สมบัติของพหุนามบนฟิลด์อันดับที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นลบ

(Properties of polynomials over ordered fields with non-negative coefficients)

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

ปีงบประมาณ ๒๕๕๕

รายงานผลการวิจัย

โครงการวิจัยสมบัติของพหุนามบนฟิลด์อันดับที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นลบ

(Properties of polynomials over ordered fields with non-negative coefficients)

โดย

นางกุลประภา ศรีหมุด

นางสาวธาวัลย์ อัมพวา

ศาสตราจารย์ ดร.วิเชียร เลาหโกศล

สนับสนุนโดย

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

ปีงบประมาณ ๒๕๕๕

กิตติกรรมประกาศ

(ACKNOWLEDGEMENT)

โครงการวิจัยสมบัติของพหุนามบนฟิลด์อันดับที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นลบ (Properties of polynomials over ordered fields with non-negative coefficients) ได้รับทุนสนับสนุนจาก สำนักงานกรรมการวิจัยแห่งชาติ และมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2555 ซึ่งสอดคล้องกับนโยบายของรัฐบาล ในการพัฒนานวัตกรรมและองค์ความรู้ใหม่ทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์

ขอขอบคุณ ศาสตราจารย์ ดร.วิเชียร เลาหโกศล อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ผู้ร่วมวิจัยที่คอยให้คำแนะนำต่างๆ ในการทำวิจัย และนางสาวธาวัลย์ อัมพวา ผู้ร่วมวิจัยที่ร่วมก้าวผ่านอุปสรรคต่างๆมาด้วยกัน

กุลประภา ศรีหมุด

หัวหน้าโครงการวิจัย

Properties of polynomials over ordered fields with non-negative coefficients

Kulprapa Srimud[1], Tawan Ampawa[2] and Vichian Laohakosol[3]

[1,2]Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Rajamangala University of Technology Thanyaburi, Thailand

[3]Department of Mathematics, Kasetsart University, Bangkok, Thailand

E-mail: [1]kulprapa_s@hotmail.com, [2]tawan08@gmail.com and [3]fscivil@ku.ac.th

Abstract

This research project deals with polynomials with nonnegative coefficients over an ordered field. Certain relations between the researches work of Beli [3] and Brunotte [4, 5] are discovered.

The 2007 work of Beli [3] investigates polynomials with nonnegative coefficients over an ordered field. When applied to the field of real numbers, we have

Theorem. If $P(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ and $|P|(x)=\sum_{i=0}^{n}|a_i|x^i \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ where $a_i \neq 0$ $(i=1,2,3,\ldots,n)$, then there is a polynomial $Q \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]\setminus\{0\}$ such that $PQ \in \mathbb{R}_+[\mathrm{X}]$ if and only if there is a positive rational number ε with $\frac{|P(x)|}{|P|(x)} > \varepsilon$ for each positive real number x.

The 2009 work of Brunotte [4] is the discovery a real polynomial having proper complex roots or negative real roots can be turned into a polynomial with real positive coefficients by multiplying with a suitable polynomial, i.e.,

Theorem. If $f \in \mathbb{R}[X]$ has proper complex roots or nonnegative real roots, then there is a natural number m such that $(1+x)^m f(x)$ is a polynomial with positive coefficients.

In 2010, Brunotte [5] extended his 2009 work by proving:

Theorem. If $b, c, r \in \mathbb{R}$ are such that $r > 0$, $b^2 < 4c$, then there is a nonnegative integer n such that the polynomial $(x+r)^n (x^2 + bx + c)$ has only positive coefficients. Moreover, such integer can be chosen to satisfy $n \le \max\left\{ \left\lceil \frac{1-\beta}{\alpha} \right\rceil, \lceil 1-\gamma \rceil, 0 \right\}$, where $\alpha = 4\delta c - (2c - br)^2$, $\beta = 12\delta c - 2\sigma(2c - br)$, $\gamma = 8\delta c - \sigma^2$, $\delta = r^2 - br + c$, $\sigma = 3c - 2br + r^2$

The main research finding is an alternative proof of Beli's theorem which is simpler and is based on the use of Brunotte's results.

Keywords: polynomials, coefficients of a polynomial, roots of a polynomial, ordered fields

สมบัติของพหุนามบนฟิลด์อันดับที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นลบ

กุลประภา ศรีหมุด[1], ธาวัลย์ อัมพวา[2] และ วิเชียร เลาหโกศล[3]

[1,2]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

[3]ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

อีเมล์: [1]kulprapa_s@hotmail.com, [2]tawan08@gmail.com และ [3]fscivil@ku.ac.th

บทคัดย่อ

โครงการวิจัยนี้เป็นการศึกษาพหุนามบนฟิลด์อันดับที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นลบ การวิจัยพบความสัมพันธ์ระหว่างผลงานวิจัยของ Beli [3] และ Brunotte [4, 5]

งานวิจัยของ Beli [3] ที่ตีพิมพ์ในปี 2007 เป็นการศึกษาพหุนามบนฟิลด์อันดับที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นลบ เมื่อประยุกต์ใช้กับฟิลด์ของจำนวนจริง จะได้

ทฤษฎีบท ถ้า $P(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ และ $|P|(x)=\sum_{i=0}^{n}|a_i|x^i \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ โดยที่ $a_i \neq 0$ สำหรับทุก $i=1,2,3,\ldots,n$ แล้วจะมีพหุนาม $Q \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]\setminus\{0\}$ ซึ่งทำให้ $PQ \in \mathbb{R}_+[\mathrm{X}]$ ก็ต่อเมื่อ จะมีจำนวนตรรกยะบวก ε ซึ่งทำให้ $\frac{|P(x)|}{|P|(x)} > \varepsilon$ สำหรับทุกจำนวนจริงบวก x

งานวิจัยในปี 2009 ของ Brunotte [4] คือการค้นพบว่า พหุนามที่มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนแท้หรือจำนวนจริงลบ สามารถปรับให้เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นลบได้โดยการคูณด้วยพหุนามที่เหมาะสม กล่าวคือ

ทฤษฎีบท. ให้ $f \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ เป็นพหุนามที่มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนแท้หรือจำนวนจริงลบ จะได้ว่า มีจำนวนนับ m ซึ่งทำให้พหุนาม $(1+x)^m f(x)$ มีสัมประสิทธิ์ทุกจำนวนเป็นจำนวนจริงบวก

ต่อมาในปี 2010 Brunotte [5] ได้ตีพิมพ์ผลงานวิจัย ขยายงานวิจัยในปี 2009 ดังนี้

ทฤษฎีบท. ให้ $b, c, r \in \mathbb{R}$ โดยที่ $r > 0$ และ $b^2 < 4c$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็มไม่ติดลบ n ซึ่งทำให้พหุนาม $(x+r)^n \left(x^2 + bx + c\right)$ มีสัมประสิทธิ์ทุกจำนวนเป็นจำนวนจริงบวก และสามารถเลือกจำนวนเต็มนี้ได้โดยที่ $n \le \max\left\{ \left\lceil \frac{1-\beta}{\alpha} \right\rceil, \lceil 1-\gamma \rceil, 0 \right\}$ เมื่อ $\alpha = 4\delta c - \left(2c - br\right)^2$, $\beta = 12\delta c - 2\sigma\left(2c - br\right)$, $\gamma = 8\delta c - \sigma^2$ และ $\delta = r^2 - br + c$, $\sigma = 3c - 2br + r^2$ ผลวิจัยหลักที่ได้รับ คือการพิสูจน์ทฤษฎีบทของ Beli ด้วยวิธีการที่ง่ายกว่าเดิมโดยใช้ทฤษฎีบท ของ Brunotte

คำสำคัญ : พหุนาม, สัมประสิทธิ์ของพหุนาม, รากของพหุนาม, ฟิลด์อันดับ

สารบัญ

(CONTENTS)

		Page
ACKNOWLEDGEMENT		**i**
ABSTRACT		**ii**
CHAPTER		
1	**INTRODUCTION**	**1**
	1.1 Background	1
	1.2 Objective of the study	3
	1.3 Scope of the study	3
	1.4 Research Procedure	3
2	**LITERATURE REVIEW**	**4**
3	**THEORETICAL BACKGROUND**	**7**
4	**MAIN RESULT**	**18**
5	**CONCLUSION**	**21**
REFERENCES		**23**
BIOGRAPHY		**24**