บทที่ 3

แบบจำลองระบบ

ในบทนี้จะเป็นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบหุ่นยนต์สมดุลสองล้อ โดยใช้สมการลากรองจ์ของการเคลื่อนที่ โดยที่สมการลากองจ์ของการเคลื่อนที่สามารถเขียนอยู่ในรูปสมการได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \tag{3.1}$$

โดยที่ L, q_i และ Q_i คือ Lagrangian function, generalized coordinates หรือ the state variables และ e generalized forces ตามลำดับ และ Lagrangian function เป็นผลต่างระหว่างพลังงานจลน์กับพลังงานศักย์ คือ

$$L\left(q,\dot{q}\right) = T\left(q,\dot{q}\right) - V(q) \tag{3.2}$$

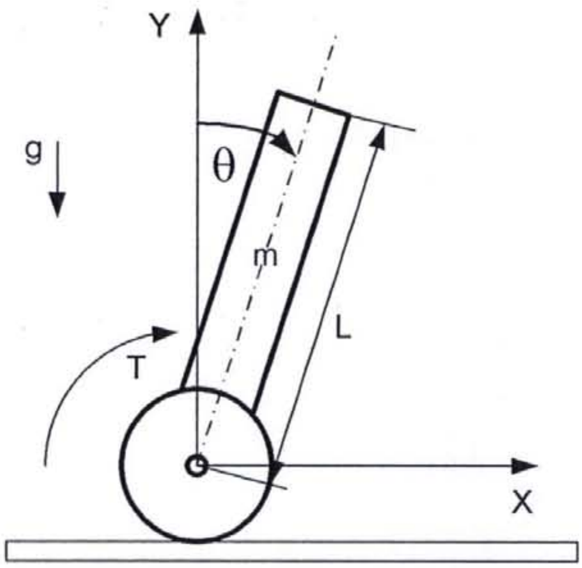
โดยที่ T และ V เป็นพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของระบบตามลำดับ นอกจากนี้ Generalized force Q_i ประกอบไปด้วยแรงทั้งหมดที่กระทำต่อระบบในทิศทางของ i-th generalized coordinate ได้แก่

1. External forces, including the force due to gravity.
2. Forces due to friction.

Generalized force Q_i สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} \overline{F}_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \tag{3.3}$$

โดยที่ N , $\overline{F}$ และ $\vec{r}$ คือ จำนวนอนุภาคหรือวัตถุแกร่งในระบบ, เวคเตอร์ของแรงที่กระทำต่ออนุภาคหรือวัตถุแกร่งในระบบ และเวคเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคหรือวัตถุแกร่งในระบบ ตามลำดับ



รูปที่ 3.1 รูปจำลองของระบบหุ่นยนต์สมดุลสองล้อ

<u>**พิจารณาที่มวล** m</u>

เวคเตอร์ตำแหน่งของมวล m ก็คือ

$$\vec{r}_m = (x + L\sin\theta)\vec{i} + (L\cos\theta)\vec{k} \tag{3.4}$$

เวคเตอร์ความเร็วของมวล m ก็คือ

$$\dot{\vec{r}}_M = \left(\dot{x} + L\cos\theta\dot{\theta}\right)\vec{i} + \left(-L\sin\theta\dot{\theta}\right)\vec{k} \tag{3.5}$$

และ

$$\dot{\vec{r}}_M^{\,2} = \dot{x}^2 + 2L\cos\theta\dot{x}\dot{\theta} + L^2\dot{\theta}^2 \tag{3.6}$$

เพราะฉะนั้นพลังงานจลน์ของระบบสามารถหาได้คือ

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}_m^2 + \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}^2 \tag{3.7}$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + 2L\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta} + L^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{24} mL^2\dot{\theta}^2 \tag{3.8}$$

และพลังงานศักย์ของระบบก็คือ

$$V = mgL\cos\theta \tag{3.9}$$

นำสมการที่ 3.8 และ 3.9 แทนลงในสมการที่ 3.2 Lagrange function สามารถคำนวณได้คือ

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{13}{24} mL^2\dot{\theta}^2 + mL\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta} - mgL\cos\theta \tag{3.10}$$

จากนั้นคำนวณหา $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{13}{12} mL^2\dot{\theta} + mL\cos\theta\,\dot{x} \tag{3.11}$$

คำนวณหา $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) = \frac{13}{12} mL^2\ddot{\theta} - mL\sin\theta\,\dot{x}\dot{\theta} + mL\cos\theta\,\ddot{x} \tag{3.12}$$

คำนวณหา $\dfrac{\partial L}{\partial q_i}$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mL\sin\theta\,\dot{x}\dot{\theta} + mgL\sin\theta \tag{3.13}$$

ดังนั้นสมการลากองจ์ของการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์สมดุลสองล้อสามารถเขียนอยู่ในรูปสมการได้คือ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{3.14}$$

$$\frac{13}{12}mL^2\ddot{\theta}+mL\cos\theta\,\ddot{x}-mgL\sin\theta = 0 \tag{3.15}$$

สมการที่ 3.15 เป็นสมการแบบจำลองคณิตศาสตร์ของของหุ่นยนต์สมดุลสองล้อซึ่งเป็นสมการไม่เชิงเส้น ดังนั้นสมการนี้จะถูกแปลงให้เป็นสมการเชิงเส้นด้วยขบวนการ Linearization โดยใช้หลักการของ Taylor series มาช่วย โดยจะทำการแปลงให้เป็นสมการเชิงเส้น ณ จุดทำงานหรือจุดสมดุล (Equilibrium point) $\left[\theta\ \dot{\theta}\ \ddot{x}\right]=\left[0\ 0\ 0\right]$ สมการที่ 3.15 ถูกจัดรูปใหม่เพื่อเตรียมสำหรับแปลงให้เป็นสมการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\ddot{\theta} = f = -\frac{12}{13L}\cos\theta\,\ddot{x} + \frac{12}{13L}g\sin\theta \tag{3.16}$$

สมการเชิงเส้นของระบบสามารถคำนวณหาได้ด้วยสมการด้านล่างนี้

$$\ddot{\theta} = \left.\frac{\partial f}{\partial\theta}\right|_{=0}\theta + \left.\frac{\partial f}{\partial\dot{\theta}}\right|_{=0}\dot{\theta} + \left.\frac{\partial f}{\partial\ddot{x}}\right|_{=0}\ddot{x} \tag{3.17}$$

คำนวณหา

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\theta}\right|_{=0} = \left[\frac{12}{13L}\sin\theta\,\ddot{x} + \frac{12}{13L}g\cos\theta\right]_{=0} = \frac{12}{13L}g$$

(3.18)

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\dot{\theta}}\right|_{=0} = \left[0-0\right]_{=0} = 0 \tag{3.19}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\ddot{x}}\right|_{=0} = \left[-\frac{12}{13L}\cos\theta\right]_{=0} = -\frac{12}{13L} \tag{3.20}$$

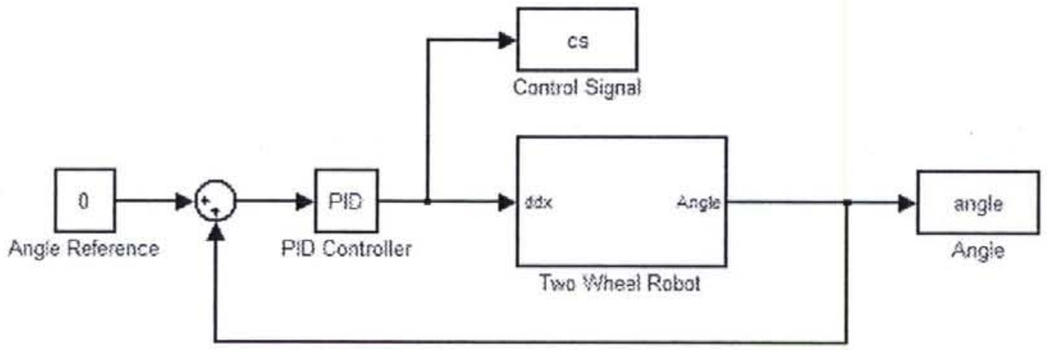
นำสมการที่ 3.18 ถึง 20 ไปแทนค่าลงในสมการที่ 3.17 ได้สมการเชิงเส้นของหุ่นยนต์สมดุลสองล้อคือ

$$\ddot{\theta} = \frac{12}{13L}g\theta - \frac{12}{13L}\ddot{x} \tag{3.21}$$

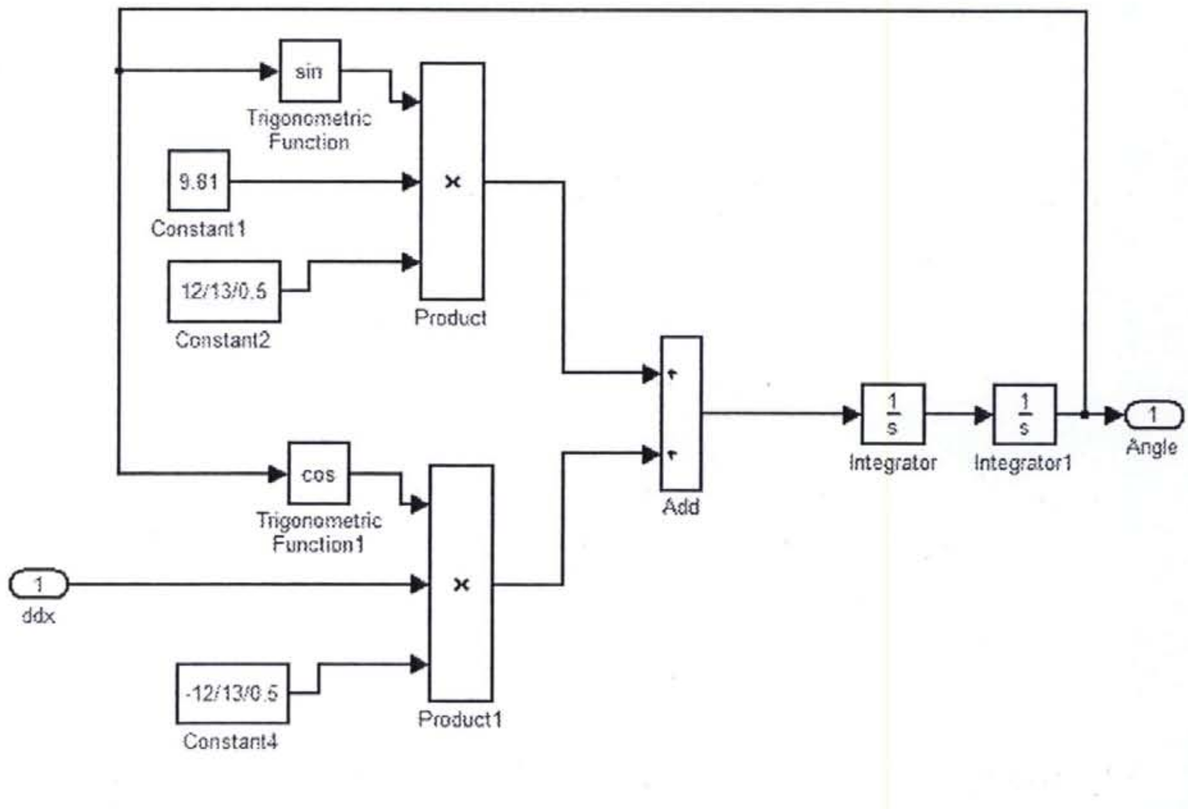
นำสมการที่ 3.21 มาทำการ Laplace transformation ได้ Transfer function ดังนี้

$$\frac{\theta(s)}{X(s)} = \frac{-12s^2}{13Ls^2-12g} \tag{3.22}$$

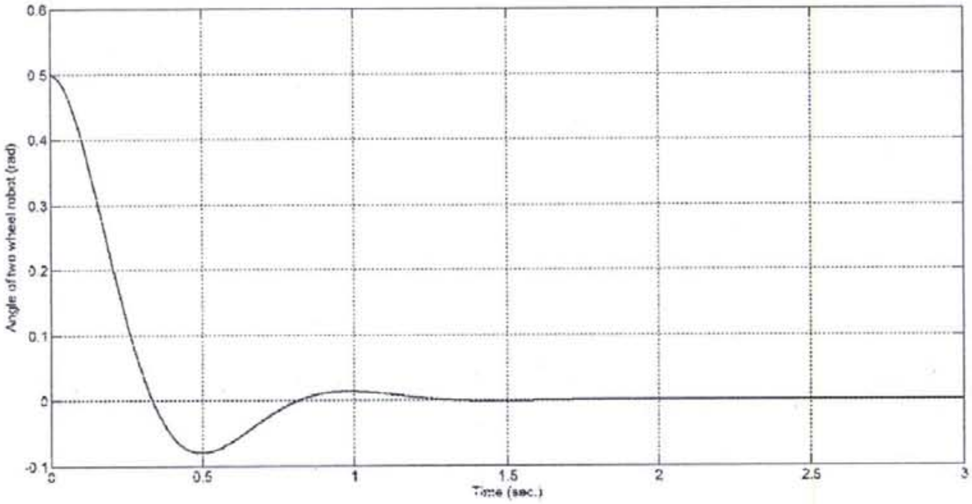
จากนั้นทำการออกแบบตัวควบคุมแบบพีไอดี โดยทำการออกแบบด้วยซอฟต์แวร์ MATLAB/Simulink ซึ่งค่า K_P, K_D และ K_I มีค่าดังนี้ 40, 4 และ 0 ตามลำดับ และได้ทำการจำลองการควบคุม โดยที่แผนผังการจำลองได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.2 และ 3.3 และผลการจำลองการควบคุมได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.4 และ 3.5



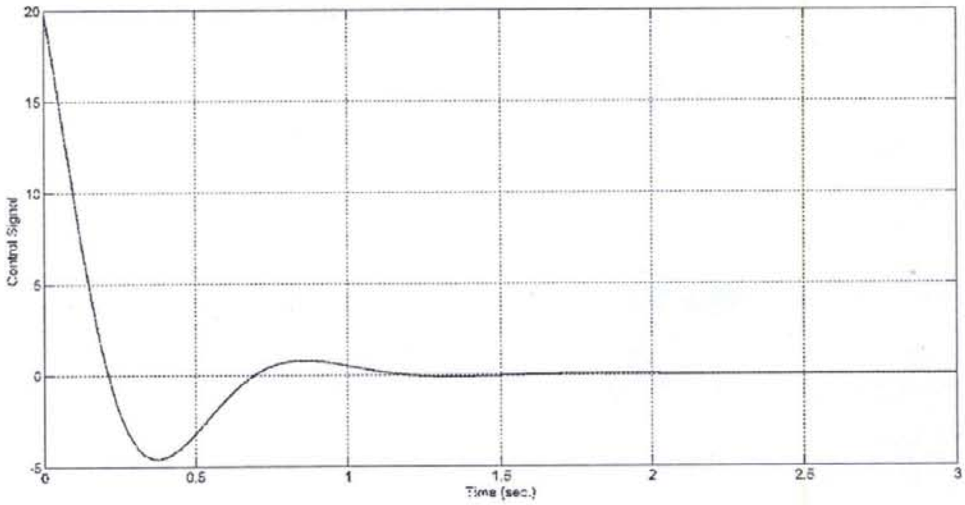
รูปที่ 3.2 แผนภาพการจำลองการควบคุม



รูปที่ 3.3 แผนภาพการจำลองของหุ่นยนต์สมดุลสองล้อ



รูปที่ 3.4 กราฟมุมเอียงของหุ่นยนต์สมดุลสองล้อ



รูปที่ 3.5 กราฟสัญญาณควบคุมของหุ่นยนต์สมดุลสองล้อ