ว่า $\|T(y_n) - T(y_m)\| \geq \frac{k}{2}$ เมื่อ $m < n$ แสดงว่าซีควেনซ์ $\{T(y_n)\}$ ใน $T(B)$ ไม่มีคอนเวอร์เจนซ์ซีควেনซ์ ทั้งนี้เพราะ $k > 0$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 1.4 เพราะ T เป็น คอมแพคท์โอเปอเรเตอร์บน B และ $\{y_n\}$ เป็นบาวด์ซีควেনซ์ใน B . จึงสรุปได้ว่า $\{\lambda \in e(T) \mid |\lambda| \geq k\}$ เป็นเซตจำกัด. $\square$

นอกจากทฤษฎีเชิงสเปกตรัมของคอมแพคท์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซที่ได้พิสูจน์มาแล้วข้างต้นนี้ ยังมีทฤษฎีเชิงสเปกตรัมของคอมแพคท์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซที่สำคัญอีกหลายทฤษฎี ซึ่งการพิสูจน์ทฤษฎีเหล่านั้น เราต้องการเริ่มมาต่อไปนี้

เลมมา 2.11 : ถ้า B เป็นบานาคสเปซที่มีสับเซตปิด $M = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$ เป็นคอมแพคท์สับเซตแล้ว $\dim(B) < \infty$.

พิสูจน์ : ให้ $M = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$ เป็นคอมแพคท์สับเซตปิด (closed compact subset) ของบานาคสเปซ B สมมติว่า $\dim(B) = \infty$. ให้ $x_1 \in M$ ซึ่ง $\|x_1\| = 1$ ดังนั้น $B_1 = \text{Span}(\{x_1\})$ เป็นสับสเปซของ B ซึ่ง $\dim(B_1) = 1$ ดังนั้นโดยเลมมา 2.9 ได้ว่า B_1 เป็นสับสเปซปิดของ B แต่ $\dim(B) = \infty$ จึงได้ว่า B_1 เป็นพรอพเพอร์สับสเปซปิดของ B ดังนั้นโดยเลมมา 2.3 ได้ว่า มี $x_2 \in B - B_1$ ซึ่ง $\|x_2\| = 1$ และ $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2} \in (0,1)$ ทุก ๆ $x \in B_1$ ดังนั้น $B_2 = \text{Span}(\{x_1, x_2\})$ เป็นสับสเปซของ B ซึ่ง $\dim(B_2) = 2$ และโดยเลมมา 2.9 ได้ว่า B_2 เป็นสับสเปซปิดของ B แต่ $\dim(B) = \infty$ จึงได้ว่า B_2 เป็นพรอพเพอร์สับสเปซปิดของ B ดังนั้นโดยเลมมา 2.3 ได้ว่า มี $x_3 \in B - B_2$ ซึ่ง $\|x_3\| = 1$ และ $\|x_3 - x\| \geq \frac{1}{2} \in (0,1)$ ทุก ๆ $x \in B_2$ แต่ $x_1, x_2 \in B_2$ จึงได้ว่า $\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$ และ $\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$ เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จึงได้ว่า มีซีควেনซ์ $\{x_n\}$ ใน M ชนิดที่ $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ ทุก ๆ $m \neq n$ ซึ่งเป็นซีควেনซ์ที่ไม่มีคอนเวอร์เจนซ์ซีควেনซ์ จึงขัดแย้งกับที่ว่า M เป็นคอมแพคท์สับเซตของ B สรุปได้ว่า $\dim(B) < \infty$. $\square$

ทฤษฎีบท 2.12 : ถ้า T เป็นคอมแพคท์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ B และ $\lambda \neq 0$ แล้วสับสเปซ $\text{Ker}(T_\lambda)$ ของ B จะมีมิติจำกัด เมื่อ $T_\lambda = T - \lambda I$ โดยที่ I เป็นโอเปอเรเตอร์เอกลักษณ์บน B .

พิสูจน์ : ให้ T เป็นคอมแพคท์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ B และ $\lambda \neq 0$ จะแสดงว่า $\dim(\text{Ker}(T_\lambda)) < \infty$ เมื่อ $T_\lambda = T - \lambda I$ พิจารณาสับเซตปิด $M = \{x \in \text{Ker}(T_\lambda) \mid \|x\| = 1\}$ ของ $\text{Ker}(T_\lambda)$ ให้ $\{x_n\}$ เป็นซีควেনซ์ใด ๆ ใน M ดังนั้น $\|x_n\| = 1$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ จึงได้ว่า

$\{x_n\}$ เป็นบาวด์ซีควเอนซ์ใน M เนื่องจาก T เป็นคอมแพคต์โอเปอเรเตอร์บน B โดยทฤษฎีบท 1.4
ได้ว่า ซีควเอนซ์ $\{T(x_n)\}$ ใน $T(B)$ มีคอนเวอร์เจนต์ซีควเอนซ์ และให้ $\{T(x_{n_m})\}$

เป็นคอนเวอร์เจนต์ซีควเอนซ์ของ $\{T(x_n)\}$ ใน $T(B)$ เนื่องจาก $M \subseteq \text{Ker}(T_\lambda)$ จึงได้ว่า

ทุก ๆ $x_n \in M$ เรามี $T_\lambda(x_n) = (T - \lambda I)(x_n) = T(x_n) - \lambda x_n = 0$ นั่นคือ $T(x_n) = \lambda x_n$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$

แต่ $\lambda \neq 0$ จึงได้ว่า $x_n = \frac{T(x_n)}{\lambda}$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ ดังนั้น $\{x_{n_m}\} = \left\{ \frac{T(x_{n_m})}{\lambda} \right\}$

เป็นคอนเวอร์เจนต์ซีควเอนซ์ของ $\{x_n\}$ ใน M แต่ M เป็นเซตปิด จึงได้ว่าซีควเอนซ์ $\{x_{n_m}\}$

คอนเวอร์จใน M ดังนั้น M เป็นคอมแพคต์สับเซตของ $\text{Ker}(T_\lambda)$ และโดยเลมมา 2.11

เราได้ว่า $\dim(\text{Ker}(T_\lambda)) < \infty$. $\square$

ทฤษฎีบท 2.13 : ถ้า T เป็นคอมแพคต์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ B , $\lambda \neq 0$ และ

$T_\lambda = T - \lambda I$ โดยที่ I เป็นโอเปอเรเตอร์เอกลักษณ์บน B และ $T_\lambda^0 = I$ แล้ว

$$(1) \dim(\text{Ker}(T_\lambda^n)) < \infty \text{ ทุก ๆ } n \in \mathbb{Z}^+$$

$$(2) \{0\} = \text{Ker}(T_\lambda^0) \subseteq \text{Ker}(T_\lambda) \subseteq \text{Ker}(T_\lambda^2) \subseteq \dots$$

พิสูจน์ : (1) โดยทฤษฎีบททวินาม (binomial theorem) เรามี

$$\begin{aligned} T_\lambda^n &= (T - \lambda I)^n \\ &= (T + (-\lambda I))^n \\ &= T^n + \binom{n}{1} T^{n-1} (-\lambda I) + \binom{n}{2} T^{n-2} (-\lambda I)^2 + \dots + \binom{n}{k-1} T^{n-k+1} (-\lambda I)^{k-1} + \dots + \\ &\quad (-\lambda I)^n \text{ เมื่อ } \binom{n}{k-1} T^{n-k+1} (-\lambda I)^{k-1} \text{ เป็นเทอมที่ } k \\ &= T^n + n T^{n-1} (-\lambda I) + \frac{n(n-1)}{2!} T^{n-2} (-\lambda I)^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{(k-1)!} T^{n-k+1} (-\lambda I)^{k-1} \\ &\quad + \dots + (-\lambda I)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T^k (-\lambda I)^{n-k} \\ &= ((-\lambda I) + T)^n \\ &= (-\lambda I)^n + T \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} T^{k-1} (-\lambda I)^{n-k} \\ &= (-\lambda I)^n + T \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} T^{k-1} (-\lambda I)^{n-k} \end{aligned}$$

$= W - \mu I$ โดยที่ $\mu = -(-\lambda)^n \neq 0$ (เพราะ $\lambda \neq 0$), $W = TS = ST$ และ $S =$

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} T^{k-1} (-\lambda I)^{n-k} \quad \text{ทุก } n \in \mathbb{Z}^+$$

เนื่องจาก T เป็นคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บน B โดยทฤษฎีบท 1.3 จึงได้ว่า T เป็น
บาวด์ลีเนียโอเปอเรเตอร์บน B เป็นผลให้ S เป็นบาวด์ลีเนียโอเปอเรเตอร์บน B ด้วย ดังนั้นโดย
ทฤษฎีบท 1.6 ได้ว่า $TS = ST = W$ เป็นคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บน B และดังนั้นโดย
ทฤษฎีบท 2.12 ได้ว่า $\text{Ker}(T_\lambda^n) = \text{Ker}(W - \mu I)$ มีมิติจำกัดทุก $n \in \mathbb{Z}^+$ นั่นคือ

$$\dim(\text{Ker}(T_\lambda^n)) < \infty \quad \text{ทุก } n \in \mathbb{Z}^+$$

(2) ให้ $x, y \in B$ และ α เป็นสเกลาร์ใด ๆ เรามี

$$\begin{aligned} T_\lambda(x+y) &= (T - \lambda I)(x+y) \\ &= T(x+y) - \lambda I(x+y) \\ &= T(x) + T(y) - \lambda x - \lambda y \\ &= (T - \lambda I)(x) + (T - \lambda I)(y) \\ &= T_\lambda(x) + T_\lambda(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } T_\lambda(\alpha x) &= (T - \lambda I)(\alpha x) \\ &= T(\alpha x) - \lambda I(\alpha x) \\ &= \alpha T(x) - \lambda \alpha x \\ &= \alpha(T(x) - \lambda x) \\ &= \alpha(T - \lambda I)(x) \\ &= \alpha T_\lambda(x). \end{aligned}$$

แสดงว่า $T_\lambda: B \rightarrow B$ เป็นลิเนียโอเปอเรเตอร์บน B ดังนั้น $T_\lambda(0) = 0$ และได้ว่า $0 \in \text{Ker}(T_\lambda)$

นั่นคือ $\{0\} = \text{Ker}(T_\lambda^0) = \text{Ker}(I) \subseteq \text{Ker}(T_\lambda)$ ต่อไปจะแสดงว่า $\text{Ker}(T_\lambda^n) \subseteq \text{Ker}(T_\lambda^{n+1})$

ทุก $n \in \mathbb{Z}^+$ สำหรับ $k \in \mathbb{Z}^+$ และ $x \in \text{Ker}(T_\lambda^k)$ เรามี $T_\lambda^k(x) = 0$ เป็นผลให้

$$T_\lambda^{k+1}(x) = T_\lambda(T_\lambda^k(x)) = T_\lambda(0) = 0 \quad \text{ซึ่งบ่งชี้ว่า } x \in \text{Ker}(T_\lambda^{k+1}) \quad \text{นั่นคือ}$$

$$\text{Ker}(T_\lambda^k) \subseteq \text{Ker}(T_\lambda^{k+1}) \quad \text{แต่ } k \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์}$$

(mathematical induction) เราได้ว่า $\text{Ker}(T_\lambda^n) \subseteq \text{Ker}(T_\lambda^{n+1})$ ทุก $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\text{จึงสรุปได้ว่า } \{0\} = \text{Ker}(T_\lambda^0) \subseteq \text{Ker}(T_\lambda) \subseteq \text{Ker}(T_\lambda^2) \subseteq \dots \quad \square$$

ทฤษฎีบท 2.1.4 : ถ้า T เป็นคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ B , $\lambda \neq 0$ และ

$T_\lambda = T - \lambda I$ โดยที่ I เป็นโอเปอเรเตอร์เอกลักษณ์บน B แล้วเรนจ์ (range) ของ T_λ

ซึ่งเขียนแทนด้วย $\text{mg}(T_\lambda) = T_\lambda(B)$ จะเป็นเซตปิด.

พิสูจน์ : สมมติว่า $\text{mg}(T_\lambda) = T_\lambda(B)$ ไม่เป็นเซตปิด ดังนั้น $T_\lambda(B) \subsetneq \overline{T_\lambda(B)}$ จึงได้ว่า

$\overline{T_\lambda(B)} - T_\lambda(B) \neq \emptyset$ และให้ $y \in \overline{T_\lambda(B)} - T_\lambda(B)$ นั่นคือ $y \in \overline{T_\lambda(B)}$ แต่ $y \notin T_\lambda(B)$

จาก $y \in \overline{T_\lambda(B)}$ เราได้ว่า มีซีควেনซ์ $\{x_n\}$ ใน B ชนิดที่ $\{T_\lambda(x_n)\} = \{y_n\} \rightarrow y$

เนื่องจาก $T_\lambda(B)$ เป็นลิเนียสเปซ จึงได้ว่า $0 \in T_\lambda(B)$ และจาก $y \notin T_\lambda(B)$ เราได้ว่า $y \neq 0$

ซึ่งบ่งชี้ว่า $y_n \neq 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ และ $x_n \notin \text{Ker}(T_\lambda)$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ โดยทฤษฎีบท 2.12

เรามี $\text{Ker}(T_\lambda) = \{x \in B / T_\lambda(x) = 0\}$ เป็นสับสเปซของ B ที่มีมิติจำกัด และโดยเลมมา 2.9

ได้ว่า $\text{Ker}(T_\lambda)$ เป็นสับสเปซปิดของ B ดังนั้นระยะทางจาก x_n ไปยัง $\text{Ker}(T_\lambda)$

คือ $\delta_n = \inf_{z \in \text{Ker}(T_\lambda)} \|x_n - z\| > 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ เป็นผลให้ $\delta_n = \inf_{z \in \text{Ker}(T_\lambda)} \|x_n - z\| < 2\delta_n$

ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ ดังนั้นโดยนิยามของอินฟิมัมเราได้ว่า มีซีควเอนซ์ $\{z_n\}$ ใน $\text{Ker}(T_\lambda)$

ชนิดที่ $a_n = \|x_n - z_n\| < 2\delta_n$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ ต่อไปจะแสดงว่า $a_n \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$:

สมมติว่า $a_n = \|x_n - z_n\| < \infty$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ ดังนั้น $\{x_n - z_n\}$ เป็นบาวด์ซีควเอนซ์ใน B

เนื่องจาก T เป็นคอมแพคต์โอเปอเรเตอร์บน B โดยทฤษฎีบท 1.4 ได้ว่าซีควเอนซ์ $\{T(x_n - z_n)\}$

ใน $T(B)$ มีคอนเวอร์เจนต์สับซีควเอนซ์ จาก $T_\lambda = T - \lambda I$ และ $z_n \in \text{Ker}(T_\lambda)$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$

โดยที่ $\lambda \neq 0$ เราได้ว่า $I = \frac{T - T_\lambda}{\lambda}$ และ

$$\begin{aligned} x_n - z_n &= I(x_n - z_n) \\ &= \frac{1}{\lambda} (T - T_\lambda)(x_n - z_n) \\ &= \frac{1}{\lambda} [T(x_n - z_n) - T_\lambda(x_n - z_n)] \\ &= \frac{1}{\lambda} [T(x_n - z_n) - T_\lambda(x_n) + T_\lambda(z_n)] \\ &= \frac{1}{\lambda} [T(x_n - z_n) - T_\lambda(x_n) + 0] \text{ ทุก ๆ } n \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\{T(x_n - z_n)\}$ มีคอนเวอร์เจนต์สับซีควเอนซ์ เราได้ว่า $\{x_n - z_n\}$ มีคอนเวอร์เจนต์-

สับซีควเอนซ์ กล่าวคือ $\{x_{n_m} - z_{n_m}\} \rightarrow v$ สำหรับบาง $v \in B$

เนื่องจาก T เป็นคอมแพคต์โอเปอเรเตอร์บน B โดยทฤษฎีบท 1.3 ได้ว่า T เป็นบาวด์ลิเนีย-

โอเปอเรเตอร์บน B ดังนั้นโดยเลมมา 1.5 ได้ว่า T เป็นลิเนียโอเปอเรเตอร์ต่อเนื่องบน B

จาก $T_\lambda = T - \lambda I$ โดยที่ I เป็นลิเนียโอเปอเรเตอร์เอกลักษณ์และต่อเนื่องบน B เราได้ว่า

$T_\lambda : B \rightarrow B$ เป็นลิเนียร์โอเปอเรเตอร์ต่อเนื่องบน B ดังนั้น $\{T_\lambda(x_{n_m} - z_{n_m})\} \rightarrow T_\lambda(v)$

เนื่องจาก $T_\lambda(z_n) = 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ และ $\{T_\lambda(x_n)\} \rightarrow y$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\{T_\lambda(x_{n_m} - z_{n_m})\} &= \{T_\lambda(x_{n_m}) - T_\lambda(z_{n_m})\} \\ &= \{T_\lambda(x_{n_m}) - 0\} \\ &= \{T_\lambda(x_{n_m})\} \rightarrow y\end{aligned}$$

เป็นผลให้ $T_\lambda(v) = y$ นั่นคือ $y \in T_\lambda(B)$ ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่า $y \notin T_\lambda(B)$ สรุปได้ว่า

$$a_n = \|x_n - z_n\| \rightarrow \infty \text{ เมื่อ } n \rightarrow \infty \text{ คือไปให้ } w_n = \frac{1}{a_n}(x_n - z_n) = \frac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|} \text{ ทุก ๆ } n \in \mathbb{Z}^+$$

ดังนั้น $\|w_n\| = \frac{\|x_n - z_n\|}{\|x_n - z_n\|} = 1$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ และได้ว่า $\{w_n\}$ เป็นบาวด์ซีแควนซ์ใน B

เนื่องจาก $T_\lambda(z_n) = 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}T_\lambda(w_n) &= T_\lambda\left[\frac{1}{a_n}(x_n - z_n)\right] \\ &= \frac{1}{a_n} T_\lambda(x_n - z_n) \\ &= \frac{1}{a_n} [T_\lambda(x_n) - T_\lambda(z_n)] \\ &= \frac{1}{a_n} [T_\lambda(x_n) - 0] \\ &= \frac{1}{a_n} T_\lambda(x_n) \quad \text{ทุก ๆ } n \in \mathbb{Z}^+\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\{T_\lambda(x_n)\} \rightarrow y \neq 0$ และ $a_n \rightarrow \infty$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$

จึงได้ว่า $\frac{1}{a_n} T_\lambda(x_n) \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ นั่นคือ $\{T_\lambda(w_n)\} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\text{จาก } I = \frac{T - T_\lambda}{\lambda} \text{ เรามี } w_n &= I(w_n) \\ &= \frac{1}{\lambda} (T - T_\lambda)(w_n) \\ &= \frac{1}{\lambda} [T(w_n) - T_\lambda(w_n)] \quad \text{ทุก ๆ } n \in \mathbb{Z}^+\end{aligned}$$

เนื่องจาก T เป็นคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บน B และ $\{w_n\}$ เป็นบาวด์ซีแควนซ์ใน B โดย-

ทฤษฎีบท 1.4 ได้ว่า ซีแควนซ์ $\{T(w_n)\}$ ใน $T(B)$ มีคอนเวอร์เจนต์สับซีแควนซ์ แสดงว่า $\{w_n\}$

มีคอนเวอร์เจนต์สับซีแควนซ์ด้วย กล่าวคือ $\{w_{n_m}\} \rightarrow w$ สำหรับบาง $w \in B$

เนื่องจาก $T_\lambda : B \rightarrow B$ เป็นลิเนียร์โอเปอเรเตอร์ต่อเนื่องบน B และจาก $\{w_{n_m}\} \rightarrow w$ จึงได้ว่า

$\{T_\lambda(w_{n_m})\} \rightarrow T_\lambda(w)$ เนื่องจาก $\{T_\lambda(w_{n_m})\}$ เป็นสับซีแควนซ์ของ $\{T_\lambda(w_n)\}$ จึงได้ว่า

$(T_\lambda(w)) = 0$ ซึ่งได้ว่า $w \in \text{Ker}(T_\lambda)$ ให้ $u_n = z_n + a_n w$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ ดังนั้น

$$T_\lambda(u_n) = T_\lambda(z_n + a_n w) = T_\lambda(z_n) + T_\lambda(a_n w) = T_\lambda(z_n) + a_n T_\lambda(w) = 0 + a_n \cdot 0 = 0 \text{ แสดงว่า}$$

$u_n \in \text{Ker}(T_\lambda)$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ ดังนั้นโดยนิยามของ δ_n ได้ว่า $\|x_n - u_n\| \geq \delta_n$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$

จาก $a_n = \|x_n - z_n\|$, $w_n = \frac{x_n - z_n}{a_n}$, $u_n = z_n + a_n w$ โดยที่ $\|w_n\| = 1$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} \delta_n &\leq \|x_n - u_n\| \\ &= \|x_n - (z_n + a_n w)\| \\ &= \|(x_n - z_n) - a_n w\| \\ &= \|a_n w_n - a_n w\| \\ &= |a_n| \|w_n - w\| \\ &= a_n \|w_n - w\| \\ &< 2\delta_n \|w_n - w\| \text{ ทุก ๆ } n \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

นั่นคือ $\delta_n < 2\delta_n \|w_n - w\|$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$

เนื่องจาก $\delta_n > 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ จึงได้ว่า $2\delta_n > 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ ดังนั้น $\|w_n - w\| > \frac{1}{2}$

ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ ซึ่งขัดแย้งกับ $\{w_{n_m}\} \rightarrow w$ จึงสรุปได้ว่า $\text{rng}(T_\lambda) = T_\lambda(B)$ เป็นเซตปิด. $\square$

ทฤษฎีบท 2.15 : ถ้า T เป็นคอมแพคต์โอเปอเรเตอร์บนปริภูมิฮิลเบิร์ต B , $\lambda \neq 0$ และ

$$T_\lambda = T - \lambda I \text{ โดยที่ } I \text{ เป็นโอเปอเรเตอร์เอกลักษณ์บน } B \text{ และ } T_\lambda^0 = I \text{ แล้ว } \text{rng}(T_\lambda^n)$$

เป็นเซตปิด ทุก ๆ $n = 0, 1, 2, \dots$ และ $B = T_\lambda^0(B) \supseteq T_\lambda(B) \supseteq T_\lambda^2(B) \supseteq \dots$

พิสูจน์ : (1) จะแสดงว่า $\text{rng}(T_\lambda^n)$ เป็นเซตปิดทุก ๆ $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{กรณีที่ } n = 0 \text{ เรามี } \text{rng}(T_\lambda^n) = \text{rng}(T_\lambda^0) = \text{rng}(I) = I(B) = B$$

เนื่องจาก B เป็นเซตเอกภาพ (universal set) จึงได้ว่า B เป็นเซตปิด

กรณีที่ $n = 1, 2, 3, \dots$ โดยนิยามของ T_λ เรามี

$$\begin{aligned} T_\lambda^n &= (T - \lambda I)^n \\ &= (-\lambda)^n I + T \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} T^{k-1} (-\lambda I)^{n-k} \\ &= W - \mu I \text{ โดยที่ } \mu = (-\lambda)^n \neq 0 \text{ (เพราะ } \lambda \neq 0), W = TS = ST \\ &\text{และ } S = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} T^{k-1} (-\lambda I)^{n-k} \text{ ทุก ๆ } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

และได้พิสูจน์ไว้ในทฤษฎีบท 2.13 แล้วว่า W เป็นคอมแพคต์โอเปอเรเตอร์บน B ดังนั้น

โดยทฤษฎีบท 2.14 ได้ว่า $\text{mg}(T_\lambda^n) = T_\lambda^n(B)$ เป็นเซตปิด ทุก ๆ $n = 1, 2, 3, \dots$ จากทั้งสองกรณีเราได้ว่า $\text{mg}(T_\lambda^n)$ เป็นเซตปิด ทุก ๆ $n = 0, 1, 2, \dots$

(2) จะแสดงว่า $B = T_\lambda^0(B) \supseteq T_\lambda(B) \supseteq T_\lambda^2(B) \supseteq T_\lambda^3(B) \supseteq \dots$ โดยทฤษฎีบท 2.13 เราได้ว่า $T_\lambda: B \rightarrow B$ เป็นลิเนียโอเปอเรเตอร์บน B ดังนั้น $T_\lambda(B) \subseteq B = I(B) = T_\lambda^0(B)$ นั่นคือ $B = T_\lambda^0(B) \subseteq T_\lambda(B)$ พิจารณา $k \in \mathbb{Z}^+$ ซึ่ง $T_\lambda^k(B) \subseteq T_\lambda^{k-1}(B)$ จึงได้ว่า $T_\lambda^{k+1}(B) = T_\lambda^{1+k}(B) = T_\lambda(T_\lambda^k(B)) \subseteq T_\lambda(T_\lambda^{k-1}(B)) = T_\lambda^k(B)$ นั่นคือ $T_\lambda^k(B) \supseteq T_\lambda^{k+1}(B)$ แต่ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราได้ว่า $T_\lambda^{n-1}(B) \supseteq T_\lambda^n(B)$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ จึงสรุปได้ว่า $B = T_\lambda^0(B) \supseteq T_\lambda(B) \supseteq T_\lambda^2(B) \supseteq T_\lambda^3(B) \supseteq \dots$ $\square$

ทฤษฎีบท 2.16 : ถ้า T เป็นคอมแพคท์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ $B, \lambda \neq 0$

และ $T_\lambda = T - \lambda I$ โดยที่ I เป็นโอเปอเรเตอร์เอกลักษณ์บน B และ $T_\lambda^0 = I$

แล้ว จะมีจำนวนเต็มบวก $n = n(\lambda)$ ซึ่ง $\text{Ker}(T_\lambda^n) = \text{Ker}(T_\lambda^{n+1}) = \text{Ker}(T_\lambda^{n+2}) = \dots$

และ $\text{Ker}(T_\lambda^0) \subsetneq \text{Ker}(T_\lambda) \subsetneq \text{Ker}(T_\lambda^2) \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker}(T_\lambda^{n-1}) \subsetneq \text{Ker}(T_\lambda^n)$

พิสูจน์ : จากทฤษฎีบท 2.13 (2) เรามี $\text{Ker}(T_\lambda^n) \subseteq \text{Ker}(T_\lambda^{n+1})$ ทุก ๆ $n = 0, 1, 2, \dots$

สมมุติว่า $\text{Ker}(T_\lambda^n) \neq \text{Ker}(T_\lambda^{n+1})$ ทุก ๆ $n = 0, 1, 2, \dots$ ดังนั้น $\text{Ker}(T_\lambda^n) \subsetneq \text{Ker}(T_\lambda^{n+1})$

ทุก ๆ $n = 0, 1, 2, \dots$ จากทฤษฎีบท 2.13 (1) เรามี $\dim(\text{Ker}(T_\lambda^n)) < \infty$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$

และเนื่องจาก $\dim(\text{Ker}(T_\lambda^0)) = \dim(\text{Ker}(I)) = \dim(\{0\}) = 0$ จึงได้ว่า $\dim(\text{Ker}(T_\lambda^n)) < \infty$

ทุก ๆ $n = 0, 1, 2, \dots$ ดังนั้นโดยเลมมา 2.9 ได้ว่า $\text{Ker}(T_\lambda^{n-1})$ เป็นพรอพเพอร์สับสเปซปิด

ของ $\text{Ker}(T_\lambda^n)$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ และดังนั้นโดยเลมมา 2.3 ได้ว่า มีซีควেনซ์ (y_n)

ใน $\text{Ker}(T_\lambda^n) - \text{Ker}(T_\lambda^{n-1})$ โดยที่ $\|y_n\| = 1$ และ $\|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}$ ทุก ๆ $x \in \text{Ker}(T_\lambda^{n-1})$

ต่อไปจะแสดงว่า

$$(1) \quad \|T(y_n) - T(y_m)\| \geq \frac{1}{2}|\lambda| \quad \text{ทุก ๆ } m < n$$

จาก $T_\lambda = T - \lambda I$ เราได้ว่า $T = T_\lambda + \lambda I$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} (2) \quad T(y_n) - T(y_m) &= T(y_n - y_m) \\ &= (T_\lambda + \lambda I)(y_n - y_m) \\ &= T_\lambda(y_n) - T_\lambda(y_m) + \lambda y_n - \lambda y_m \\ &= \lambda y_n - \overline{x} \quad \text{โดยที่ } \overline{x} = T_\lambda(y_m) + \lambda y_m - T_\lambda(y_n) \end{aligned}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\overline{x} \in \text{Ker}(T_\lambda^{n-1})$: ให้ $m < n$ ดังนั้น $m \leq n-1$ ซึ่งบ่งชี้ว่า

$\text{Ker}(T_\lambda^m) \subseteq \text{Ker}(T_\lambda^{n-1})$ จาก $\text{Ker}(T_\lambda^m)$ เป็นสับสเปซของ B เราได้ว่า $\lambda y_m \in \text{Ker}(T_\lambda^m)$

เป็นผลให้ $\lambda y_m \in \text{Ker}(T_\lambda^{n-1})$ จาก $y_m \in \text{Ker}(T_\lambda^m)$ เราได้ว่า $0 = T_\lambda^m(y_m) = T_\lambda^{m-1}(T_\lambda(y_m))$

แสดงว่า $T_\lambda(y_m) \in \text{Ker}(T_\lambda^{m-1}) \subsetneq \text{Ker}(T_\lambda^{n-1})$ ทั้งนี้เพราะ $m-1 < n-1$ นั่นคือ

$T_\lambda(y_m) \in \text{Ker}(T_\lambda^{n-1})$ จาก $y_n \in \text{Ker}(T_\lambda^n)$ เราได้ว่า $0 = T_\lambda^n(y_n) = T_\lambda^{n-1}(T_\lambda(y_n))$ แสดงว่า

$T_\lambda(y_n) \in \text{Ker}(T_\lambda^{n-1})$ สรุปได้ว่า $\overline{x} \in \text{Ker}(T_\lambda^{n-1})$ ทุก ๆ $m < n$

พิจารณา $x = \lambda^{-1} \overline{x} \in \text{Ker}(T_\lambda^{n-1})$ เราได้ว่า $\lambda x = \overline{x}$ จากนั้นและจากสมการ (2) เราได้ว่า

$$\begin{aligned} (3) \quad \|\lambda y_n - \overline{x}\| &= \|\lambda y_n - \lambda x\| \\ &= |\lambda| \cdot \|y_n - x\| \\ &\geq \frac{1}{2} |\lambda| \end{aligned}$$

ดังนั้นจากสมการ (2) และสมการ (3) เราคือสมการ (1) ตามต้องการ จาก $\lambda \neq 0$

เราได้ว่า $\frac{1}{2} |\lambda| > 0$ สรุปได้ว่าซีเควนซ์ $\{T(y_n)\}$ ใน $T(B)$ ไม่มีคอนเวอร์เจนต์สับซีเควนซ์

ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 1.4 ทั้งนี้เพราะ T เป็นคอมแพคต์โอเปอเรเตอร์บน B และ $\{y_n\}$

เป็นบาวด์ซีเควนซ์ใน B สรุปได้ว่า $\text{Ker}(T_\lambda^n) = \text{Ker}(T_\lambda^{n+1})$ สำหรับบาง $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$

ต่อไปจะแสดงว่า ถ้า $\text{Ker}(T_\lambda^m) = \text{Ker}(T_\lambda^{m+1})$ สำหรับบาง $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ แล้ว

$\text{Ker}(T_\lambda^n) = \text{Ker}(T_\lambda^{n+1})$ ทุก ๆ $n > m$: ให้ $\text{Ker}(T_\lambda^m) = \text{Ker}(T_\lambda^{m+1})$ สำหรับบาง

$m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ สมมุติว่า $\text{Ker}(T_\lambda^n) \neq \text{Ker}(T_\lambda^{n+1})$ สำหรับบาง $n > m$ จากทฤษฎีบท 2.13 (2)

เรามี $\text{Ker}(T_\lambda^n) \subsetneq \text{Ker}(T_\lambda^{n+1})$ ทุก ๆ $n = 0, 1, 2, \dots$ ดังนั้นโดยสมมุติฐาน เราได้ว่า

$\text{Ker}(T_\lambda^n) \subsetneq \text{Ker}(T_\lambda^{n+1})$ สำหรับบาง $n > m$ เป็นผลให้ $\text{Ker}(T_\lambda^{n+1}) - \text{Ker}(T_\lambda^n) \neq \emptyset$

และให้ $u \in \text{Ker}(T_\lambda^{n+1}) - \text{Ker}(T_\lambda^n)$ ดังนั้น $T_\lambda^{n+1}(u) = 0$ แต่ $T_\lambda^n(u) \neq 0$

จาก $n > m$ เรามี $n - m > 0$ นั่นคือ $n - m \in \mathbb{Z}^+$ และให้ $v = T_\lambda^{n-m}(u)$ ดังนั้น

$$T_\lambda^{m+1}(v) = T_\lambda^{m+1}(T_\lambda^{n-m}(u)) = T_\lambda^{n+1}(u) = 0$$

$$\text{แต่ } T_\lambda^m(v) = T_\lambda^m(T_\lambda^{n-m}(u)) = T_\lambda^n(u) \neq 0$$

แสดงว่า $v \in \text{Ker}(T_\lambda^{m+1})$ แต่ $v \notin \text{Ker}(T_\lambda^m)$ นั่นคือ $\text{Ker}(T_\lambda^m) \subsetneq \text{Ker}(T_\lambda^{m+1})$ ซึ่งขัดแย้งกับ

$\text{Ker}(T_\lambda^m) = \text{Ker}(T_\lambda^{m+1})$ สำหรับบาง $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ สรุปได้ว่า $\text{Ker}(T_\lambda^n) = \text{Ker}(T_\lambda^{n+1})$

ทุก ๆ $n > m$ ทั้งหมดนี้แสดงว่ามี $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ที่ $\text{Ker}(T_\lambda^n) = \text{Ker}(T_\lambda^{n+1}) = \text{Ker}(T_\lambda^{n+2}) = \dots$

จากนี้และจากทฤษฎีบท 2.13 (2) จะได้ $\{0\} = \text{Ker}(T_\lambda^0) \subsetneq \text{Ker}(T_\lambda) \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker}(T_\lambda^{n-1}) \subsetneq$

$$\text{Ker}(T_\lambda^n) = \text{Ker}(T_\lambda^{n+1}) = \text{Ker}(T_\lambda^{n+2}) = \dots \text{ สำหรับ } n \in \mathbb{Z}^+ \square$$

ทฤษฎีบท 2.17 : ถ้า T เป็นคอมแพคทโอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ $B, \lambda \neq 0$

และ $T_\lambda = T - \lambda I$ โดยที่ I เป็นโอเปอเรเตอร์เอกลักษณ์บน B

และ $T_\lambda^0 = I$ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก $k = k(\lambda)$ ซึ่ง $T_\lambda^k(B) = T_\lambda^{k+1}(B) = T_\lambda^{k+2}(B) = \dots$

$$\text{และ } T_\lambda^0(B) \supsetneq T_\lambda(B) \supsetneq T_\lambda^2(B) \supsetneq \dots \supsetneq T_\lambda^k(B)$$

พิสูจน์ : จากทฤษฎีบท 2.15 เรามี $B = T_\lambda^0(B) \supsetneq T_\lambda(B) \supsetneq T_\lambda^2(B) \supsetneq \dots$

สมมุติว่า $T_\lambda^n(B) \neq T_\lambda^{n+1}(B)$ ทุก ๆ $n = 0, 1, 2, \dots$ ดังนั้น $T_\lambda^{n+1}(B) \subsetneq T_\lambda^n(B)$

ทุก ๆ $n = 0, 1, 2, \dots$ จากทฤษฎีบท 2.15 เราได้ว่า $T_\lambda^n(B)$ เป็นเซตปิด ทุก ๆ $n = 0, 1, 2, \dots$

ขณะนี้เรามี $T_\lambda^{n+1}(B)$ เป็นพหุคูณสับสเปซปิดของ $T_\lambda^n(B)$ ทุก ๆ $n = 0, 1, 2, \dots$

ดังนั้นโดยเลมมา 2.3 ได้ว่า มีซีควেনซ์ $\{x_n\}$ ใน $T_\lambda^n(B) - T_\lambda^{n+1}(B)$ โดยที่ $\|x_n\| = 1$

และ $\|x_n - x\| \geq \frac{1}{2}$ ทุก ๆ $x \in T_\lambda^{n+1}(B)$ นั่นคือ $\{x_n\}$ เป็นบาวด์ซีควเอนซ์

ใน $T_\lambda^n(B) - T_\lambda^{n+1}(B)$ ซึ่ง $\|x_n - x\| \geq \frac{1}{2}$ ทุก ๆ $x \in T_\lambda^{n+1}(B)$

ต่อไปจะแสดงว่าซีควเอนซ์ $\{T(x_n)\}$ ใน $T(B)$ ไม่มีคอนเวอร์เจนต์สับซีควเอนซ์ :

จาก $T_\lambda = T - \lambda I$ เราได้ว่า $T = T_\lambda + \lambda I$ และ

$$\begin{aligned} T(x_m) - T(x_n) &= T(x_m - x_n) \\ &= (T_\lambda + \lambda I)(x_m - x_n) \\ &= T_\lambda(x_m - x_n) + \lambda I(x_m - x_n) \\ &= T_\lambda(x_m) - T_\lambda(x_n) + \lambda x_m - \lambda x_n \\ &= \lambda x_m - [T_\lambda(x_m) - T_\lambda(x_n) + \lambda x_n] \end{aligned}$$

ให้ $m < n$ ดังนั้น $T_\lambda^n(B) \subsetneq T_\lambda^m(B)$ เนื่องจาก $m+1 \leq n$ จึงได้ว่า $T_\lambda^n(B) \subseteq T_\lambda^{m+1}(B)$

จาก $x_m \in T_\lambda^m(B)$ เราได้ว่า $T_\lambda(x_m) \in T_\lambda(T_\lambda^m(B)) = T_\lambda^{m+1}(B)$ เป็นผลให้

$-T_\lambda(x_m) \in T_\lambda^{m+1}(B)$ ทั้งนี้เพราะ $T_\lambda^{m+1}(B)$ เป็นสับสเปซ ของ B จาก $x_n \in T_\lambda^n(B)$

เราได้ว่า $T_\lambda(x_n) \in T_\lambda(T_\lambda^n(B)) = T_\lambda^{n+1}(B) \subsetneq T_\lambda^n(B) \subseteq T_\lambda^{m+1}(B)$ และจาก $T_\lambda^n(B)$

เป็นสับสเปซของ B เราได้ว่า $\lambda x_n \in T_\lambda^n(B)$ และดังนั้น $\lambda x_n \in T_\lambda^{m+1}(B)$ สรุปได้ว่า

$-T_\lambda(x_m) + T_\lambda(x_n) + \lambda x_n \in T_\lambda^{m+1}(B)$ ดังนั้นเราได้ว่า $T(x_m) - T(x_n) = \lambda x_m - \lambda x_n = \lambda(x_m - x_n)$

สำหรับบาง $x \in T_\lambda^{m+1}(B)$ เป็นผลให้ $\|T(x_m) - T(x_n)\| = \|\lambda(x_m - x_n)\| = |\lambda| \cdot \|x_m - x_n\|$

$\geq \frac{1}{2} |\lambda|$ ทุก ๆ $m < n$ จาก $\lambda \neq 0$ เราได้ว่า $\frac{1}{2} |\lambda| > 0$ นั่นคือ $\|T(x_m) - T(x_n)\| \geq \frac{1}{2} |\lambda| > 0$

ทุก ๆ $m < n$ ซึ่งบ่งชี้ว่าซีควเอนซ์ $\{T(x_n)\}$ ใน $T(B)$ ไม่มีคอนเวอร์เจนต์สับซีควเอนซ์

ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 1.4 สรุปได้ว่า มี $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ซึ่ง $T_\lambda^n(B) = T_\lambda^{n+1}(B)$

นั่นคือ T_λ ส่ง (maps) $T_\lambda^n(B)$ ไปบน (onto) $T_\lambda^n(B)$ สำหรับบาง $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$

ซึ่งเป็นผลให้ $T_\lambda^n(B) = T_\lambda(T_\lambda^n(B)) = T_\lambda(T_\lambda(T_\lambda^n(B))) = \dots$ สำหรับบาง $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$

นั่นคือ $T_\lambda^n(B) = T_\lambda^{n+1}(B) = T_\lambda^{n+2}(B) = \dots$ สำหรับบาง $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ จากนั้นและจาก

ทฤษฎีบท 2.15 จึงได้ว่า $B = T_\lambda^0(B) \supseteq T_\lambda(B) \supseteq T_\lambda^2(B) \supseteq \dots \supseteq T_\lambda^{n-1}(B) \supseteq T_\lambda^n(B)$

$= T_\lambda^{n+1}(B) = T_\lambda^{n+2}(B) = \dots$ สำหรับบาง $n \in \mathbb{Z}^+$ $\square$

ทฤษฎีบท 2.18 : ถ้า T เป็นคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ B , $\lambda \neq 0$ และ

$T_\lambda = T - \lambda I$ โดยที่ I เป็นโอเปอเรเตอร์เอกลักษณ์บน B และ $T_\lambda^0 = I$ แล้ว จะมีจำนวนเต็มบวก

$p = p(\lambda)$ ซึ่ง

$$(1) \quad \text{Ker}(T_\lambda^p) = \text{Ker}(T_\lambda^{p+1}) = \text{Ker}(T_\lambda^{p+2}) = \dots$$

$$(2) \quad T_\lambda^p(B) = T_\lambda^{p+1}(B) = T_\lambda^{p+2}(B) = \dots$$

$$(3) \quad \text{Ker}(T_\lambda^0) \supseteq \text{Ker}(T_\lambda) \supseteq \text{Ker}(T_\lambda^2) \supseteq \dots \supseteq \text{Ker}(T_\lambda^p)$$

$$(4) \quad T_\lambda^0(B) \supseteq T_\lambda(B) \supseteq T_\lambda^2(B) \supseteq \dots \supseteq T_\lambda^p(B).$$

พิสูจน์ : โดยทฤษฎีบท 2.16 บ่งชี้ว่า มีจำนวนเต็มบวก p_1 ซึ่งข้อความ (1) และ (3) ของ

ทฤษฎีบทนี้เป็นจริง และโดยทฤษฎีบท 2.17 บ่งชี้ว่า มีจำนวนเต็มบวก p_2 ซึ่งข้อความ (2)

และ (4) ของทฤษฎีบทนี้เป็นจริง จะแสดงว่า $p_1 = p_2$ โดยการแสดงว่า $p_2 \geq p_1$ และ

$p_1 \geq p_2$: โดยทฤษฎีบท 2.17 เรามี $T_\lambda^{p_2+1}(B) = T_\lambda^{p_2}(B)$ หมายความว่า

$T_\lambda(T_\lambda^{p_2}(B)) = T_\lambda^{p_2}(B)$ สำหรับบาง $p_2 \in \mathbb{Z}^+$ ดังนั้น

$$(5) \quad \text{แต่ละ } y \in T_\lambda^{p_2}(B) \text{ จะมี } x \in T_\lambda^{p_2}(B) \text{ ซึ่ง } y = T_\lambda(x) \text{ ต่อไปจะแสดงว่า}$$

$$(6) \quad \text{ถ้า } x \in T_\lambda^{p_2}(B) \text{ ซึ่ง } T_\lambda(x) = 0 \text{ แล้ว } x = 0.$$

สมมุติว่า ข้อความ (6) ไม่จริง นั่นคือ มี $x_1 \neq 0$ ใน $T_\lambda^{p_2}(B)$ ซึ่ง $T_\lambda(x_1) = 0$ จาก

$x_1 \in T_\lambda^{p_2}(B)$ โดยข้อความ (5) เราได้ว่า มี $x_2 \in T_\lambda^{p_2}(B)$ ซึ่ง $T_\lambda(x_2) = x_1$ จาก $x_2 \in T_\lambda^{p_2}(B)$

โดยข้อความ (5) เราได้ว่า มี $x_3 \in T_\lambda^{p_2}(B)$ ซึ่ง $T_\lambda(x_3) = x_2$ และเป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ เราได้ว่า

ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$ เรามี $0 \neq x_1 = T_\lambda(x_2) = T_\lambda(T_\lambda(x_3)) = T_\lambda^2(T_\lambda(x_4)) = \dots = T_\lambda^{n-1}(x_n)$

แต่ $0 = T_\lambda(x_1) = T_\lambda(T_\lambda^{n-1}(x_n)) = T_\lambda^n(x_n)$ แสดงว่า $x_n \in \text{Ker}(T_\lambda^{n-1})$

แต่ $x_n \in \text{Ker}(T_\lambda^n)$ จากนั้นและจากทฤษฎีบท 2.16 เราได้ว่า $\text{Ker}(T_\lambda^{n-1}) \subsetneq \text{Ker}(T_\lambda^n)$

ทุก $n \in \mathbb{Z}^+$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 2.16 สรุปได้ว่า ข้อความ (6) เป็นจริง

โดยทฤษฎีบท 2.17 เรามี $T_\lambda^{p_2+1}(B) = T_\lambda^{p_2}(B)$ สำหรับบาง $p_2 \in \mathbb{Z}^+$ ต่อไปจะแสดงว่า

$\text{Ker}(T_\lambda^{p_2+1}) = \text{Ker}(T_\lambda^{p_2} B)$ สำหรับบาง $p_2 \in \mathbb{Z}^+$: โดยทฤษฎีบท 2.13

เรามี $\text{Ker}(T_\lambda^{p_2}) \subseteq \text{Ker}(T_\lambda^{p_2+1})$ ต่อไปจะแสดงว่า $\text{Ker}(T_\lambda^{p_2+1}) \subseteq \text{Ker}(T_\lambda^{p_2})$

โดยสมมติว่า $\text{Ker}(T_\lambda^{p_2+1}) \not\subseteq \text{Ker}(T_\lambda^{p_2})$ นั่นคือ มี $x_0 \in \text{Ker}(T_\lambda^{p_2+1})$

ซึ่ง $T_\lambda^{p_2}(x_0) = y_0 \neq 0$ แต่ $T_\lambda(y_0) = T_\lambda(T_\lambda^{p_2}(x_0)) = T_\lambda^{p_2+1}(x_0) = 0$

ดังนั้น $y_0 \in T_\lambda^{p_2}(B) - \{0\}$ และ $T_\lambda(y_0) = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับข้อความ (6) จึงสรุปได้ว่า

$\text{Ker}(T_\lambda^{p_2+1}) \subseteq \text{Ker}(T_\lambda^{p_2})$ ดังนั้น $\text{Ker}(T_\lambda^{p_2+1}) = \text{Ker}(T_\lambda^{p_2})$ สำหรับบาง $p_2 \in \mathbb{Z}^+$

โดยทฤษฎีบท 2.16 เรามี p_1 เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ $\text{Ker}(T_\lambda^{p_1+1}) = \text{Ker}(T_\lambda^{p_1})$

จึงสรุปได้ว่า $p_2 \geq p_1$ ต่อไปจะแสดงว่า $p_1 \geq p_2$: โดยทฤษฎีบท 2.17 เรามี

$T_\lambda^0(B) \subsetneq T_\lambda(B) \subsetneq \dots \subsetneq T_\lambda^{p_2}(B) = T_\lambda^{p_2+1}(B) = \dots$ ให้ $y \in T_\lambda^{p_2-1}(B) - T_\lambda^{p_2}(B)$ นั่นคือ

$y \in T_\lambda^{p_2-1}(B)$ แต่ $y \notin T_\lambda^{p_2}(B)$ จาก $y \in T_\lambda^{p_2-1}(B)$ บ่งชี้ว่า มี $x \in B$ ซึ่ง $y = T_\lambda^{p_2-1}(x)$

และดังนั้น $T_\lambda(y) = T_\lambda(T_\lambda^{p_2-1}(x)) = T_\lambda^{p_2}(x)$ นั่นคือ $T_\lambda(y) \in T_\lambda^{p_2}(B)$ แต่

$T_\lambda^{p_2}(B) = T_\lambda^{p_2+1}(B)$ จึงได้ว่า $T_\lambda(y) \in T_\lambda^{p_2+1}(B)$ ซึ่งบ่งชี้ว่า มี $z \in B$ ชนิดที่

$T_\lambda(y) = T_\lambda^{p_2+1}(z)$ และ เนื่องจาก $T_\lambda^{p_2+1}(z) = T_\lambda^{1+p_2}(z) = T_\lambda(T_\lambda^{p_2}(z)) = T_\lambda(y) \in T_\lambda^{p_2}(B)$

$= T_\lambda^{p_2+1}(B) = T_\lambda^{1+p_2}(B) = T_\lambda(T_\lambda^{p_2}(B))$ จึงได้ว่า $T_\lambda^{p_2}(z) \in T_\lambda^{p_2}(B)$ แต่ $y \notin T_\lambda^{p_2}(B)$

จึงได้ว่า $T_\lambda^{p_2-1}(x - T_\lambda(z)) = T_\lambda^{p_2-1}(x) - T_\lambda^{p_2-1}(T_\lambda(z)) = y - T_\lambda^{p_2}(z) \neq 0$ แสดงว่า

$x - T_\lambda(z) \notin \text{Ker}(T_\lambda^{p_2-1})$ แต่ $T_\lambda^{p_2}(x - T_\lambda(z)) = T_\lambda^{p_2}(x) - T_\lambda^{p_2}(T_\lambda(z)) = T_\lambda(y) - T_\lambda^{p_2+1}(z)$

$= T_\lambda(y) - T_\lambda(y) = 0$ จึงได้ว่า $x - T_\lambda(z) \in \text{Ker}(T_\lambda^{p_2})$ แสดงว่า $\text{Ker}(T_\lambda^{p_2-1}) \neq \text{Ker}(T_\lambda^{p_2})$

ดังนั้น $\text{Ker}(T_\lambda^{p_2-1}) \subsetneq \text{Ker}(T_\lambda^{p_2})$ โดยทฤษฎีบท 2.16 เรามี p_1 เป็นจำนวนเต็มบวก

ที่น้อยที่สุดที่ $\text{Ker}(T_\lambda^{p_1}) = \text{Ker}(T_\lambda^{p_1+1})$ จึงได้ว่า $p_1 \geq p_2$ จากทั้งสองกรณีเราได้ว่า

$$p_1 = p_2 \quad \square$$