

บทที่ 4

ผลการดำเนินการวิจัย

ผลการเลือกหน่วยการเรียนรู้ตามกลุ่มเนื้อหาวิชา

เนื่องจากผู้วิจัยได้กำหนดให้มีการสร้างชุดการสอนให้เหมาะสมกับลักษณะของเนื้อหาวิชาซึ่งเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์จะสามารถจำแนกออกเป็น 3 กลุ่มและในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยเลือกเนื้อหาวิชาดังนี้

1. กลุ่มบทนิยาม ทฤษฎี กฎ และข้อตกลง

(Definition , Theory , Law and Property or Assumption)

ผู้วิจัยเลือก หน่วยเรียนลิมิต(Limit of functions)

2.กลุ่มการฝึกปฏิบัติหรือฝึกทักษะตามนิยามหรือทฤษฎี

(Practice Mathematics Skills)

ผู้วิจัยเลือกหน่วยเรียนการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน(Derivative)

3 กลุ่มเนื้อหาวิชาไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน

(Usage in Daily Life)

ผู้วิจัยเลือกหน่วยเรียนการหาพื้นที่โดยใช้ปริพันธ์จำกัดเขต

ส่วนประกอบของชุดการสอน

เนื่องจากผู้วิจัยใช้รูปแบบชิปปา(CIPPA Model) ในการสร้างชุดการสอนโดยสร้างชุดการสอนให้มีส่วนประกอบ 5 ส่วนดังนี้

ส่วนที่1 C = Construct หมายถึง การสร้างความรู้ตามแนวคิดของ Constructivism กล่าวคือ กิจกรรมการเรียนรู้ที่ดี ควรเป็นกิจกรรมที่ช่วยให้ผู้เรียนมีโอกาสสร้างความรู้ด้วยตนเอง ซึ่งจะทำ

ให้ผู้เรียนมีความเข้าใจและเกิดการเรียนรู้ที่มีความหมายต่อตนเอง การที่ผู้เรียนมีโอกาสได้สร้างความรู้ด้วยตนเองนี้ เป็นกิจกรรมที่ช่วยให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมทางสติปัญญา

ส่วนที่ 2 I = Interaction หมายถึง การปฏิสัมพันธ์กับผู้อื่น หรือสิ่งแวดล้อมรอบตัว กิจกรรมการเรียนรู้ที่ดีจะต้องเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้มีปฏิสัมพันธ์ทางสังคมกับบุคคล และแหล่งความรู้ที่หลากหลาย ซึ่งเป็นการช่วยให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมทางสังคม

ส่วนที่ 3 P = Physical Participation หมายถึง การเรียนรู้มีโอกาสได้เคลื่อนไหวร่างกาย โดยการทำกิจกรรมในลักษณะต่าง ๆ ซึ่งเป็นการช่วยให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมทางกาย

ส่วนที่ 4 P = Process Learning หมายถึง การเรียนรู้กระบวนการต่าง ๆ กิจกรรมการเรียนรู้ที่ดีควรเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้เรียนรู้กระบวนการต่างๆ ซึ่งเป็นทักษะที่จำเป็นต่อการดำรงชีวิต เช่น กระบวนการแสวงหาความรู้ กระบวนการคิด กระบวนการแก้ปัญหา กระบวนการกลุ่ม กระบวนการพัฒนาตนเอง เป็นต้น การเรียนรู้กระบวนการเป็นสิ่งสำคัญเช่นเดียวกับการเรียนรู้เนื้อหาสาระต่างๆ การเรียนรู้เกี่ยวกับกระบวนการเป็นการช่วยให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมทางด้านสติปัญญาอีกทางหนึ่ง

ส่วนที่ 5 A = Application หมายถึง การนำความรู้ที่ได้เรียนรู้ไปประยุกต์ใช้ ซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนได้รับประโยชน์จากการเรียน และช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้เพิ่มเติมขึ้นเรื่อยๆ กิจกรรมการเรียนรู้ที่มีเพียงการสอนเนื้อหาสาระให้ผู้เรียนเข้าใจโดยขาดกิจกรรมการนำความรู้ไปประยุกต์ใช้จะทำให้ผู้เรียนขาดการเชื่อมโยงระหว่างทฤษฎีกับการปฏิบัติ ซึ่งจะทำให้การเรียนรู้ไม่เกิดประโยชน์เท่าที่ควร การจัดกิจกรรมที่ช่วยให้ผู้เรียนสามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้นี้ เท่ากับเป็นการช่วยให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้ในด้านหนึ่งหรือหลาย ๆ ด้าน แล้วแต่ลักษณะของสาระและกิจกรรมที่จัด

ผลการสร้างชุดการสอน

ผู้วิจัยดำเนินการสร้างชุดการสอนทั้ง 3 หน่วยเรียนโดยการกำหนดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้หลักการเรียนโดยการปฏิบัติจริง (Learning by Doing) ผ่านการกำหนดใบงานให้ผู้เรียนปฏิบัติมีรายละเอียดดังนี้

กลุ่มเนื้อหาวิชาที่ประกอบด้วย บทนิยาม ทฤษฎี กฎ และข้อตกลง

(Definition, Theory, Law and Property and Assumption)

เนื้อหาวิชาที่เลือก ผู้วิจัยเลือกหน่วยเรียนที่2 เรื่อง ลิมิต (Limit)

ส่วนประกอบของหน่วยเรียนตามรูปแบบของ CIPPA Model ประกอบด้วย 5 ส่วนดังนี้

ส่วนที่ 1 เนื้อหาวิชา

1.1 แสดงเนื้อหาวิชาที่ครบถ้วนตามหลักสูตร

1.2 แสดงหลักการในส่วน การสร้างความรู้ (Construct =C)

-นิยามของลิมิต(ด้วยการแทนค่าฟังก์ชัน) และแบบฝึกไปงานที่1

-นิยามของลิมิต(ด้วยความหมายของ ϵ และ δ) และแบบฝึกไปงานที่2

ส่วนที่ 2 ปฏิสัมพันธ์ของผู้เรียน (Interaction = I)

ให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการแสดงความเข้าใจเรื่องความหมายของลิมิต

2.1 ผู้สอนยกตัวอย่าง 2-3 ตัวอย่างเพื่ออธิบายความหมายของลิมิตด้วยการแทนค่าของฟังก์ชัน

และถามคำถามให้ผู้เรียนตอบคำถามและให้ทำแบบฝึกไปงานที่ 3

2.2 ทำงานกลุ่ม(2คน)เพื่อพิสูจน์ limit ตามโจทย์ที่อาจารย์กำหนดในไปงานที่ 4

ส่วนที่3 ผู้เรียนมีส่วนร่วมทางกาย (Physical Participation = P)

ให้ผู้เรียนออกมาแสดงวิธีทำและอธิบายหน้าห้องเรียนโดยการสุ่มเลือกทีมผู้ทำงาน (1-2 ทีม)

และให้ทีมที่นั่งฟังถามคำถามทีมละอย่างน้อย 1 คำถาม

ส่วนที่ 4 กระบวนการเรียนรู้ (Process Learning = P)

เพื่อให้ผู้เรียนมีโอกาสเรียนรู้ในหลายรูปแบบของลิมิตของฟังก์ชันซึ่งมีความคิดรวบยอดและลักษณะฟังก์ชันแตกต่างกันดังนี้

4.1 ลิมิตซ้าย-ขวา (ใบงานที่ 5)

4.2 ทฤษฎีลิมิต(ใบงานที่ 6)

4.3 ลิมิตที่อนันต์(ใบงานที่ 7)

4.4 ลิมิตของฟังก์ชันประกอบ(ใบงานที่ 8)

4.5 รูปแบบไม่กำหนด(ใบงานที่ 9)

ส่วนที่ 5 การนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ (Application = A)

ผู้วิจัยเลือกการประยุกต์ใช้เรื่อง ความเร็วเฉลี่ยและความเร็วชั่วขณะเพื่ออธิบายประโยชน์ของการนำลิมิตไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน

ใบงานที่ 1 จงหาค่าฟังก์ชันและกรอกข้อมูลในตาราง

1. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

$x < 3$	$f(x)$	$x > 3$	$f(x)$
---------	--------	---------	--------

2. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$x < 2$	$f(x)$	$x > 2$	$f(x)$
---------	--------	---------	--------

ใบงานที่ 2 จงพิสูจน์ลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดดังต่อไปนี้

1. จงแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow (-1)} (2x + 3) = 1$

กำหนดค่า ε	จะได้ค่า y	คำนวณย้อนหาค่า x	หาค่า δ (เทียบค่า x กับ -1)
------------------------	--------------	--------------------	---

0.1	1.1		
-----	-----	--	--

0.01	1.01		
------	------	--	--

0.001			
-------	--	--	--

0.0001			
--------	--	--	--

0.00001			
---------	--	--	--

หาความสัมพันธ์ระหว่าง ε กับ δ เป็นสมการ

พิสูจน์ลิมิตจากความสัมพันธ์ที่ได้

2. จงแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 0} (5 - 2x) = 5$

กำหนดค่า ε	จะได้ค่า y	คำนวณย้อนหาค่า x	หาค่า δ (เทียบค่า x กับ 0)
------------------------	--------------	--------------------	-------------------------------------

หาความสัมพันธ์ระหว่าง ε กับ δ เป็นสมการ

พิสูจน์ลิมิตจากความสัมพันธ์ที่ได้

ใบงานที่ 3 จงเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ แล้วพิจารณาค่า $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (ถ้าลิมิตมีค่า)

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} 1 & ; x < 0 \\ 1+x & ; x \geq 0 \end{cases} ; a=0$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} 2x & ; x < 1 \\ 3-x & ; x \geq 1 \end{cases} ; a=1$$

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & ; x < 2 \\ 1 & ; x \geq 2 \end{cases} ; a=2$$

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x-1} & ; x \neq 1 \\ -4 & ; x = 1 \end{cases} ; a=1, 2$$

$$5. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & ; x \neq 0 \\ -4 & ; x = 0 \end{cases} ; a=0$$

เฉลยแบบฝึกหัด

1) 1, 1, 1 2) 2, 2, 2 3) 4, 1, ไม่มีค่า

4) 4, 4, 4 5) 5, 5, 5 5) -1, 1, ไม่มีค่า

ใบงานที่ 4 จงพิสูจน์ค่าลิมิตจากนิยามของลิมิต

นิยาม

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ แล้วสามารถหาค่า $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{แล้ว} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

จงใช้นิยามของลิมิตเพื่อพิสูจน์ว่า 1. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$

2. $\lim_{x \rightarrow (-1)} (2 - x) = 3$

ใบงานที่ 6 จงใช้ทฤษฎีลิมิตหาค่าลิมิตที่กำหนดโดยการมอบหมายงานให้ผู้เรียนไปหาโจทย์

คนละ 10 ข้อ

ใบงานที่ 7 จงหาลิมิตต่อไปนี้

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^2 + 2x + 5}}{\sqrt{4x + 3}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{4x^2 + x}}{x}$$

ใบงานที่ 8 จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \log_2(3x^2 + 4)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \pi} \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{4x + 5}$$

ใบงานที่ 9 จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

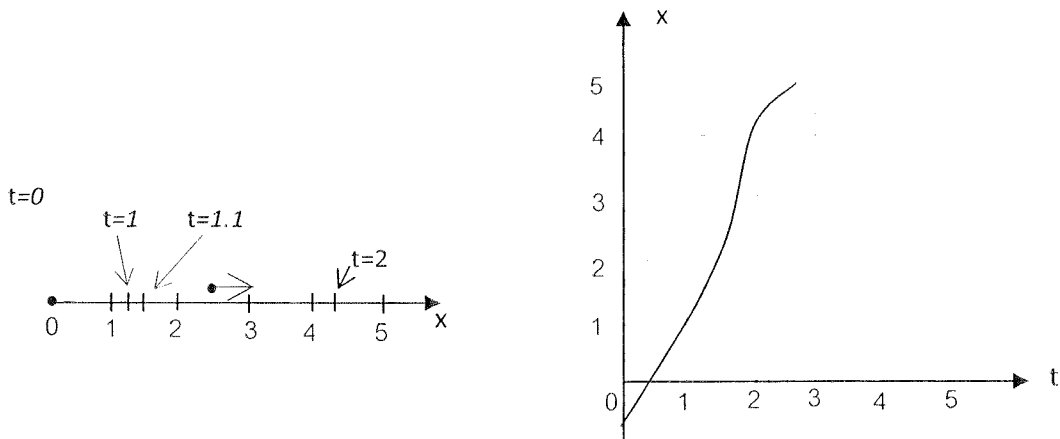
$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3 + \sqrt{x-1}}}{x-2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt{2x-1} - \sqrt{4x-3}}$$

ใบงานที่ 10 ความเร็วในการเคลื่อนที่

อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวอนขณะเวลา t ใดๆ ได้ระยะทาง x ดังรูปที่ 1 (ซ้าย) ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาในการเคลื่อนที่กับเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ได้ดังรูปที่ 2 (ขวา)



จากการสังเกตการเคลื่อนที่ ให้ t เป็นเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่มีหน่วยเป็นนาที x เป็นระยะทางในการเคลื่อนที่มีหน่วยเป็นเมตรเมื่ออนุภาคเริ่มเคลื่อนที่ ($t = 0$) ให้จุดเริ่มของการเคลื่อนที่เป็น 0 ($x = 0$) และขณะเวลา $t = 1, t = 1.1$ และ $t = 2$ นาที ได้ระยะทางในการเคลื่อนที่เป็น $1.2, 1.5$ และ 4.2 เมตรตามลำดับ ความเร็วในการเคลื่อนที่ คือ อัตราส่วนของระยะทางในการเคลื่อนที่ต่อเวลาในการเคลื่อนที่ จากรูปที่ 3.1.2 ในช่วงเวลา $[0, 1]$ อนุภาคเคลื่อนที่ได้ 1.2 เมตร ดังนั้น ความเร็วเฉลี่ยเท่ากับ $\frac{1.2}{1} = 1.2$ เมตร/นาที ในทำนองเดียวกัน ในช่วงเวลาดังแต่ $t = 1$ ถึง $t = 1.1$ อนุภาคเคลื่อนที่ได้ระยะทางเท่ากับ 1.5 และ 1.2 ได้

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1.5 - 1.2}{1.1 - 1.0} = \frac{0.3}{0.1} = 3$$

นั่นคือในช่วงเวลา $t = 1$ ถึง $t = 1.1$ นั้นอนุภาคมีความเร็ว 3 เมตร/นาที ซึ่งความเร็วที่กล่าวถึงนี้หมายถึงความเร็วเฉลี่ยของอนุภาค แต่ถ้าต้องการหาความเร็วขณะใดขณะหนึ่งนั้น Δt ต้องเล็กมาก ซึ่งหมายถึง $\Delta t \rightarrow 0$ นั่นเอง เมื่อช่วงเวลา Δt ใดๆ วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง Δx

ให้ V_{ave} หมายถึงความเร็วเฉลี่ยแล้ว $V_{ave} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

และ V_{ms} หมายถึงความเร็วขณะใดขณะหนึ่งแล้ว $V_{ms} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ □

กลุ่มเนื้อหาวิชาที่ประกอบด้วย กลุ่มเนื้อหาวิชาเพื่อการปฏิบัติหรือฝึกทักษะตามนิยามหรือทฤษฎี

(Practice Mathematics Skill)

เนื้อหาวิชาที่เลือก ผู้วิจัยเลือกหน่วยเรียน เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (Derivative)

ส่วนประกอบของหน่วยเรียนตามรูปแบบของ CIPPA Model ประกอบด้วย 5 ส่วนดังนี้

ส่วนที่ 1 เนื้อหาวิชา

1.3 แสดงเนื้อหาวิชาที่ครบถ้วนตามหลักสูตร

1.4 แสดงหลักการในส่วน การสร้างความรู้ (Construct =C)

-นิยามของอนุพันธ์ และแบบฝึกใบงานที่ 1

-ใช้หลักการการพิสูจน์ แบบ Induction เพื่อสรุปสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ส่วนที่ 2 ปฏิสัมพันธ์ของผู้เรียน (Interaction = I)

ให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการแสดงความเข้าใจเรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

2.1 ผู้สอนยกตัวอย่าง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยการสูตร และถามคำถามให้ผู้เรียนตอบ

คำถามและให้ทำแบบฝึกใบงานที่ 2 (ซึ่งเป็นการฝึกทำโจทย์ที่คล้ายกับตัวอย่างซึ่งผู้วิจัยจะ

เรียกว่าเป็นการฝึกทักษะในแนวนอน=Horizontal Concept)

2.2 ทำงานกลุ่ม(2คน)ในใบงานที่ 3 ซึ่งผู้วิจัยจะกำหนดโจทย์ให้ครอบคลุม ฟังก์ชันทุกชนิดตาม

สูตรที่ได้สรุปไว้แต่โจทย์จะมีความยากขึ้นและเฉพาะเจาะจงแต่ละประเภทของฟังก์ชัน

(ผู้วิจัยจะเรียนว่าการฝึกทักษะในแนวตั้ง=Vertical Concept)

ส่วนที่ 3 ผู้เรียนมีส่วนร่วมทางกายภาพ (Physical Participation = P)

ผู้วิจัยกำหนดให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้โดยการกำหนดให้ทำแบบฝึกหัดใน

ใบ งานที่ 4 และสุ่มเรียกผู้เรียน 2-3 คนให้ออกมาแสดงวิธีทำหน้าชั้นเรียน

ส่วนที่ 4 กระบวนการเรียนรู้ (Process Learning)

ผู้วิจัยได้กำหนดเนื้อหาและขั้นตอนต่างๆ ตามลำดับเพื่อให้ผู้เรียนมีความเข้าใจเรื่องอนุพันธ์
ดังนี้ (ใบงานที่5)

4.1 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคณิต

4.2 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม

4.3 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันกำลัง

4.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

4.5 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

ส่วนที่ 5 การประยุกต์ใช้เนื้อหาวิชาการหาอนุพันธ์ในชีวิตประจำวัน (Application)

ใบงานที่ 1 นิยามของอนุพันธ์

ข้อ 1 – 10 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดต่อไปนี้โดยบทนิยาม

1. $f(x) = \sqrt{3-2x}$

2. $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

3. $f(x) = \frac{1}{3x+5}$

4. $f(x) = 4 - 2x + 3x^3$

5. $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

6. $g(x) = 2 - \sqrt{x}$

7. $g(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + 5x$

8. $g(x) = \frac{1}{x} - x^2$

9. $g(x) = 3x^2 - x^{\frac{1}{3}}$

10. $g(x) = \sqrt{x} + 2x$

ข้อ 11 – 15 จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = a$ หรือไม่

11. $f(x) = \frac{1}{x-2}$; $a = 2$

12. $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $a = 0$

13. $h(x) = \sqrt{2x-3}$, $a = 2$

14. $h(x) = 4x - 1$; $a \in R$

15. $g(x) = x^3 - 3x + 1$; $a \in R$

คำตอบแบบฝึกหัด

1. $\frac{-1}{\sqrt{3-2x}}$

2. $4x - 4$

3. $\frac{-3}{(3x+5)^2}$

4. $-2 + 9x^2$

5. $\frac{-2}{(x-2)^3}$

6. $\frac{-1}{2\sqrt{x}}$

7. $\frac{-3}{2x^{\frac{3}{2}}} + 5$

8. $\frac{-1}{x^2} - 2x$

9. $6x - \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

10. $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2$

11. ที่ $a = 2$ หาอนุพันธ์ไม่ได้

12. ที่ $a = 0$ หาอนุพันธ์ไม่ได้

13. หาอนุพันธ์ได้

14. หาอนุพันธ์ได้

15. หาอนุพันธ์ได้

ใบงานที่ 3 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = 1 - 2x - x^3$

2. $y = x^5 - 7x^4 + 6x^3 - 2x + 9$

3. $y = 9 - \frac{1}{3x} + \frac{4}{5x^2} + \frac{7}{4x^5}$

4. $s = t^2 - \frac{1}{t} + \frac{3}{t^{1/2}}$

5. $s = (t+3)(t^2 - 4t + 1)$

6. $s = (8t^3 - 9t)(t^7 - 7t^2)$

7. $h = \left(3z^{1/2} - 7\right)\left(z^3 + \frac{2}{z}\right)$

8. $h = \frac{2x-3}{x-7}$

9. $h = \frac{x^2 - 7x + 5}{x+3}$

10. $h = \frac{x^3 - 2x + 8}{x^2 - 7x + 1}$

11. $y = \frac{x+1}{x^2-2}$

12. $w = \frac{2z - 8z^{1/2}}{z^{1/2} + 3}$

13. $r = (3s - 4s^2) \left(\frac{1}{s} + \frac{4}{s^2}\right)$

14. $z = w^3 - \frac{2}{w} + \frac{4}{w^5}$

15. $z = (6y - \sqrt{y})(3 + 4y^2)$

16. $p = 3r^2 - 7r^{4/3}$

17. $q = 8p - \frac{10}{p^2}$

18. $u = 8 - 7v + \frac{5}{v}$

19. $t = 9u^3 - 13u + \frac{7}{u^4}$

20. $v = 12y - \frac{4}{y^2} - \frac{5}{y^3}$

คำตอบแบบฝึกหัด

1. $\frac{dy}{dx} = -2 - 3x^2$

2. $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 28x^3 + 18x^2 - 2$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2} - \frac{8}{5x^3} - \frac{35}{4x^6}$

4. $\frac{ds}{dx} = 2t + \frac{1}{t^2} - \frac{3}{2t^{3/2}}$

5. $\frac{ds}{dt} = (t+3)(2t-4) + (t^2-4t+1)$

6. $\frac{ds}{dt} = (8t^3-9t)(7t^6-14t) + (24t^2-9)(t^7-7t^2)$

7. $\frac{dh}{dz} = \left(3z^{1/2} - 7\right) \left(3z^2 - \frac{2}{z^2}\right) + \left(\frac{3}{2z^{1/2}}\right) \left(z^3 + \frac{2}{z}\right)$

8. $\frac{dh}{dx} = \frac{-11}{(x-7)^2}$

9. $\frac{dh}{dx} = \frac{x^2+6x-26}{(x+3)^2}$

10. $\frac{dh}{dx} = \frac{x^4-14x^3+5x^2-16x+54}{(x^2-7x+1)^2}$

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{-(x^2+2x+2)}{(x^2-2)^2}$

12. $\frac{dw}{dz} = \frac{-12z^{-1/2} + z^{1/2} + 6}{(z^{1/2} + 3)^2}$

13. $\frac{dr}{ds} = (3s-4s^2) \left(\frac{-1}{s^2} - \frac{8}{s^3}\right) + \left(\frac{1}{s} + \frac{4}{s^2}\right) (3-8s)$

14. $\frac{dz}{dw} = 3w^2 + \frac{2}{w^2} - \frac{20}{w^6}$

15. $\frac{dz}{dy} = (6y - \sqrt{y})(8y) + \left(6 - \frac{1}{2\sqrt{y}}\right)(3 + 4y^2)$

16. $\frac{dp}{dr} = 6r - \frac{28}{3}r^{1/3}$

17. $\frac{dq}{dp} = 8 + \frac{20}{p^3}$

18. $\frac{du}{dv} = -7 - \frac{5}{v^2}$

19. $\frac{dt}{du} = 27u^2 - 13 - \frac{28}{u^5}$

20. $\frac{dv}{dy} = 12 + \frac{8}{y^3} + \frac{15}{y^4}$

ใบงานที่ 4 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = (3-x)^{32}$

2. $f(x) = \sqrt{4-5x^2}$

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+3x-x^2}}$

4. $f(x) = \frac{1}{(9-x^2)^4}$

5. $f(x) = (x-5)^{10} \cdot (2x+1)^{12}$

6. $f(x) = (3x-2)^3 (3-x)^5$

7. $f(x) = (2-x)^7 (4x-5)^2$

8. $f(x) = \frac{(1-3x)^2}{(2+5x)^4}$

9. $f(x) = \frac{9x+1}{\sqrt{x-5}}$

10. $f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{3x+2}}$

11. $g(y) = (3y-5)^3 (\sqrt{y}+8)^7$

12. กำหนดให้ $g(u) = 2u^2 - 5u$, $u = 3v+6$, $v = \frac{1}{x-1}$ จงหา $\frac{dg}{dx}$

13. กำหนดให้ $g(v) = \frac{1}{\sqrt{v+1}}$, $v = 2w+5$, $w = (2y+7)^2$ จงหา $\frac{dg}{dy}$

14. กำหนดให้ $p(w) = \frac{1}{w} - w$, $w = 2x^2 - 6$, $x = 9s^2 + 8$ จงหา $\frac{dp}{ds}$

15. กำหนดให้ $x = 3t+5$, $t = \sqrt{y-8}$, $y = 3z-2$, $z = \frac{1}{1-u}$ จงหา $\frac{dx}{du}$

คำตอบแบบฝึกหัด

1. $32(3-x)^{31}$

2. $\frac{-5x}{\sqrt{4-5x^2}}$

3. $\frac{2x-3}{2(2+3x-x^2)^{3/2}}$

4. $\frac{8x}{(9-x^2)^5}$

5. $10(x-5)^9 (2x+1)^{12} + 24(x-5)^{10} (2x+1)^{11}$

6. $9(3x-2)^2 (3-x)^5 - 5(3x-2)^3 (3-x)^4$

7. $-7(2-x)^6 (4x-5)^2 + 8(2-x)^7 (4x-5)$

$$8. \quad \frac{-6(1-3x)}{(2+5x)^4} - \frac{20(1-3x)^2}{(2+5x)^5} \qquad 9. \quad \frac{9}{(x-5)^{1/2}} - \frac{9x+1}{2(x-5)^{3/2}}$$

$$10. \quad \frac{7}{2(3x+2)^{3/2} \sqrt{2x-1}}$$

$$11. \quad 9(3y-5)^2 (\sqrt{y}+8)^7 + \frac{7}{2\sqrt{y}} (3y-5)^3 (\sqrt{y}+8)^6$$

$$12. \quad \frac{-3(4u-5)}{(x-1)^2} \qquad 13. \quad \frac{-4(2y+7)}{(v+1)^{3/2}}$$

$$14. \quad \frac{-72sx(1+w^2)}{w^2} \qquad 15. \quad \frac{9}{2(1-u)^2 \sqrt{y-8}}$$

ใบงานที่ 5 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1) f(x) = \sin 2x + \cos 3x^2 \qquad 2) f(x) = \sec^2 x - 5 \tan^3(1-x)$$

$$3) f(x) = \cot(2x-8) \operatorname{cosec}^3(3-x) \qquad 4) f(x) = \sqrt{1+\sin^2 x}$$

$$5) f(x) = \frac{1+\sin x}{1-\cos x} \qquad 6) f(x) = \frac{\tan 2x - \sin 3x}{\cos 2x + \cot 3x}$$

$$7) f(x) = \cos 2x \cdot \sin^3 x \qquad 8) f(x) = \sec^3 x \cdot \tan^2(1-x)$$

$$9) f(x) = \frac{\cos^2(1-x)}{1+\tan(1-x)} \qquad 10) f(x) = \sec^2(1-x) + \sqrt{1-\cot(1-x)}$$

คำตอบแบบฝึกหัด

$$1) 2 \cos 2x - 6x \sin 3x^2$$

$$2) 2 \sec^2 x \tan x + 15 \tan^2(1-x) \sec^2(1-x)$$

$$3) 3 \cot(2x-8) \operatorname{cosec}^3(3-x) \cot(3-x) - 2 \operatorname{cosec}^2(2x-8) \operatorname{cosec}^3(3-x)$$

$$4) \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

$$5) \frac{\cos x - \sin x - 1}{(1-\cos x)^2}$$

$$6) \frac{(\cos 2x + \cot 3x)(2 \sec^2 2x - 3 \cos 3x) + (\tan 2x - \sin 3x)(2 \sin 2x + 3 \operatorname{cosec}^2 3x)}{(\cos 2x + \cot 3x)^2}$$

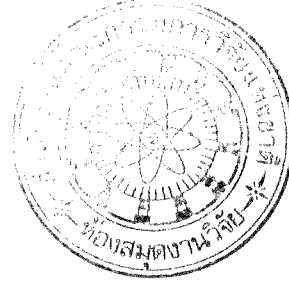
$$7) 3 \cos 2x \sin^2 x \cos x - 2 \sin 2x \sin^3 x$$

$$8) -2 \sec^3 x \tan(1-x) \sec^2(1-x) + 3 \sec^3 x \tan x \tan^2(1-x)$$

$$9) \frac{1+2 \cos(1-x) \sin(1-x) + 2 \sin^2(1-x)}{(1+\tan(1-x))^2}$$

$$10) -2 \sec^2(1-x) \tan(1-x) + \frac{\csc^2(1-x)}{2\sqrt{1-\cot(1-x)}}$$

ใบงานที่ 6 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้



1. $f(x) = 3 \arcsin(1-2x) + \arccos(2x-1)$

2. $f(x) = \operatorname{arcsec}(x-1) - \operatorname{arccosec}(1-x)$

3. $f(x) = \arctan\left(\frac{1-3x}{1+3x}\right)$

4. $f(x) = \frac{1}{1+4x^2} + \arctan 2x$

5. $f(x) = \operatorname{arccot}(x^2-3x)$

6. $f(x) = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x+2}\right)$

7. $f(x) = \arcsin(1+x-x^2)$

8. $f(x) = \arctan(2-3x)$

9. $f(x) = \arccos\left(\frac{2-x}{3}\right)$

10. $f(x) = \operatorname{arcsec}\sqrt{x-1}$

คำตอบแบบฝึกหัด

1. $\frac{-4}{\sqrt{x-x^2}}$

2. 0

3. $\frac{-3}{1+9x^2}$

4. $\frac{8x^2-8x+2}{(1+4x^2)^2}$

5. $\frac{3-2x}{1+(x^2-3x)^2}$

6. $\frac{-1}{\sqrt{1-(x+2)^2}}$

7. $\frac{1-2x}{\sqrt{1-(1+x-x^2)^2}}$

8. $\frac{-3}{5-12x+9x^2}$

9. $\frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

10. $\frac{1}{2|x-1|\sqrt{x-2}}$

ใบงานที่ 7

ข้อ 1-5 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1. \quad y = \ln(2-3x)$$

$$2. \quad y = \ln(\cos x)$$

$$3. \quad y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$4. \quad y = \ln\sqrt{\frac{x^2-3}{x+5}}$$

$$5. \quad y = \ln(x-1)^2 + \ln\sqrt{3-2x}$$

ข้อ 6-10 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม

$$6. \quad y = \sqrt{\frac{2x-3}{5-3x}}$$

$$7. \quad y = \frac{(x-1)^3(3-x)^4}{\sqrt{2-x}}$$

$$8. \quad y = \frac{(x+5)}{(x+2)(4x-9)^3}$$

$$9. \quad y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{2x+1} \cdot \sqrt[4]{3-x}}$$

$$10. \quad y = \frac{(5x-1)^3(2x+7)^2}{(3+2x)^7(1-x)^4}$$

ข้อ 11-15 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$11. \quad f(x) = \log_2(x-1)$$

$$12. \quad f(x) = \log_5\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

$$13. \quad f(x) = \log\left(\frac{3-x}{x-1}\right)$$

$$14. \quad f(x) = \log\frac{x^2-2x+3}{3x^2+4}$$

$$15. \quad f(x) = \log\left(\frac{2-x}{1+x}\right)$$

ใบงานที่ 8 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = 3^{2x}$ เมื่อ $x = 1$

2. $y = 5^{x^2-1} + 7^{9x}$ เมื่อ $x = 0$

3. $y = e^x + e^{4x}$ เมื่อ $x = 0$

4. $y = \frac{e^{2x} - e^{3x}}{e^{2x} + e^{3x}}$ เมื่อ $x = 0$

5. $y = \frac{2^{3x^2+1}}{3^{2x-1}}$ เมื่อ $x = 0$

6. $y = 2^{\arcsin x} - 3^{\arctan x}$ เมื่อ $x = 0$

7. $y = 7^{\cos x} + 5^{\sin x}$ เมื่อ $x = \frac{\pi}{2}$

8. $y = e^{\arctan x}$

9. $y = e^{2+x-x^2}$

10. $y = e^{\arcsin x} + e^{\arccos x}$

11. $y = (2x+1)^{3x}$

12. $y = x^{2x-1}$

13. $y = x^{\tan x} - \cos x$

14. $y = x^2 - (\sin x)^{\cos x}$ เมื่อ $x = \frac{\pi}{2}$

คำตอบฝึกหัด

1. $18 \ln 3$

2. $9 \ln 7$

3. 5

4. $\frac{-1}{2}$

5. $-12 \ln 3$

6. $\ln 2 - \ln 3$

7. $-\ln 7$

8. $\frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$

9. $(1-2x)e^{2+x-x^2}$

10. $\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $6x(2x+1)^{3x-1} + 3(2x+1)^{3x} \ln(2x+1)$

12. $x^{2x-2}(2x+2x \ln x - 1)$

13. $\tan x \cdot x^{\tan x-1} + \sec^2 x \cdot x^{\tan x} \ln x + \sin x$

14. π

กลุ่มเนื้อหาวิชาที่ประกอบด้วย การนำเนื้อหาวิชาไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน

(Usage in daily life)

เนื้อหาวิชาที่เลือก ผู้วิจัยเลือกหน่วยเรียน เรื่อง การหาพื้นที่โดยใช้ปริพันธ์จำกัดเขต

ส่วนประกอบของหน่วยเรียนตามรูปแบบของ CIPPA Model ประกอบด้วย 5 ส่วนดังนี้

ส่วนที่ 1 เนื้อหาวิชา

1.5 แสดงเนื้อหาวิชาที่ครบถ้วนตามหลักสูตร

1.6 แสดงหลักการในส่วน การสร้างความรู้ (Construct =C)

-ปริพันธ์จำกัดเขตและแบบฝึกใบงานที่1

-อธิบายผลบวกริมันน์ และแบบฝึกใบงานที่2

-การหาพื้นที่ภายใต้โค้งโดยการแบ่งพื้นที่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า และแบบฝึกใบงานที่3

ส่วนที่ 2 ปฏิสัมพันธ์ของผู้เรียน (Interaction = I)

ให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการแสดงความเข้าใจเรื่องการหาพื้นที่โดยใช้ปริพันธ์จำกัดเขต

2.1 ผู้สอนยกตัวอย่าง 2-3 ตัวอย่างเพื่ออธิบายความหมายของการหาพื้นที่โดยใช้ปริพันธ์จำกัด

เขต และถามคำถามให้ผู้เรียนตอบคำถาม

2.2 ทำงานกลุ่ม(2คน) และให้ทำแบบฝึกใบงานที่ 4

ส่วนที่ 3 ผู้เรียนมีส่วนร่วมทางกาย (Physical Participation = P)

ผู้วิจัยกำหนดให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้โดยการกำหนดให้ทำแบบฝึกหัดในใบ

งานที่ 5 และสุ่มเรียกผู้เรียน 2-3 คนให้ออกมาแสดงวิธีทำหน้าชั้นเรียน

ส่วนที่ 4 กระบวนการเรียนรู้ (Process Learning)

ผู้วิจัยได้กำหนดเนื้อหาและขั้นตอนต่างๆ ตามลำดับเพื่อให้ผู้เรียนมีความเข้าใจเรื่องปริพันธ์
ดังนี้

4.1 การหาพื้นที่ของบริเวณใต้เส้นโค้งและอยู่เหนือแกน x (ใบงานที่ 5)

4.2 การหาพื้นที่ของบริเวณใต้เส้นโค้งและอยู่ใต้แกน x (ใบงานที่ 6)

4.3 การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง (ใบงานที่ 7)

4.4 การหาพื้นที่เทียบกับแกน y (ใบงานที่ 8)

ส่วนที่ 5 การประยุกต์ใช้เนื้อหาวิชาการหาอนุพันธ์ในชีวิตประจำวัน (Application = A)

ใบงานที่ 1 ปริพันธ์จำกัดเขต

ผู้สอนอธิบายทบทวนกฎ Fundamental Theorem และเทคนิคการหาปริพันธ์รวมทั้งมอบงานให้ผู้เรียนทำโจทย์คำถามต่อไปนี้

1. จงหาค่าของ $\int_0^{\sqrt{15}} (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} x dx$

2. จงหาค่าของ $\int_2^5 \frac{x}{x^2 - 3} dx$

3. จงหาค่าของ $\int_2^6 x(4x + 1)^{\frac{1}{2}} dx$

ใบงานที่ 2 ผลบวกรีมันน์

เพื่อนำสู่บทเรียนการหาพื้นที่ของบริเวณในระนาบเมื่อผู้สอนได้อธิบายผลบวกรีมันน์แล้วให้ผู้เรียนฝึกทำโจทย์ดังนี้

แบบฝึกทักษะ กำหนดให้ $f(x) = x^2$ ซึ่งสามารถหาค่าได้บนช่วงปิด $[2, 6]$

จงหาผลบวกรีมันน์เมื่อแบ่งช่วงปิดของโดเมนออกเป็น 4 ส่วน และ 8 ส่วน

เท่าๆกันดังรูป (Lower Sum)

แบบฝึกทักษะ กำหนดให้ $f(x) = x^2$ ซึ่งสามารถหาค่าได้บนช่วงปิด $[2, 6]$

จงหาผลบวกรีมันน์เมื่อแบ่งช่วงปิดของโดเมนออกเป็น 4 ส่วน และ 8 ส่วน

เท่าๆกันดังรูป (Upper Sum)

ข้อสรุป เมื่อผู้เรียนหาคำตอบทั้งในส่วน Lower Sum และ Upper Sum ให้ผู้เรียนเปรียบเทียบคำตอบ

และหาข้อสรุปกรณีี่แบ่งช่วงปิดของโดเมนออกเป็นช่วงจำนวนมาก

ใบงานที่ 3 การหาพื้นที่โดยการแบ่งเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า n รูป ($n \rightarrow \infty$)

ตัวอย่าง กำหนดให้ $y = f(x)$ ที่กำหนดโดยสมการ $y = x$ ที่สามารถหาค่าได้บนช่วงปิด $[0, 2]$

จงแบ่งช่วงปิดดังกล่าวออกเป็น n ช่วงเท่าๆกัน และใช้ผลบวกรีมันน์แบบสูง(Upper Sum)

และหาผลบวกเปรียบเทียบกับการใช้ปริพันธ์จำกัดเขต

ข้อสรุป ค่าผลบวกรีมันน์เมื่อ $n \rightarrow \infty$ จะมีค่าเท่ากับ $\int_0^2 f(x) dx$

ใบงานที่ 4 การหาพื้นที่ของรูปทรงเรขาคณิตโดยใช้ปริพันธ์และเทียบกับสูตร

จงหาพื้นที่ของบริเวณที่อยู่ใต้เส้นโค้งที่กำหนดต่อไปนี้

1. $f(x) = 2x$ บนช่วงปิด $[0, 2]$

$$\int_0^2 2x \, dx = [x^2]_0^2 = 2^2 - 0 = 4$$

เปรียบเทียบกับหาพื้นที่สามเหลี่ยมที่มีฐานยาว 2 หน่วย สูง 4 หน่วย
โดยการเขียนกราฟ

2. $y = f(x)$ ที่กำหนดโดยสมการ $x^2 + y^2 = 4$

เปรียบเทียบกับคำตอบกับการหาพื้นที่ของวงกลมจากสูตร πr^2

ใบงานที่ 5 การหาพื้นที่ภายใต้โค้งและอยู่เหนือแกน X

ให้ผู้เรียนเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้และหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งและอยู่เหนือแกน x บนช่วงของโดเมนที่กำหนด

1. $f(x) = x^2 + 4, x \in [0, 3]$

2. $f(x) = e^x + 1, x \in [0, e]$

3. $f(x) = \sin(2x), x \in [0, \pi]$

ใบงานที่ 6 การหาพื้นที่ภายใต้โค้งและอยู่ใต้แกน X

เพื่อเป็นการทบทวนเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณที่อยู่เหนือแกนและบริเวณที่อยู่ใต้แกนโดยใช้
โจทย์

จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $f(x) = x^2 - 4$

1. บนช่วงปิด $[0, 4]$

2. บนช่วงปิด $[-2, 4]$

ใบงานที่ 7 การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

1. จงหาพื้นที่ของบริเวณระหว่างเส้นโค้ง $f(x)=2x+3$ และ $y=x^2$ บนช่วงปิด $\left[\frac{1}{2}, 2 \right]$
2. จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y=5-2x^2$ และ $y=x^2-7$
3. จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y=\cos(x)$ และแกน x บนช่วงปิด $[0, \pi]$

ใบงานที่ 8 การหาพื้นที่เทียบกับแกน Y

จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y^2 = 4x$ และ $2x - y = 4$