

บทที่ 1

คอมแพคต์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ

(Compact operators on Banach spaces)

สำหรับบทแรกนี้จะเป็นการศึกษาคุณสมบัติที่สำคัญของคอมแพคต์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ แต่การให้นิยามของคอมแพคต์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซนั้น มีความจำเป็นต้องรู้จักคำว่า "คอมแพคต์เซต" (compact set) และ "บาวด์เซต" (bounded set) ในบานาคสเปซก่อน ดังนั้น เราจะเริ่มด้วยการทบทวนนิยามของคำเหล่านี้

เซต K ในบานาคสเปซ B เป็นคอมแพคต์เซตใน B ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ซีควเन्ซ์ (sequence) ใน K มีสับซีควเन्ซ์ (subsequence) ที่คอนเวอร์จ (converge) ใน K .

เซต K ในบานาคสเปซ B ที่มีนอร์ม (norm) $\| \cdot \|$ เป็นบาวด์เซตใน B ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง $c > 0$ ซึ่ง $\|x\| \leq c$ ทุก ๆ $x \in K$

ขณะนี้เราพร้อมแล้วที่จะให้นิยามของคอมแพคต์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ

นิยาม 1.1 : ลิเนียร์โอเปอเรเตอร์ (linear operator) T บนบานาคสเปซ B เป็นคอมแพคต์โอเปอเรเตอร์บน B ก็ต่อเมื่อ $\overline{T(S)}$ เป็นคอมแพคต์สับเซต (compact subset) ของ $T(B)$ ทุก ๆ บาวด์สับเซต (bounded subset) S ของ B $\square$

คุณสมบัติของคอมแพคต์โอเปอเรเตอร์ที่สำคัญมีหลายประการ ประการแรกคือมันเป็นบาวด์ลิเนียร์โอเปอเรเตอร์ (bounded linear operator) ด้วย และเป็นที่ทราบกันดีแล้วว่า บาวด์ลิเนียร์โอเปอเรเตอร์เป็นโอเปอเรเตอร์ที่ส่ง (maps) บาวด์เซตไปเป็นบาวด์เซต ซึ่งในเชิงคณิตศาสตร์แล้ว ลิเนียร์โอเปอเรเตอร์ T บนบานาคสเปซ B เป็นบาวด์ลิเนียร์โอเปอเรเตอร์บน B ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง $c > 0$ ซึ่ง $\|T(x)\| \leq c \|x\|$ ทุก ๆ $x \in B$ ซึ่งจากนี้ไปเราสามารถนิยามนอร์มของบาวด์ลิเนียร์โอเปอเรเตอร์ T บนบานาคสเปซ B ได้เป็น

$$\|T\| = \sup_{x \in B, x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

ในการพิสูจน์ว่าคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์เป็นบาวด์ลีนีโอเปอเรเตอร์นั้นเราต้องการ
 เลื้มา ต่อไปนี้มาช่วย กล่าวคือ

เลื้มา 1.2 : คอมแพกต์สับเซต K ของบานาคสเปซ B เป็นเซตปิด (closed set) และเป็น
 บาวด์เซต.

พิสูจน์ : (1) จะแสดงว่า K เป็นเซตปิด

ให้ $x \in \overline{K}$ ดังนั้นมีซีแวนซ์ $\{x_n\}$ ใน K ซึ่ง $\{x_n\} \rightarrow x$ เนื่องจาก K เป็น
 คอมแพกต์เซต จึงได้ว่า $\{x_n\}$ มีคอนเวอร์เจนต์สับซีแวนซ์ (convergent subsequence) และให้
 $\{x_{n_m}\}$ เป็นคอนเวอร์เจนต์สับซีแวนซ์ของ $\{x_n\}$ นั่นคือ มี $x_0 \in K$ ซึ่ง $\{x_{n_m}\} \rightarrow x_0$ แต่
 $\{x_{n_m}\}$ เป็นสับซีแวนซ์ของ $\{x_n\}$ จึงได้ว่า $x_0 = x$ นั่นคือ $x \in K$ ดังนั้น $\overline{K} \subseteq K$ ซึ่ง
 แสดงว่า K เป็นเซตปิด.

(2) จะแสดงว่า K เป็นบาวด์เซต

สมมุติว่า K เป็นอันบาวด์เซต (unbounded set) ดังนั้นสำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{Z}^+$ จะมี
 $x_n \in K$ ซึ่ง $\|x_n\| > n$ ซึ่งทำให้เราได้ อันบาวด์ซีแวนซ์ (unbounded sequence) $\{x_n\}$ ใน K
 แล้วได้ว่าทุก ๆ สับซีแวนซ์ของ $\{x_n\}$ เป็นอันบาวด์สับซีแวนซ์ (unbounded subsequence)
 และดังนั้น $\{x_n\}$ ไม่มีคอนเวอร์เจนต์สับซีแวนซ์ เพราะคอนเวอร์เจนต์สับซีแวนซ์เป็น
 บาวด์สับซีแวนซ์ (bounded subsequence) ซึ่งขณะนี้เราได้ว่า ซีแวนซ์ $\{x_n\}$ ใน K
 ไม่มีคอนเวอร์เจนต์สับซีแวนซ์ ซึ่งบ่งชี้ว่า K ไม่เป็นคอมแพกต์เซต ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง
 จึงสรุปได้ว่า K เป็นบาวด์เซต $\square$

ขณะนี้เราพร้อมแล้วที่จะพิสูจน์ให้เห็นว่าคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์ คือ บาวด์ลีนีโอเปอเรเตอร์ชนิดหนึ่ง กล่าวคือ

ทฤษฎีบท 1.3 : ถ้า T เป็นคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ B แล้ว T เป็น
 บาวด์ลีนีโอเปอเรเตอร์บน B .

พิสูจน์ : ให้ $A = \{x \in B / \|x\| = 1\}$ ซึ่งเป็นบาวด์สับเซตของ B เนื่องจาก T เป็น
 คอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บน B จึงได้ว่า $\overline{T(A)}$ เป็นคอมแพกต์สับเซตของ $T(B) \subseteq B$ ดังนั้น
 โดยเลื้มา 1.2 ได้ว่า $\overline{T(A)}$ เป็นบาวด์สับเซตของ B ซึ่งแสดงว่า $\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \|T\| < \infty$
 นั่นคือ T เป็นบาวด์ลีนีโอเปอเรเตอร์บน B $\square$

เรามีเกณฑ์สำคัญสำหรับลิเนียร์โอเปอเรเตอร์ เป็นคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์อีก
เกณฑ์หนึ่ง กล่าวคือ

ทฤษฎีบท 1.4 : ลิเนียร์โอเปอเรเตอร์ T บนบานาคสเปซ B เป็นคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บน B
ก็ต่อเมื่อ ถ้า $\{x_n\}$ เป็นบาวด์ซีแควนซ์ใน B แล้วซีแควนซ์ $\{T(x_n)\}$ ใน $T(B)$ มีคอนเวอร์เจนต์
สับซีแควนซ์.

พิสูจน์ : $(\Rightarrow)$ กำหนดให้ T เป็นคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ B และให้ $\{x_n\}$
เป็นบาวด์ซีแควนซ์ใน B ดังนั้น $\overline{T(\{x_n\})} = \overline{T(x_n)}$ เป็นคอมแพกต์สับเซตของ $T(B)$ แล้ว
ได้ว่า ซีแควนซ์ $\{T(x_n)\}$ ใน $\overline{T(x_n)} \subseteq T(B)$ มีคอนเวอร์เจนต์สับซีแควนซ์.

$(\Leftarrow)$ กำหนดให้ ถ้า $\{x_n\}$ เป็นบาวด์ซีแควนซ์ใน B แล้วซีแควนซ์ $\{T(x_n)\}$ ใน $T(B)$
มีคอนเวอร์เจนต์สับซีแควนซ์ ดังนั้นสำหรับบาวด์สับเซต S ใด ๆ ของ B และซีแควนซ์
 $\{z_n\}$ ใด ๆ ใน $T(S)$ จะมีซีแควนซ์ $\{y_n\}$ ใน S ชนิดที่ $T(y_n) = z_n$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$
เนื่องจาก S เป็นบาวด์เซต จึงได้ว่า $\{y_n\}$ เป็นบาวด์ซีแควนซ์ใน $S \subseteq B$ ดังนั้นโดยข้อกำหนดให้
ได้ว่า ซีแควนซ์ $\{T(y_n)\}$ ใน $T(S) \subseteq T(B)$ มีคอนเวอร์เจนต์สับซีแควนซ์ แต่ $\{z_n\} = \{T(y_n)\}$
เป็นซีแควนซ์ใด ๆ ใน $T(S) \subseteq T(B)$ จึงได้ว่า $T(S)$ เป็นคอมแพกต์สับเซตของ $T(B)$ ดังนั้น
 $T(S)$ เป็นคอมแพกต์สับเซตของ B และโดยเลมมา 1.2 ได้ว่า $T(S)$ เป็นเซตปิดใน B ดังนั้นเรามี
 $T(S) = \overline{T(S)}$ เป็นผลให้ $\overline{T(S)}$ เป็นคอมแพกต์สับเซตของ B จึงได้ว่า $\overline{T(S)}$ เป็นคอมแพกต์-
สับเซตของ $T(B)$ สรุปได้ว่า T เป็นคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บน B . $\square$

เรามีเกณฑ์อีกเกณฑ์หนึ่งที่จะแสดงให้เห็นว่าบาวด์ลิเนียร์โอเปอเรเตอร์ และลิเนียร์
โอเปอเรเตอร์ต่อเนื่อง (continuous linear operator) เป็นสิ่งเดียวกันดังนี้

เลมมา 1.5 : ลิเนียร์โอเปอเรเตอร์ T บนบานาคสเปซ B เป็นบาวด์ลิเนียร์โอเปอเรเตอร์บน B
ก็ต่อเมื่อ T เป็นลิเนียร์โอเปอเรเตอร์ต่อเนื่องบน B

พิสูจน์ : $(\Rightarrow)$ ให้ T เป็นบาวด์ลิเนียร์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ B ให้ x_0 เป็นเวกเตอร์ใด ๆ
ใน B และให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้นกรณีที่ $T = 0$ นั่นคือ $T(x) = 0$ ทุก ๆ $x \in B$ เราได้ว่าสำหรับ
 $x \in B$ ซึ่งถ้า $\|x - x_0\| < \delta = \varepsilon$ แล้ว $\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| = \|0\| = 0 < \varepsilon$ ซึ่ง
แสดงว่า T ต่อเนื่องที่ x_0 แต่ x_0 เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน B จึงได้ว่า T ต่อเนื่องที่ทุก ๆ
เวกเตอร์ใน B นั่นคือ T เป็นลิเนียร์โอเปอเรเตอร์ต่อเนื่องบน B .

สำหรับกรณีที่ $T \neq \overline{0}$ นั่นคือ $T(x) \neq 0$ สำหรับบาง $x \in B$ และจาก T เป็น

บรรทัดฐานโอเปอเรเตอร์บน B เราได้ว่า $\|T\| = \sup_{x \in B, x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} > 0$ และเพราะว่า

$\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ ทุก ๆ $x \in B$ จึงได้ว่าสำหรับ $x \in B$ ซึ่งถ้า $\|x - x_0\| < \delta$

$= \frac{\varepsilon}{\|T\|}$ แล้ว $\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \cdot \|x - x_0\| < \|T\| \cdot \delta = \varepsilon$

ทั้งนี้เพราะ $x - x_0 \in B$ ซึ่งแสดงว่า T ต่อเนื่องที่ x_0 แต่ x_0 เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน B

จึงได้ว่า T ต่อเนื่องที่ทุก ๆ เวกเตอร์ใน B นั่นคือ T เป็นลิเนียร์โอเปอเรเตอร์ต่อเนื่องบน B .

($\Leftarrow$) ให้ T เป็นลิเนียร์โอเปอเรเตอร์ต่อเนื่องบนบานาคสเปซ B

กรณีที่ $T = \overline{0}$ นั่นคือ $T(x) = 0$ ทุก ๆ $x \in B$ เรามี $\|T(x)\| = \|0\| = 0 \leq c\|x\|$

ทุก ๆ $x \in B$ และทุก ๆ จำนวนจริง $c > 0$ ดังนั้น T เป็นบรรทัดฐานโอเปอเรเตอร์บน B

สำหรับกรณีที่ $T \neq \overline{0}$ นั่นคือ $T(x) \neq 0$ สำหรับบาง $x \in B$ ให้ $x_0 \in B$ โดยข้อกำหนดให้

เราได้ว่า T ต่อเนื่องที่ x_0 นั่นคือ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับ $x \in B$

ถ้า $\|x - x_0\| < \delta$ แล้ว $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ ต่อไปพิจารณา $y \in B - \{0\}$ และให้

$x = x_0 + \frac{\delta y}{2\|y\|}$ ดังนั้น $x - x_0 = \frac{\delta y}{2\|y\|} \in B - \{0\}$ เนื่องจากนอร์มเป็นฟังก์ชันค่าจริง

(real-valued function) เราได้ว่า $\|x - x_0\| = \left\| \frac{\delta y}{2\|y\|} \right\| = \frac{\delta\|y\|}{2\|y\|} = \frac{\delta}{2} < \delta$ เนื่องจาก T เป็น

ลิเนียร์โอเปอเรเตอร์บน B เราได้ว่า $\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right) \right\|$

$= \frac{\delta\|T(y)\|}{2\|y\|} < \varepsilon$ เป็นผลให้ $\|T(y)\| < \frac{2\varepsilon\|y\|}{\delta} = c\|y\|$ เมื่อ $c = \frac{2\varepsilon}{\delta}$ ซึ่งได้ว่า $c > 0$

ต่อไปพิจารณากรณี $y = 0 \in B$ เรามี $\|y\| = 0$ เป็นผลให้ $\|T(y)\| = \|T(0)\|$

$= \|0\| = 0 = c\|y\|$ ทุก ๆ จำนวนจริง $c > 0$ จากทั้งสองกรณีบ่งชี้ว่ามี $c > 0$ ซึ่ง

$\|T(y)\| \leq c\|y\|$ ทุก ๆ $y \in B$ ดังนั้น T เป็นบรรทัดฐานโอเปอเรเตอร์บน B . $\square$

นอกจากที่กล่าวมาแล้วข้างต้นนี้ ยังมีเกณฑ์สำคัญสำหรับการเป็นคอมแพคต์-โอเปอเรเตอร์ของคอมโพสิชันโอเปอเรเตอร์ (composition operators) ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.6 : ถ้า T เป็นคอมแพคต์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ B และ S เป็นบรรทัดฐานโอเปอเรเตอร์บน B แล้ว TS และ ST เป็นคอมแพคต์โอเปอเรเตอร์บน B .

พิสูจน์ : จะแสดงว่า TS เป็นคอมแพคต์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ B ให้ K เป็นบาวด์สับเซตใด ๆ ของ B เนื่องจาก S เป็นบรรทัดฐานโอเปอเรเตอร์บน B เราได้ว่า $S(K)$

เป็นบาวด์ส์ลับเซตของ B เนื่องจาก T เป็นคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บน B เราได้ว่า $\overline{T(S(K))} = \overline{TS(K)}$ เป็นคอมแพกต์ลับเซตของ $TS(B)$ สรุปได้ว่า TS เป็นคอมแพกต์-โอเปอเรเตอร์บน B

ต่อไป จะแสดงว่า ST เป็นคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ B ให้ $\{x_n\}$ เป็นบาวด์ส์ซีแควนซ์ใด ๆ ใน B เนื่องจาก T เป็นคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บน B โดยทฤษฎีบท 1.4 ได้ว่าซีแควนซ์ $\{T(x_n)\}$ ใน $T(B)$ มีคอนเวอร์เจนต์ลับซีแควนซ์ และให้ $\{T(x_{n_m})\}$ เป็นคอนเวอร์เจนต์ลับซีแควนซ์ของ $\{T(x_n)\}$ เนื่องจาก S เป็นบาวด์ส์ลิเนียร์โอเปอเรเตอร์บน B โดยเลมมา 1.5 ได้ว่า S เป็นลิเนียร์โอเปอเรเตอร์ต่อเนื่องบน B ดังนั้น $\{ST(x_{n_m})\}$ เป็นคอนเวอร์เจนต์ซีแควนซ์ใน B นั่นคือ ซีแควนซ์ $\{S(T(x_n))\} = \{ST(x_n)\}$ ใน $ST(B)$ มี $\{S(T(x_{n_m}))\} = \{ST(x_{n_m})\}$ เป็นคอนเวอร์เจนต์ลับซีแควนซ์ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.4 ได้ว่า ST เป็นคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บน B . $\square$

ทฤษฎีบท 1.6 นี้ เป็นทฤษฎีที่สำคัญอีกทฤษฎีหนึ่งที่จะนำไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีเชิงสเปกตรัมของคอมแพกต์โอเปอเรเตอร์บนบานาคสเปซ ในบทที่ 2 ต่อไป