

บทที่ 3

โพลีโนเมียลแบบเบิร์นสไตน์

3.1 บทนำ

การออกแบบวงจรกรองความถี่แอนาล็อก เราจะต้องตระหนักถึงคุณสมบัติเฟสเชิงเส้น (Linear Phase) เป็นอย่างมากโดยปกติจะแก้ปัญหาเฟสไม่เป็นเชิงเส้น โดยการเลือกทฤษฎีการประมาณค่าที่นำมาออกแบบวงจรกรองความถี่แบบแอนาล็อก เช่น ทฤษฎีการประมาณค่าที่มีเฟสเชิงเส้นแบบเบสเซล ทอมสัน (Bessel-Thomson) แต่ในโครงการวิจัยนี้จะนำเสนอทฤษฎีการประมาณค่าแบบเบิร์นสไตน์หรือเบิร์นสไตน์โพลีโนเมียลเพื่อใช้ในการออกแบบวงจรกรองความถี่แบบแอนาล็อก ซึ่งมีลักษณะเด่นในการออกแบบคือได้วงจรกรองความถี่ที่มีความราบเรียบที่สุด (Maximally Flat) ประกอบกับข้อได้เปรียบอื่นๆ เช่น สามารถควบคุมคุณลักษณะทางขนาดและเฟส ความเป็นเชิงเส้นของเฟส ความยืดหยุ่นในการเปลี่ยนแปลงเฟส โดยใช้พารามิเตอร์ 3 ตัวในการควบคุม คือ n K และ ϵ ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีเบิร์นสไตน์ การประยุกต์ใช้เบิร์นสไตน์โพลีโนเมียลออกแบบวงจรกรองความถี่แอนาล็อก ผลจากการปรับเปลี่ยนพารามิเตอร์ที่ใช้ควบคุม และการเปรียบเทียบประสิทธิภาพกับวงจรกรองความถี่ที่มีอยู่เดิม เช่น วงจรกรองความถี่แบบบัตเตอร์เวิร์ท วงจรกรองความถี่แบบเชบีเชฟ และวงจรกรองความถี่แบบเบสเซล ทอมสัน

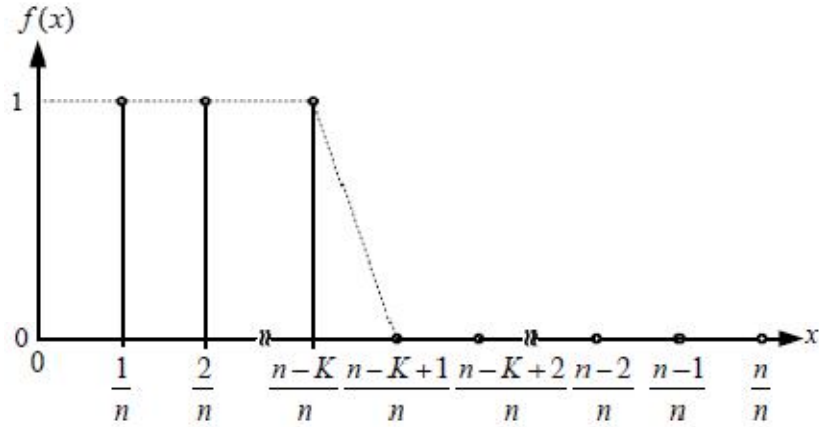
3.2 โพลีโนเมียลแบบเบิร์นสไตน์

โพลีโนเมียลแบบเบิร์นสไตน์ (Bernstein Polynomials) เกิดขึ้นจากทฤษฎีการประมาณที่มีรูปแบบฟังก์ชันแบบต่อเนื่อง $f(x)$ ในช่วงปิดที่ $[0,1]$ โพลีโนเมียลแบบเบิร์นสไตน์อันดับที่ n^{th} ($n \geq 1$) สามารถแสดงได้ดังสมการ

$$B_n(f; x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \quad (3.1)$$

$$\text{เมื่อ } i = 0, 1, \dots, n \text{ และ } \binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$$

เมื่อพิจารณาฟังก์ชัน $f(x)$ ในที่นี้ทำการประมาณฟังก์ชันให้เป็นแบบความถี่ต่ำผ่าน (Low Pass Function) มีขอบเขตอยู่ที่ $[0,1]$ เพราะฉะนั้นฟังก์ชัน $f\left(\frac{i}{n}\right)$ จึงมีค่าไม่เกิน n แสดงดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ฟังก์ชันความถี่ต่ำผ่าน

เมื่อ K คือจำนวนจุดที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาที่ทำให้ฟังก์ชันการประมาณมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นเขียนฟังก์ชันการประมาณความถี่ต่ำผ่านได้เป็น

$$f\left(\frac{i}{n}\right) = \begin{cases} 1, & 0 \leq i \leq n-K \\ 0, & n-K+1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (3.2)$$

แทนสมการที่ (3.2) ลงในสมการที่ (3.1) จะได้

$$B_{n,K}(f;x) = \sum_{i=0}^{n-K} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \quad (3.3)$$

จากสมการที่ (3.3) สามารถจัดรูปสมการใหม่โดยใช้โพลีโนเมียลแบบ Herrmann

$$B_{n,K}(f;x) = (1-x)^K \sum_{i=0}^{n-K} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i-K} \quad (3.4)$$

จัดรูปให้เข้าใจง่ายขึ้นเพื่อนำไปใช้ในการแก้สมการทางคณิตศาสตร์

$$B_{n,K}(f;x) = (1-x)^K \sum_{i=0}^{n-K} \binom{K+i-1}{i} x^i \quad (3.5)$$

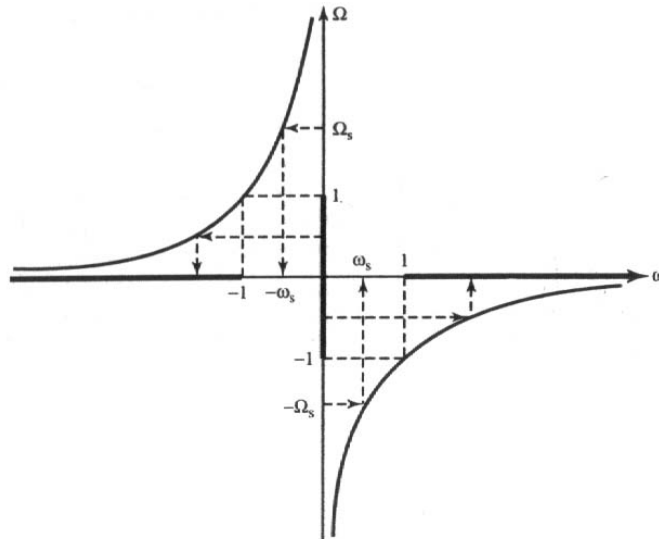
ทำการแปลง (Transformation) x จากช่วง $[0,1]$ ให้เป็น Ω ที่มีช่วงหรือขอบเขตอยู่ที่ $[0, \infty]$

$$x = \frac{\Omega^2}{1 + \Omega^2} \quad (3.6)$$

นำสมการที่ (3.6) แทนลงในสมการที่ (3.5) ได้เป็น

$$B_{n,K}(f; \Omega) = \frac{\sum_{i=0}^{n-K} \binom{n}{i} \Omega^{2i}}{(1 + \Omega^2)^n} \quad (3.7)$$

จากสมการที่ (3.7) Ω เป็นแกนความถี่ (Ω -axis) ของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่านต้นแบบ (Low Pass Prototype Filter) ซึ่งสามารถแปลงเข้าสู่วงจรกรองความถี่สูงผ่าน (Low Pass to High Pass Transformation) แสดงดังภาพที่ 3.2



รูปที่ 3.2 การแปลงแกนความถี่จาก $\Omega \rightarrow \omega$

จากรูปที่ 3.2 แสดงความสัมพันธ์ของการแปลงระหว่างแกนความถี่ Ω ของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่านต้นแบบ กับแกนความถี่ ω ของวงจรกรองความถี่สูงผ่านจะเห็นว่าแถบผ่าน (Pass Band) ของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่านต้นแบบอยู่ที่ $-1 \leq \Omega \leq 1$ ส่วนแถบผ่านของวงจรกรองความถี่สูงผ่านจะอยู่ที่ $1 \leq \omega \leq -1$ ดังนั้นเขียนสมการการแปลงได้เป็น

$$\Omega = -\frac{1}{\omega} \quad (3.8)$$

นำสมการที่ (3.8) แทนลงในสมการที่ (3.7) จะได้

$$B_{n,K}(f; \Omega) = \frac{\sum_{i=0}^{n-K} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{\omega}\right)^{2i}}{\left(1 + \frac{1}{\omega^2}\right)^n} \quad (3.9)$$

ฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer Function) แทนด้วย $N(s)$ สามารถหาได้จากคุณลักษณะทางขนาดยกกำลังสอง (Magnitude-squared Characteristics) แทนด้วย $|N(s)|^2$ แสดงดังสมการ

$$|N(s)|^2 = N(s) \cdot N(-s) \quad (3.10)$$

เพราะฉะนั้นในที่นี้จะเริ่มหาฟังก์ชันถ่ายโอนจากคุณลักษณะทางขนาดยกกำลังสองของวงจรรองความถี่ต่ำผ่าน (Low Pass Magnitude-squared Characteristics) ด้วยเหตุเพราะสามารถทำการแปลงเป็นวงจรรองความถี่ชนิดต่างๆ ได้ด้วยวิธีการแปลงความถี่ (Frequency Transformation) แสดงดังสมการ

$$|N(j\omega)|^2 = \frac{H_0^2}{1 + \varepsilon^2 B^2(\omega)} \quad (3.11)$$

โดยที่ $B(\omega)$ คือ โพลีโนเมียลแบบเบิร์นสไตน์ ในสมการที่ (3.9) นำไปแทนลงในสมการที่ (3.11) จะได้

$$|N(j\omega)|^2 = \frac{H_0^2}{1 + \varepsilon^2 \left[\frac{\sum_{i=0}^{n-K} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{\omega}\right)^{2i}}{\left(1 + \frac{1}{\omega^2}\right)^n} \right]^2} \quad (3.12)$$

จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$|N(j\omega)|^2 = \frac{H_0^2 \cdot (1 + \omega^2)^{2n}}{(1 + \omega^2)^{2n} + \varepsilon^2 \omega^{4n} \left(\sum_{i=0}^{n-K} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{\omega}\right)^{2i} \right)^2} \quad (3.13)$$

จากสมการที่ (3.13) เรียกว่าฟังก์ชันถ่ายโอนทางขนาดกำลังสองของวงจรถองความถี่ต่ำผ่านที่ได้จากสมการโพลีโนเมียลแบบเบิร์นสไตน์ จากนั้นนำสมการที่ได้มาหาค่าโพล (Poles) และซีโร่ (Zeros) โดยการแทนค่า $\omega = s / j$ แล้วแก้สมการเลือกค่าโพลและซีโร่ เป็นที่ทราบกันดีว่าถ้าต้องการให้ระบบมีความเสถียรภาพ (Stable System) และมีเฟสต่ำสุด (Minimum Phase) จะต้องเลือกค่าโพลและซีโร่ทางซ้ายของระนาบ s (s-plane) ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีรูปแบบเป็นฟังก์ชันเศษส่วน (Rational Function)

$$N(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{m-1} s^{m-1} + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m} \quad (3.14)$$

เมื่อ $m = 2n$ เป็นอันดับของฟังก์ชันถ่ายโอน

จากสมการที่ (3.13) จะได้เศษเป็น $(s+1)^{2n}$ เพราะฉะนั้นเลือกค่าซีโร่ $s = -1$ นั้นเอง สำหรับค่าโพลสามารถเลือกได้จากการกำหนดค่าพารามิเตอร์ 3 ตัว คือ n K และ ε ของตัวส่วน สรุปได้ว่าการปรับเปลี่ยนหรือเลือกค่าพารามิเตอร์ n K และ ε นั้นสามารถปรับคุณลักษณะทางขนาดและเฟสที่ต้องการได้ โดยจะขอกกล่าวถึงรายละเอียดของการปรับพารามิเตอร์ควบคุมทั้งสามในหัวข้อถัดไป

3.3 การออกแบบวงจรถองความถี่แอนาล็อกโดยใช้โพลีโนเมียลแบบเบิร์นสไตน์

การออกแบบวงจรถองความถี่แอนาล็อกความถี่ต่ำผ่านอันดับ 2 โดยใช้สมการโพลีโนเมียลแบบเบิร์นสไตน์ ในเบื้องต้นได้กำหนดค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ไว้คือ $n=1$ $K=1$ และ $\varepsilon=10$ นำไปแทนลงในสมการที่ (3.13) จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนทางขนาดกำลังสองของวงจรถองความถี่ต่ำผ่านดังสมการที่ (3.15)

$$|N(s)|^2 = \frac{H_0^2 \cdot (1 - s^2)^2}{(1 + \varepsilon^2) s^4 - 2s^2 + 1} \quad (3.15)$$

ในที่นี้เลือกค่า $\varepsilon = 10$ จะได้

$$|N(s)|^2 = \frac{H_0^2 \cdot (1 - s^2)^2}{101s^4 - 2s^2 + 1} \quad (3.16)$$

ทำการเลือกค่าโพลและซีโรทางซ้ายของระนาบ s จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านแบบสมการโพลีโนเมียลแบบเบียร์นสไตน์อันดับ 2 เมื่อ H_0 คือ ค่าคงที่ที่ใช้กำหนดขนาดโดยกำหนดให้ $H_0 = 1$ ดังนี้

$$N(s) = \frac{H_0 \cdot (1+s)^2}{s^2 + 0.4678s + 0.0995} \quad (3.17)$$

การออกแบบวงจรรองความถี่แอนาล็อกความถี่ต่ำผ่านอันดับ 4 โดยใช้เบียร์นสไตน์โพลี-โนเมียล ในเบื้องต้นได้กำหนดพารามิเตอร์ต่างๆ ไว้ดังนี้ คือ $n = 2$ $K = 1$ และ $\varepsilon = 10$ นำไปแทนลงในสมการที่ (3.13) จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนทางขนาดยกกำลังสองของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านคือ

$$|N(s)|^2 = \frac{H_0^2 \cdot (1-s^2)^4}{(1+\varepsilon^2)s^8 + (-4-4\varepsilon^2)s^6 + (6+4\varepsilon^2)s^4 - 4s^2 + 1} \quad (3.18)$$

ในที่นี้เลือกค่า $\varepsilon = 10$ จะได้

$$|N(s)|^2 = \frac{H_0^2 \cdot (1-s^2)^4}{101s^8 - 404s^6 + 406s^4 - 4s^2 + 1} \quad (3.19)$$

ทำการเลือกค่าโพลและซีโรทางซ้ายของระนาบ s จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านแบบเบียร์นสไตน์อันดับ 4 ดังนี้

$$N(s) = \frac{H_0 \cdot (1+s)^4}{s^4 + 3.1532s^3 + 2.9714s^2 + 0.7941s + 0.0995} \quad (3.20)$$

การออกแบบวงจรรองความถี่แอนาล็อกความถี่ต่ำผ่านอันดับ 6 โดยใช้เบียร์นสไตน์โพลีโนเมียล ในเบื้องต้นได้กำหนดพารามิเตอร์ต่างๆ ไว้ดังนี้ คือ $n = 3$ $K = 1$ และ $\varepsilon = 10$ นำไปแทนลงในสมการที่ (3.13) จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนทางขนาดยกกำลังสองของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านคือ

$$|N(s)|^2 = \frac{H_0^2 \cdot (1-s^2)^6}{(1+\varepsilon^2)s^{12} + (-6-6\varepsilon^2)s^{10} + (15+15\varepsilon^2)s^8 + (-20-18\varepsilon^2)s^6 + (15+9\varepsilon^2)s^4 - 6s^2 + 1} \quad (3.21)$$

ในที่นี้เลือกค่า $\varepsilon = 10$ จะได้ว่า

$$|N(s)|^2 = \frac{H_0 \cdot (1-s^2)^6}{101s^{12} - 606s^{10} + 1515s^8 - 1820s^6 + 915s^4 - 6s^2 + 1} \quad (3.22)$$

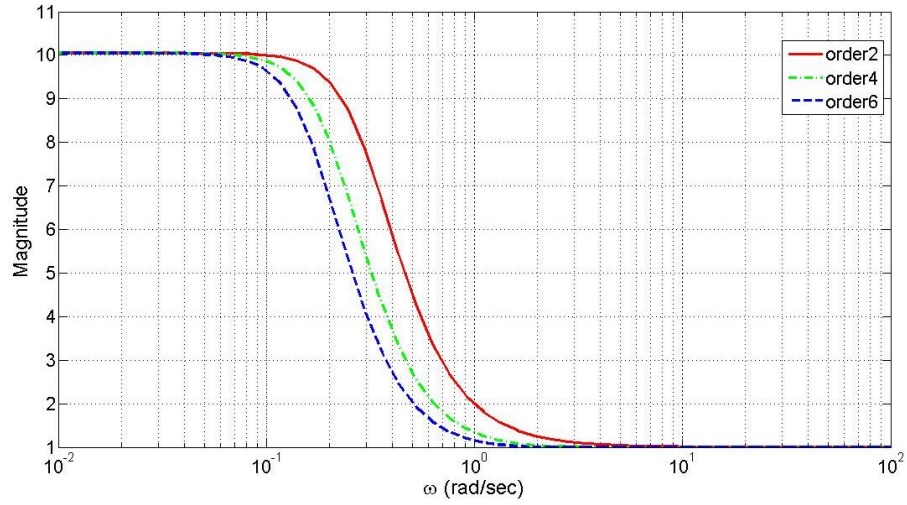
ทำการเลือกค่าโพลและซีโรทางซ้ายของระนาบ s จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านแบบเบียร์นสไตน์อันดับ 6 ดังนี้

$$N(s) = \frac{H_0 \cdot (1+s)^6}{s^6 + 5.3488s^5 + 11.3049s^4 + 11.6035s^3 + 5.6647s^2 + 1.0893s + 0.0995} \quad (3.23)$$

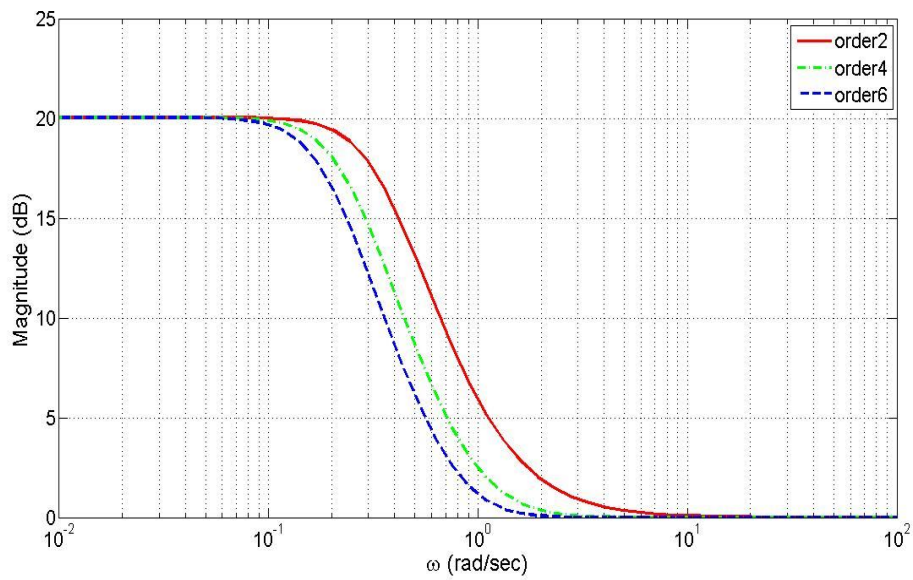
เมื่อ H_0 คือค่าคงที่ที่ใช้กำหนดขนาด

นำสมการที่ (3.17) (3.20) (3.23) ทำการพล็อตกราฟผลตอบสนองทางความถี่ โดยสมมติให้ $H_0=1$ แสดงดังรูปที่ 3.3 รูปที่ 3.4 รูปที่ 3.5 และรูปที่ 3.6 ตามลำดับ

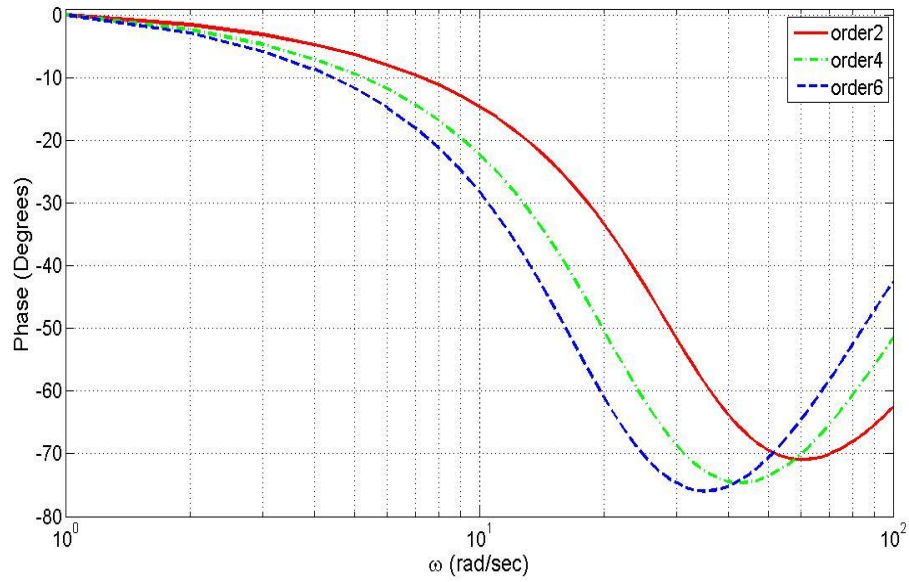
จากรูปที่ 3.3 และ 3.4 แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านแบบเบียร์นสไตน์ อันดับ 2 4 และ 6 จะเห็นว่ากราฟอันดับ 2 มีความราบเรียบที่สุดในทางขนาด (Maximally Flat Magnitude) ทั้งในย่านความถี่แบบผ่าน (Pass-band) และความถี่แถบหยุด (Stop-band) ดังนั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการควบคุมระบบได้ดี เช่น วงจรชดเชยสัญญาณ (Compensating Circuits) รูปที่ 3.5 แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านแบบเบียร์นสไตน์อันดับ 2 4 และ 6 จะเห็นว่ากราฟมีเฟสเชิงเส้น (Linear Phase) ที่สุดในอันดับ 2 และรูปที่ 3.6 แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางเวลาประวิงของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านแบบเบียร์นสไตน์อันดับ 2 4 และ 6 จะเห็นว่ากราฟมีความราบเรียบทางเวลาประวิง (Maximally Flat Delay) ที่สุดในอันดับ 2 และยังมีคุณลักษณะใกล้เคียงค่าคงที่ (Constant Delay Characteristics) เป็นผลต่อเนื่องจากการมีเฟสเชิงเส้นนั่นเอง ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่สำคัญของการใช้งานวงจรรองความถี่แบบแอนาล็อก เพราะฉะนั้นสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในด้านการประมวลผลสัญญาณ (Signal Processing) และการประมวลผลภาพ (Image Processing) นอกจากคุณลักษณะเด่นหลักๆ ทางขนาดเฟส และเวลาประวิงของวงจรรองความถี่แบบเบียร์นสไตน์แล้ว ยังมีข้อได้เปรียบอีกหลายประการเมื่อเทียบกับวงจรรองความถี่แบบอื่น ซึ่งจะได้กล่าวต่อไป



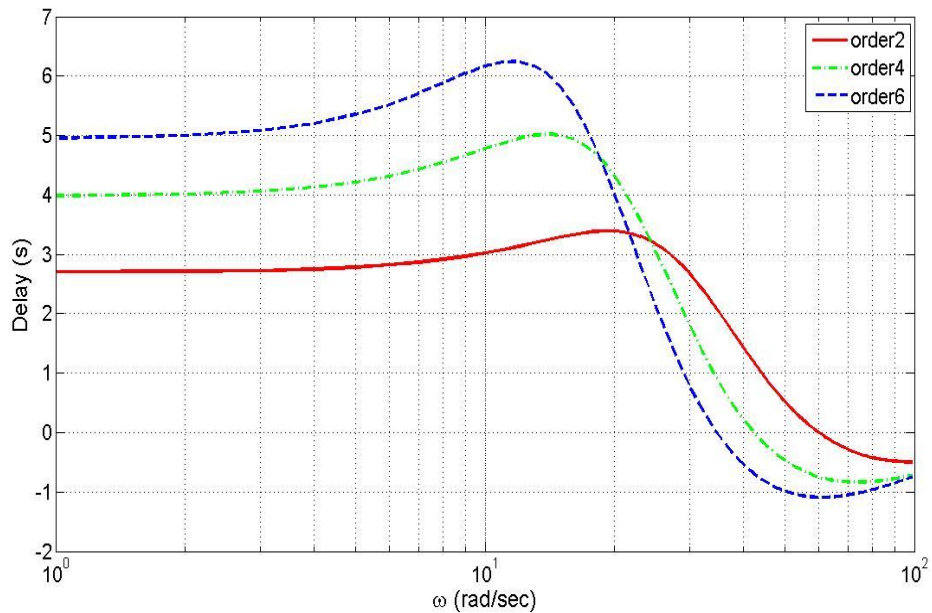
รูปที่ 3.3 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่านแบบเบิร์ตส์ไดน์อันดับ 2 4 และ 6



รูปที่ 3.4 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดในหน่วยเดซิเบลของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่านแบบเบิร์ตส์ไดน์
อันดับ 2 4 และ 6



รูปที่ 3.5 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่านแบบเบิร์ตสไตน์อันดับ 2 4 และ 6



รูปที่ 3.6 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางเวลาประวิงของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่านแบบเบิร์ตสไตน์อันดับ 2 4 และ 6

3.3.1 การปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ ϵ

การเปรียบเทียบผลตอบสนองทางความถี่ของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่านแบบเบิร์ตสไตน์ อันดับ 2

โดยกำหนดให้ $n=1$ และ $K=1$ อันดับ 4 โดยกำหนดให้ $n=2$ และ $K=1$ และอันดับ 6 กำหนดให้ $n=3$ และ $K=1$ แล้วทำการปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ ε จะได้ผลแสดงดังรูปที่ 3.7 รูปที่ 3.8 รูปที่ 3.9 และรูปที่ 3.10 ตามลำดับ

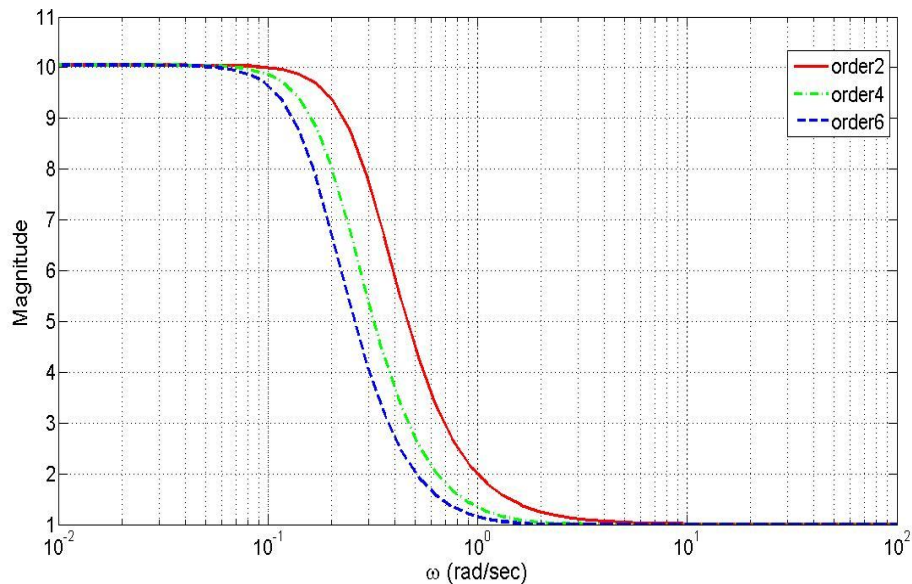
การเปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านแบบเบียร์นสไตน์ เมื่อปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ ε เป็น $\varepsilon=1$ ส่วนค่าคงที่ H_0 จะกำหนดค่าให้มีขนาดเป็น 1 เท่ากันทุกเงื่อนไข ฟังก์ชันถ่ายโอนแสดงได้ดังสมการที่ 3.24 สมการที่ 3.25 และสมการที่ 3.26 ตามลำดับ

$$N(s) = \frac{(1) \cdot (1+s)^2}{s^2 + 1.5538s + 0.7071} \quad (3.24)$$

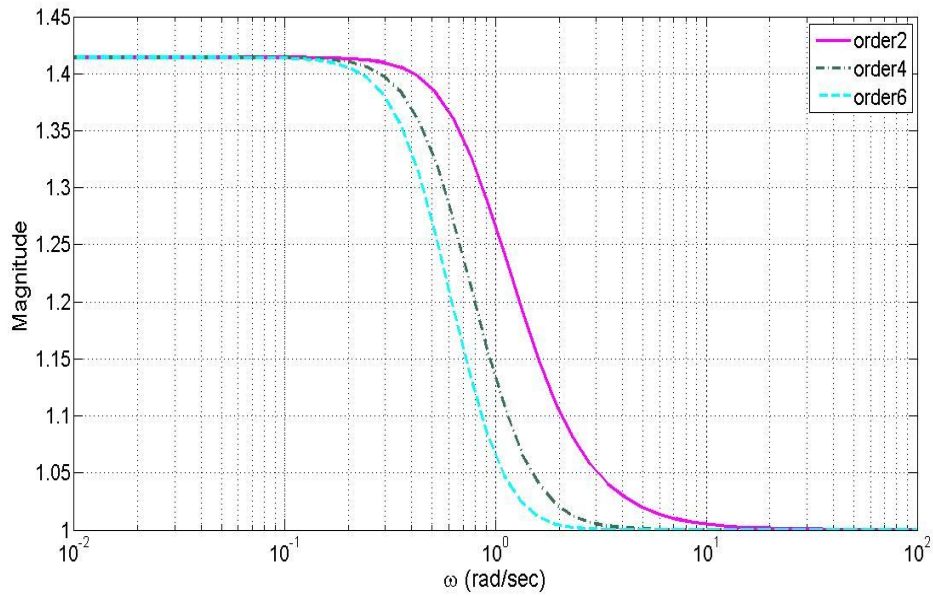
$$N(s) = \frac{(1) \cdot (1+s)^4}{s^4 + 3.7856s^3 + 5.1654s^2 + 3.0504s + 0.7071} \quad (3.25)$$

$$N(s) = \frac{(1) \cdot (1+s)^6}{s^6 + 5.8410s^5 + 14.0586s^4 + 17.7510s^3 + 12.3609s^2 + 4.5258s + 0.7072} \quad (3.26)$$

นำสมการที่ได้มาพล็อตเปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดได้ดังรูปที่ 3.7 จากรูปจะเห็นว่ามีความราบเรียบที่สุดทางขนาดในย่านความถี่แถบผ่านและแถบหยุด นอกจากนั้นการลดทอนในย่านความถี่แถบหยุดยังสามารถปรับเปลี่ยนได้โดยขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ ε นั้นเอง



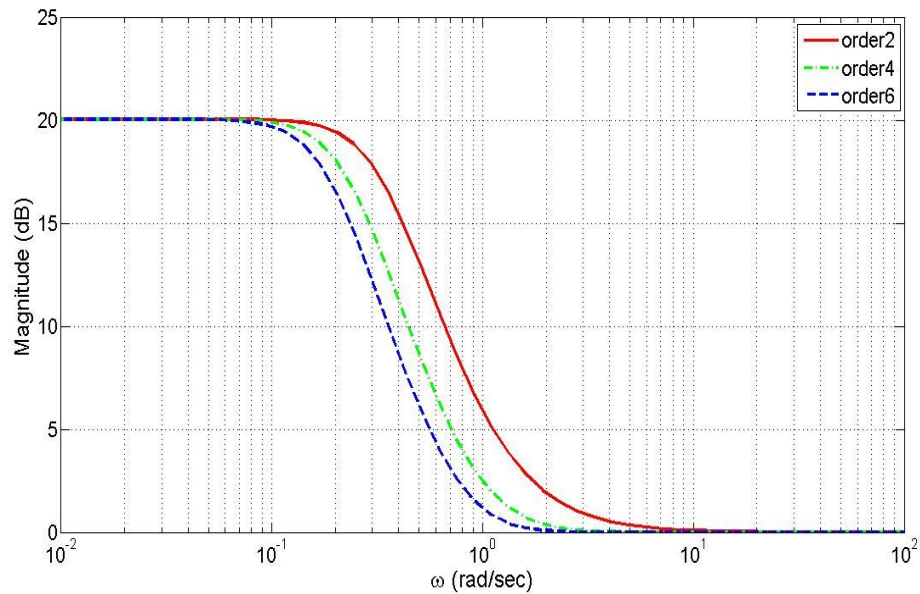
(ก) เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ $\varepsilon = 10$



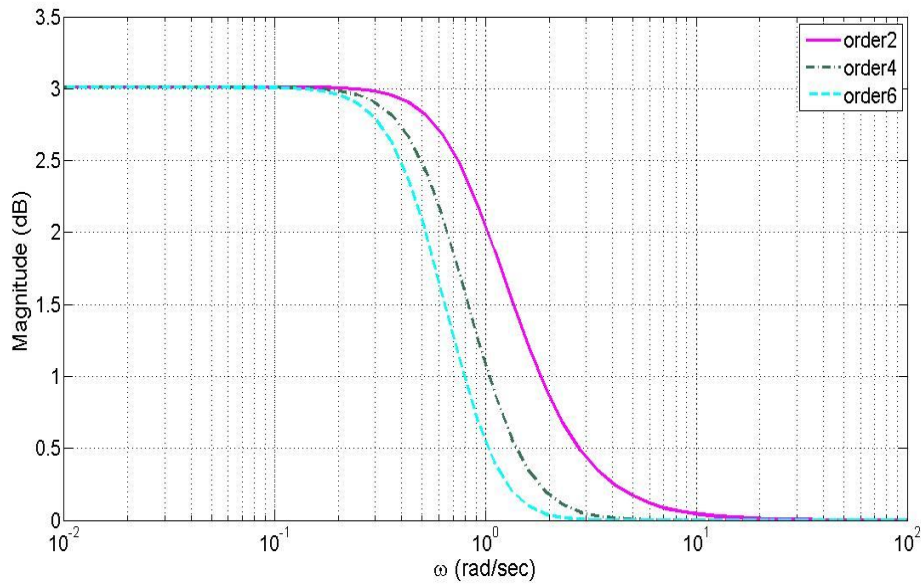
(ข) เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ $\varepsilon = 1$

รูปที่ 3.7 การเปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาด เมื่อเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ ε

จากรูปที่ 3.7 (ก) และ (ข) แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดของวงจรรองความถี่ผ่านแบบเบิร์ตส์ไนด์ เมื่อปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ $\varepsilon = 1$ และ 10 รวมถึงการเปลี่ยนค่า $n = 1, 2$ และ 3 จะเห็นว่ามีความราบเรียบที่สุดทางขนาดในย่านความถี่แถบผ่านและแถบหยุด แต่จะแตกต่างกันในช่วงความถี่เปลี่ยน (Transition Band)

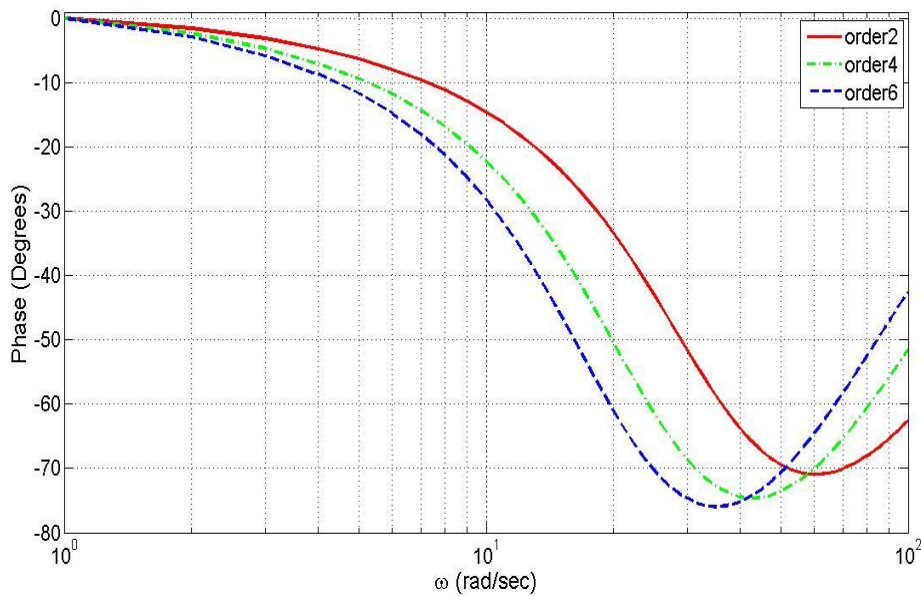


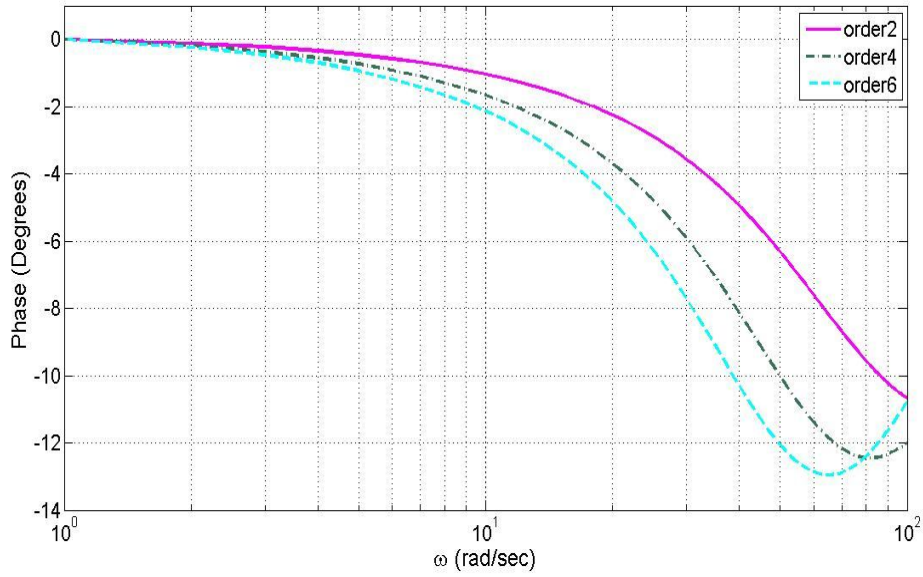
(ก) เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ $\varepsilon = 10$

(ข) เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ $\varepsilon = 1$

รูปที่ 3.8 การเปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดในหน่วยเดซิเบลเมื่อเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ ε

จากรูปที่ 3.8 (ก) และ (ข) แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดในหน่วย เดซิเบลของ วงจรกรองความถี่ผ่านแบบเบิรน์สไตน์ เมื่อปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ $\varepsilon = 1$ และ 10 รวมถึงเปลี่ยนค่า $n = 1, 2$ และ 3 จะเห็นว่ามีความราบเรียบที่สุดทางขนาดในย่านความถี่แถบผ่านและแถบหยุด แต่จะแตกต่างกัน ในช่วงความถี่เปลี่ยน (Transition Band)

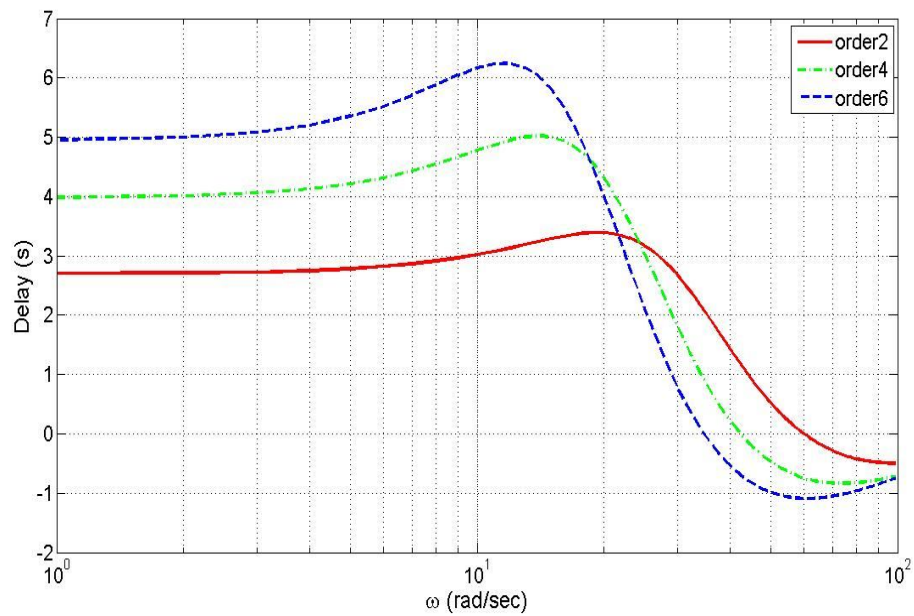
(ก) เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ $\varepsilon = 10$



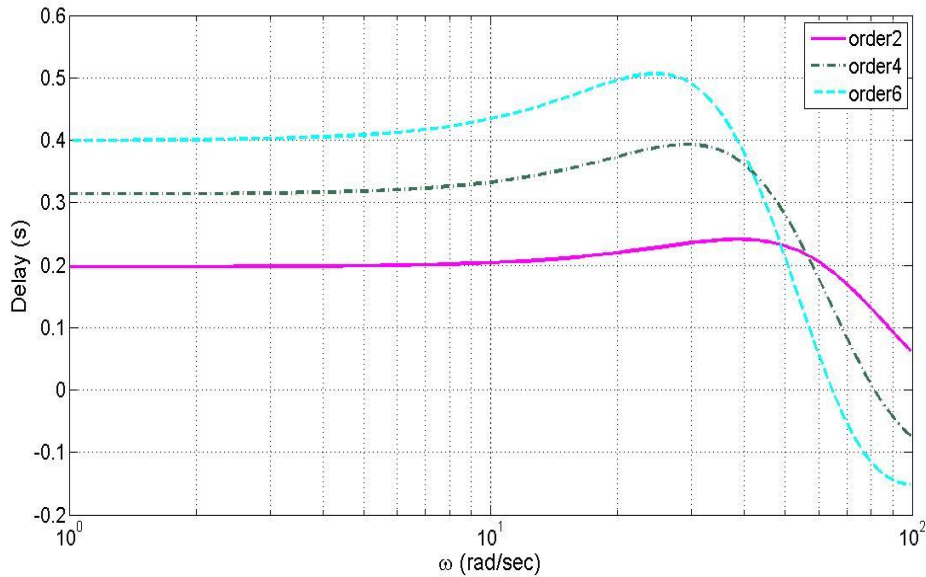
(ข) เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ $\varepsilon = 1$

รูปที่ 3.9 การเปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟส เมื่อเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ ε

จากรูปที่ 3.9 (ก) และ (ข) แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสของวงจรความถี่ต่ำแบบเบิร์ตสไตน์ เมื่อปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ $\varepsilon = 1$ และ 10 รวมถึงเปลี่ยนค่า $n = 1, 2$ และ 3 จะเห็นว่า มีเฟสเชิงเส้น แต่จะมีสโลปของเฟสแตกต่างกันเล็กน้อย



(ก) เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ $\varepsilon = 10$



(ข) เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ $\varepsilon = 1$

รูปที่ 3.10 การเปรียบเทียบผลตอบสนองของทางเวลาประวิงแบบสเกลเชิงเส้นเมื่อเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ ε

จากรูปที่ 3.10 (ก) และ (ข) แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองของทางเวลาประวิงของวงจรกรองความถี่ต่ำแบบเบิรน์สไตน์ เมื่อปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ $\varepsilon = 1$ และ 10 รวมถึงการเปลี่ยนค่า $n = 1, 2$ และ 3 จะเห็นว่าการปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ ε และ n ทำให้เกิดความราบเรียบทางเวลาประวิงมากขึ้น

สรุป ข้อดีของวงจรกรองความถี่แบบเบิรน์สไตน์ คือสามารถปรับเปลี่ยนสโโลปหรือความชันของขนาด และเฟส ได้ตามการใช้งาน รวมไปถึงการปรับเปลี่ยนการลดทอนในช่วงความถี่แถบหยุด และสามารถปรับความราบเรียบทางเวลาประวิงให้มากขึ้นได้ โดยการปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ ε และ n

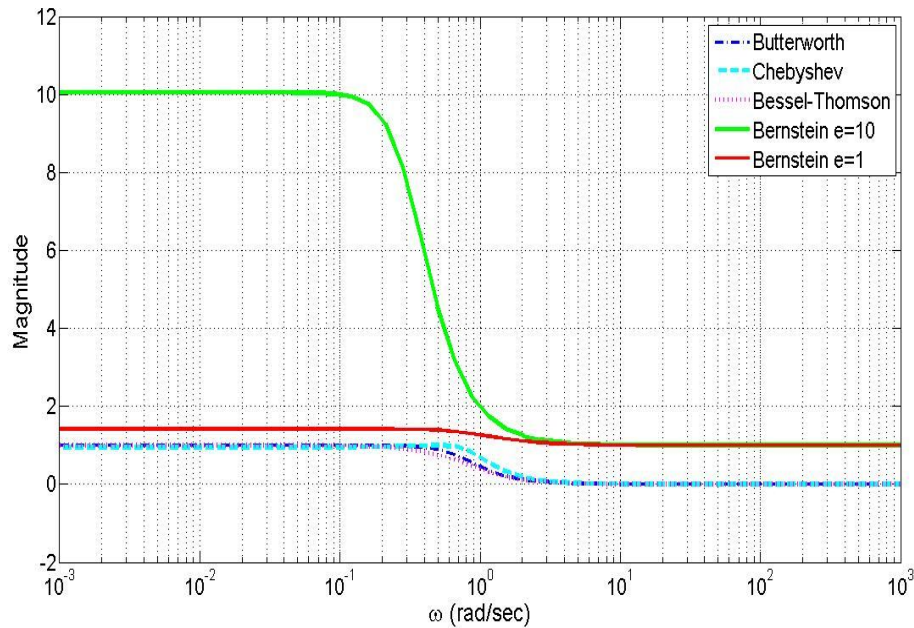
3.3.2 การเปรียบเทียบกับวงจรกรองความถี่แบบอื่น

ในหัวข้อนี้จะเป็นการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางความถี่ของวงจรกรองความถี่แบบเบิรน์สไตน์ อันดับ 2, 4 และ 6 กับวงจรกรองความถี่ที่มีอยู่เดิม เช่น วงจรกรองความถี่แบบบัตเตอร์เวิร์ท (Butterworth Filter) วงจรกรองความถี่แบบเชบิเชฟ (Chebyshev Filter) และวงจรกรองความถี่แบบเบสเซลทอมสัน (Bessel-Thomson Filter) แสดงดังรูปต่อไปนี้

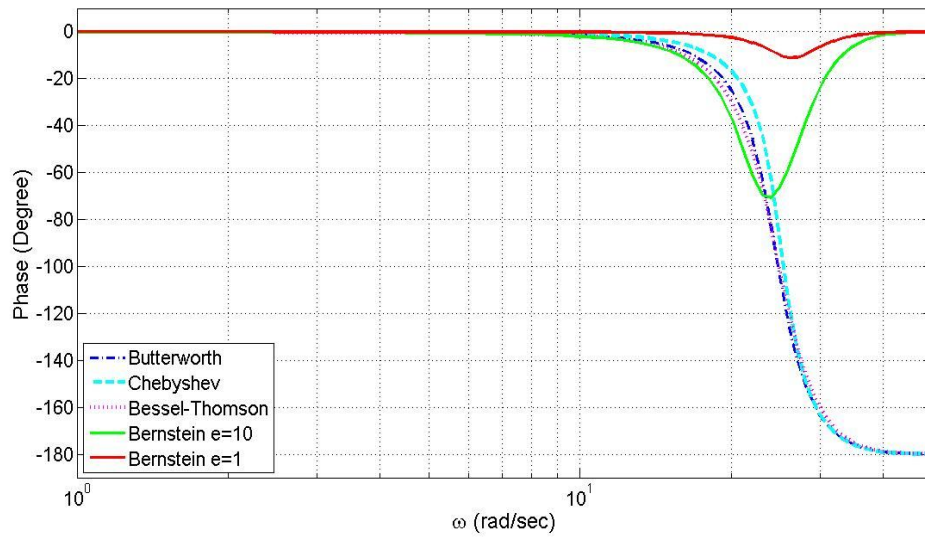
จากรูปที่ 3.11 แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่าน อันดับ 2 ของวงจรกรองความถี่แบบเบิรน์สไตน์ วงจรกรองความถี่แบบบัตเตอร์เวิร์ท วงจรกรองความถี่แบบเชบิเชฟ และวงจรกรองความถี่แบบเบสเซล ทอมสัน อธิบายได้ดังนี้ คุณลักษณะทางขนาดของเบสเซล ทอมสันจะมีความราบเรียบทางขนาดในย่านความถี่แถบผ่านน้อยที่สุด คุณลักษณะของเชบิเชฟจะมีการกระเพื่อมแบบเท่าเทียม (Equal Ripple) แบบไม่เด่นชัดในย่านความถี่แถบผ่าน และมีความชันดีรองจากเบิรน์สไตน์ที่กำหนดให้

$\varepsilon = 10$ คุณลักษณะทางขนาดของบัตเตอร์เวิร์ทจะมีความราบเรียบทางขนาดในย่านความถี่แถบผ่าน ส่วนคุณลักษณะทางขนาดของเบียร์นสไตน์จะมีความราบเรียบทางขนาดในย่านความถี่แถบผ่าน เมื่อกำหนดให้ $\varepsilon = 10$ กราฟจะมีความชันดีที่สุดใน (Sharpness) สำหรับ $\varepsilon = 1$ จะมีความชันน้อยที่สุดหรือมีความราบเรียบมากที่สุด ในบรรดาผลตอบสนองทางขนาดของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านอันดับ 2 ชนิดอื่นๆ และข้อได้เปรียบคือ วงจรรองความถี่แบบเบียร์นสไตน์สามารถปรับคุณลักษณะทางขนาดให้เป็นที่ต้องการได้ เช่น สามารถปรับช่วงย่านความถี่แถบผ่าน ปรับสโลป และปรับการลดทอนในช่วงย่านความถี่แถบหยุด โดยการปรับพารามิเตอร์ n และ ε

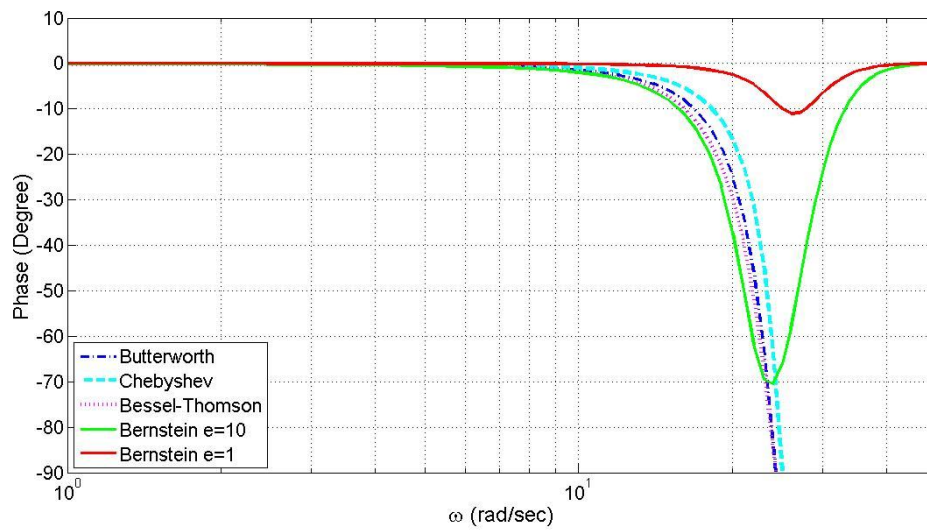
จากรูปที่ 3.12 (ก) และ (ข) แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านอันดับ 2 ของวงจรรองความถี่แบบเบียร์นสไตน์ วงจรรองความถี่แบบบัตเตอร์เวิร์ท วงจรรองความถี่แบบเชบิเชฟ และวงจรรองความถี่แบบเบสเซล ทอมสัน จะเห็นว่า คุณลักษณะทางเฟสของเบียร์นสไตน์เมื่อกำหนดให้ $\varepsilon = 1$ จะเป็นเชิงเส้นที่สุด และในส่วนของเบียร์นสไตน์เมื่อกำหนดให้ $\varepsilon = 10$ จะเป็นเชิงเส้นรองลงมาพร้อมทั้งยังสามารถปรับเปลี่ยนสโลปของเฟสได้ โดยการปรับพารามิเตอร์ n และ ε



รูปที่ 3.11 แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านอันดับ 2

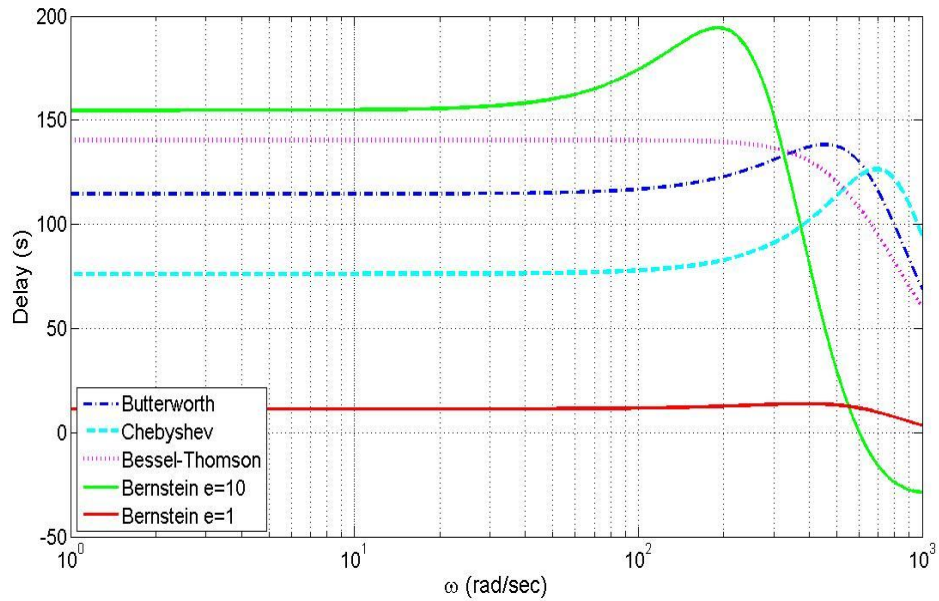


(ก) สเกลกึ่งล็อก



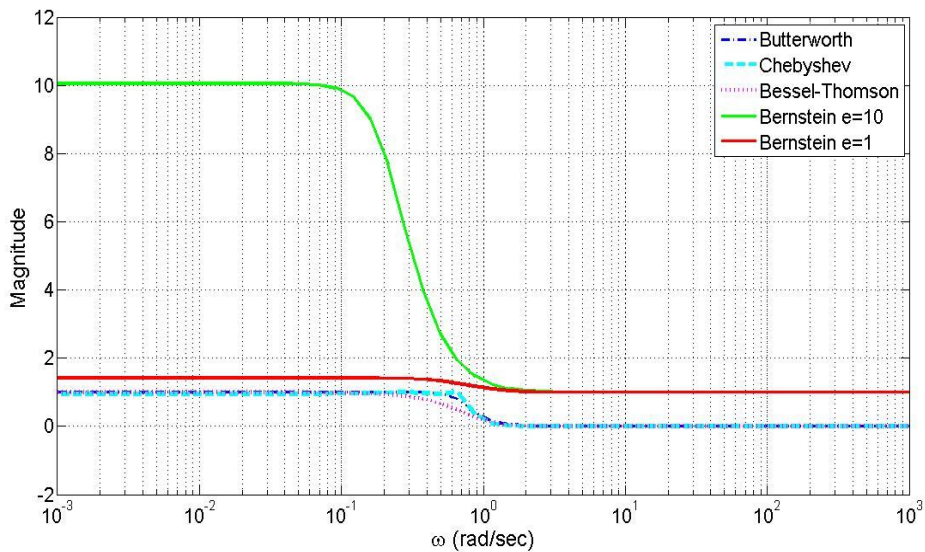
(ข) ภาพขยายสเกลกึ่งล็อก

รูปที่ 3.12 แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่านอันดับ 2



รูปที่ 3.13 การเปรียบเทียบผลตอบสนองทางเวลาประวิงของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านอันดับ 2

รูปที่ 3.13 แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางเวลาประวิงของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านอันดับ 2 ของวงจรรองความถี่แบบเบียร์นสไตน์ วงจรรองความถี่แบบบัตเตอร์เวิร์ท วงจรรองความถี่แบบเชบิเชฟ และวงจรรองความถี่แบบเบสเซล ทอมสัน จะเห็นว่าคุณลักษณะทางเวลาประวิงของเบียร์นสไตน์เมื่อกำหนดให้ $\epsilon = 1$ มีความราบเรียบที่สุด และเป็นค่าคงที่ ซึ่งจะตรงข้ามกับเบียร์นสไตน์เมื่อกำหนดให้ $\epsilon = 10$ นอกจากนี้ยังสามารถปรับความราบเรียบทางเวลาประวิงให้มากขึ้นได้ โดยการปรับพารามิเตอร์ n และ ϵ



รูปที่ 3.14 แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านอันดับ 4

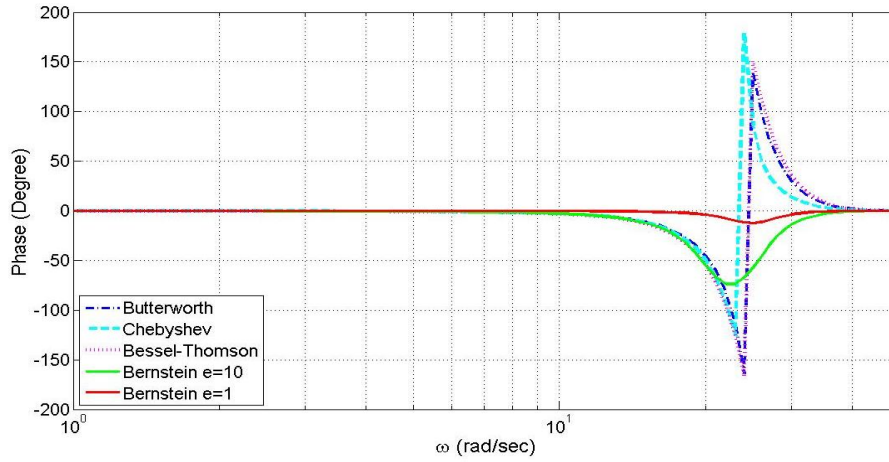
จากรูปที่ 3.14 แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดของวงจรรองความถี่ต่ำผ่าน อันดับ 4 ของวงจรรองความถี่แบบเบียร์นส์ไตน์ วงจรรองความถี่แบบบัตเตอร์เวิร์ท วงจรรองความถี่แบบเชบีเชฟ และวงจรรองความถี่แบบเบสเซล ทอมสัน อธิบายได้ดังนี้ คุณลักษณะทางขนาดของเบสเซล ทอมสันจะมีความราบเรียบทางขนาดในย่านความถี่แถบผ่านน้อยที่สุด คุณลักษณะของเชบีเชฟจะมีการกระเพื่อมแบบเท่าเทียม(Equal Ripple) ที่เห็นชัดกว่าอันดับ 2 ในย่านความถี่แถบผ่าน แต่จะมีความชันดีที่สุด(Sharpness) คุณลักษณะทางขนาดของบัตเตอร์เวิร์ทจะมีความราบเรียบทางขนาดในย่านความถี่แถบผ่าน และมีความชันดีรองจากเชบีเชฟ ส่วนคุณลักษณะทางขนาดของเบียร์นส์ไตน์เมื่อกำหนดให้ $\epsilon = 10$ จะมีความราบเรียบทางขนาดในย่านความถี่แถบผ่าน มีความชันที่ดี ส่วนเบียร์นส์ไตน์เมื่อกำหนดให้ $\epsilon = 1$ จะมีความราบเรียบมากที่สุด และข้อได้เปรียบคือ วงจรรองความถี่แบบเบียร์นส์ไตน์สามารถปรับคุณลักษณะทางขนาดให้เป็นที่ต้องการได้ เช่น สามารถปรับช่วงย่านความถี่แถบผ่าน ปรับสโลป และปรับการลดทอนในช่วงย่านความถี่แถบหยุด โดยการปรับพารามิเตอร์ n และ ϵ

จากรูปที่ 3.15 (ก) และ (ข) แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านอันดับ 4 ของวงจรรองความถี่แบบเบียร์นส์ไตน์ วงจรรองความถี่แบบบัตเตอร์เวิร์ท วงจรรองความถี่แบบเชบีเชฟ และวงจรรองความถี่แบบเบสเซล ทอมสัน จะเห็นว่า คุณลักษณะทางเฟสของเบียร์นส์ไตน์เมื่อกำหนดให้ $\epsilon = 1$ จะเป็นเชิงเส้นที่สุด และในส่วนของเบียร์นส์ไตน์เมื่อกำหนดให้ $\epsilon = 10$ จะเป็นเชิงเส้นรองลงมา พร้อมทั้งยังสามารถปรับเปลี่ยนสโลปของเฟสได้ โดยการปรับพารามิเตอร์ n และ ϵ

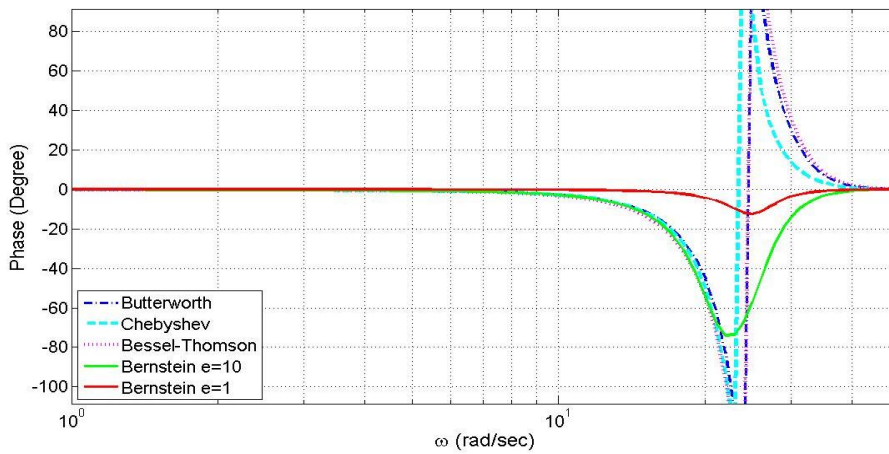
จากรูปที่ 3.16 (ก) และ (ข) แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางเวลาประวิงของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านอันดับ 4 ของวงจรรองความถี่แบบเบียร์นส์ไตน์ วงจรรองความถี่แบบบัตเตอร์เวิร์ท วงจรรองความถี่แบบเชบีเชฟ และวงจรรองความถี่แบบเบสเซล ทอมสัน จะเห็นว่าคุณลักษณะทางเวลาประวิงของเบียร์นส์ไตน์เมื่อกำหนดให้ $\epsilon = 1$ จะมีความราบเรียบที่สุด และเป็นค่าคงที่ นอกจากนั้นยังสามารถปรับความราบเรียบทางเวลาประวิงให้มากขึ้นได้ โดยการปรับพารามิเตอร์ n และ ϵ

จากรูปที่ 3.17 แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดของวงจรรองความถี่ต่ำผ่าน อันดับ 6 ของวงจรรองความถี่แบบเบียร์นส์ไตน์ วงจรรองความถี่แบบบัตเตอร์เวิร์ท วงจรรองความถี่แบบเชบีเชฟ และวงจรรองความถี่แบบเบสเซล ทอมสัน อธิบายได้ดังนี้ คุณลักษณะทางขนาดของเบสเซล ทอมสันจะมีความราบเรียบทางขนาดในย่านความถี่แถบผ่านน้อยที่สุด คุณลักษณะของเชบีเชฟจะมีการกระเพื่อมแบบเท่าเทียม(Equal Ripple) เล็กน้อยในย่านความถี่แถบผ่าน แต่จะมีความชันดีที่สุด(Sharpness) คุณลักษณะทางขนาดของบัตเตอร์เวิร์ทจะมีความราบเรียบทางขนาดในย่านความถี่แถบผ่าน และมีความชันดีรองจากเชบีเชฟ ส่วนคุณลักษณะทางขนาดของเบียร์นส์ไตน์เมื่อกำหนดให้ $\epsilon = 1$ จะมีความราบเรียบทางมากที่สุดขนาดในย่านความถี่แถบผ่าน ในส่วนของเบียร์นส์ไตน์เมื่อกำหนดให้ $\epsilon = 10$ จะมีความชันที่ดี และข้อได้เปรียบคือ

วงจรกรองความถี่แบบเบียร์นสไตน์สามารถปรับคุณลักษณะทางขนาดให้เป็นที่ต้องการได้ เช่น สามารถปรับช่วงย่านความถี่แถบผ่าน ปรับสโลป และปรับการลดทอนในช่วงย่านความถี่แถบหยุด โดยการปรับพารามิเตอร์ n และ ϵ

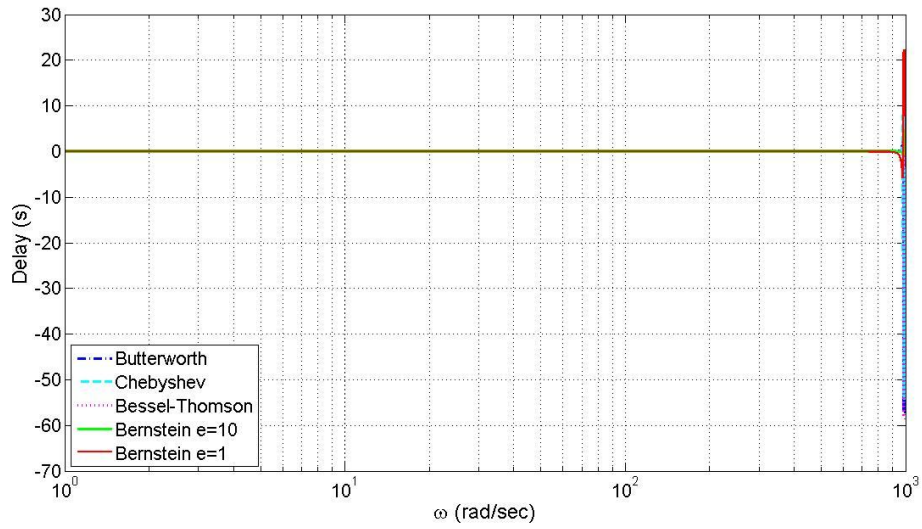


(ก) สเกลกึ่งล็อก

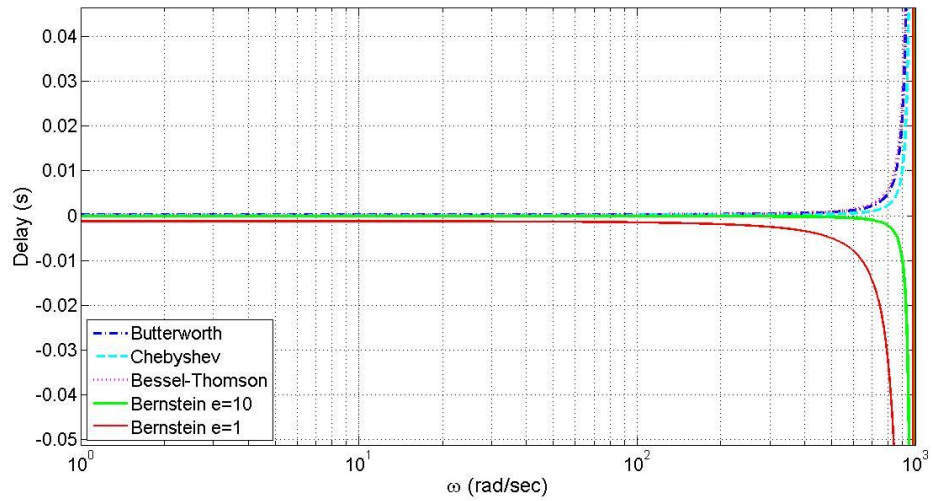


(ข) ภาพขยายสเกลกึ่งล็อก

รูปที่ 3.15 แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่านอันดับ 4

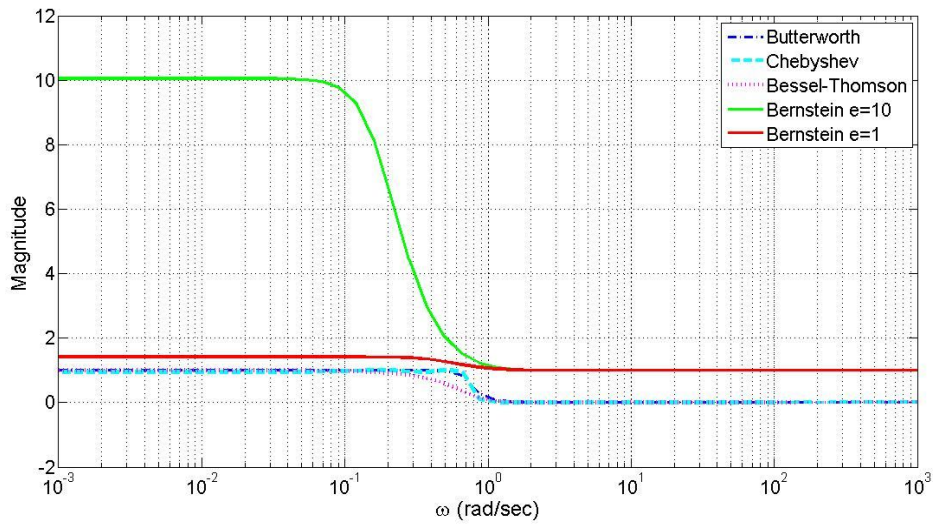


(ก) ภาพสเกลปกติ



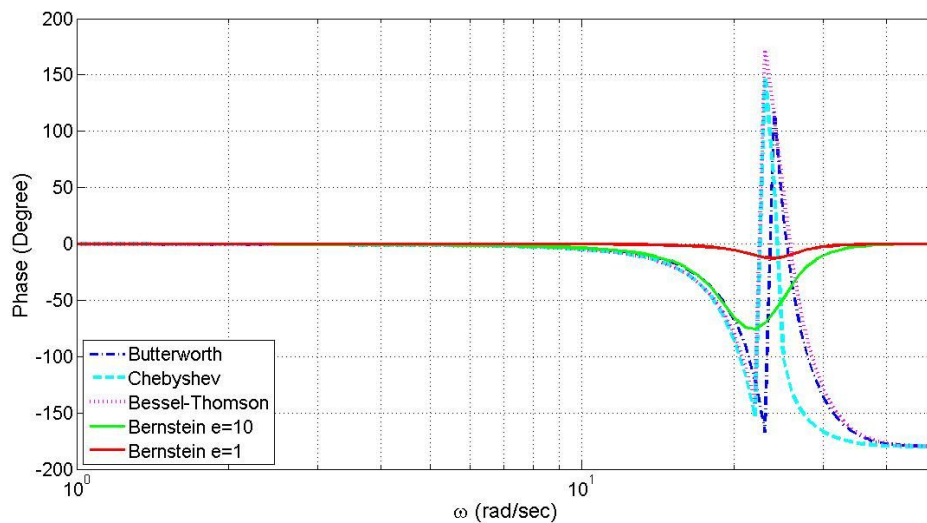
(ข) ภาพขยาย

รูปที่ 3.16 แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางเวลาประวิงของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่านอันดับ 4

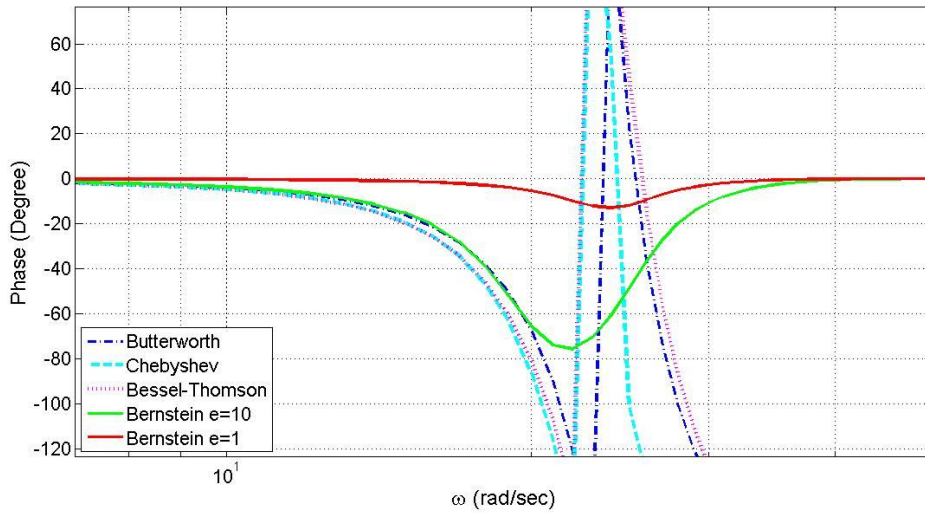


รูปที่ 3.17 แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่านอันดับ 6

จากรูปที่ 3.18 (ก) และ (ข) แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่านอันดับ 6 ของวงจรกรองความถี่แบบเบิร์ตสไตน์ วงจรกรองความถี่แบบบัตเตอร์เวิร์ท วงจรกรองความถี่แบบเชบิเชฟ และวงจรกรองความถี่แบบเบสเซล ทอมสัน จะเห็นว่า คุณลักษณะทางเฟสของเบิร์ตสไตน์เบิร์ตสไตน์เมื่อกำหนดให้ $\epsilon = 1$ จะเป็นเชิงเส้นที่สุด และในส่วนของเบิร์ตสไตน์เมื่อกำหนดให้ $\epsilon = 10$ จะเป็นเชิงเส้นรองลงมา พร้อมทั้งยังสามารถปรับเปลี่ยนสโลปของเฟสได้ โดยการปรับพารามิเตอร์ n และ ϵ

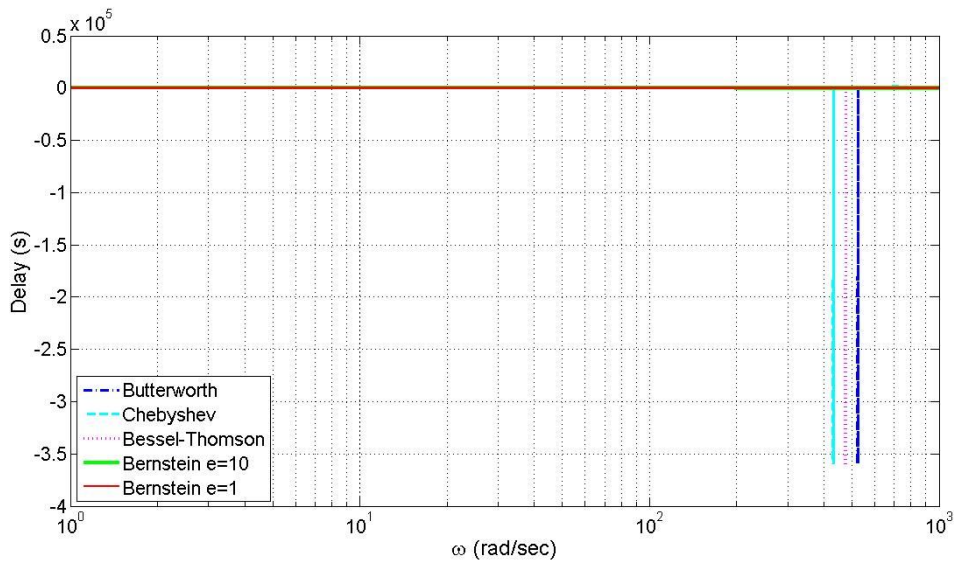


(ก) สเกลกิ่งสี่อ

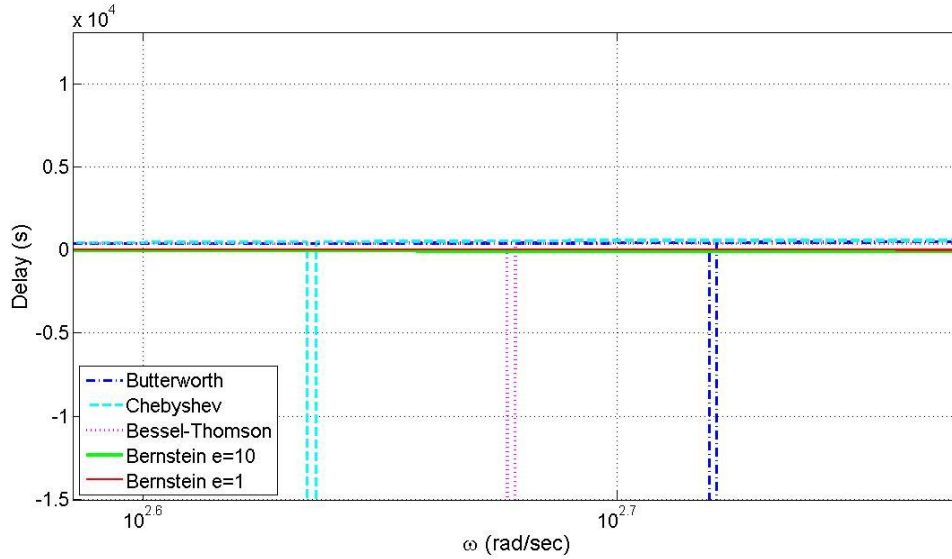


(ข) ภาพขยายสเกลกิ่งลือก

รูปที่ 3.18 แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่านอันดับ 6



(ก) ภาพสเกลปกติ



(ข) ภาพขยาย

รูปที่ 3.19 แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางเวลาประวิงของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่านอันดับ 6

จากรูปที่ 3.19 (ก) และ (ข) แสดงการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางเวลาประวิงของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่าน อันดับ 6 ของวงจรกรองความถี่แบบเบิรน์สไตน์ วงจรกรองความถี่แบบบัตเตอร์เวิร์ท วงจรกรองความถี่แบบเชบีเชฟ และวงจรกรองความถี่แบบเบสเซล ทอมสัน จะเห็นว่าคุณลักษณะทางเวลาประวิงของเบิรน์สไตน์ทั้งสองมีความราบเรียบที่สุด และเป็นค่าคงที่ นอกจากนั้นยังสามารถปรับความราบเรียบทางเวลาประวิงให้มากขึ้นได้ โดยการปรับพารามิเตอร์

3.4 บทสรุป

การออกแบบวงจรกรองความถี่แอนาล็อกโดยใช้เบิรน์สไตน์โพลีโนเมียลเมื่อกำหนดให้ $\epsilon = 1$ มีข้อได้เปรียบหลายประการ คือ ผลตอบสนองทางขนาดมีความราบเรียบที่สุดทั้งในย่านความถี่แถบผ่านและความถี่แถบหยุด ผลตอบสนองทางเฟสมีความเป็นเชิงเส้นส่งผลให้มีความราบเรียบทางเวลาประวิง และเวลาประวิงเป็นค่าคงที่ การปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ควบคุม n และ ϵ จะทำให้สามารถปรับเปลี่ยนการลดทอนในช่วงความถี่แถบหยุด ปรับเปลี่ยนสโลปหรือความชันของขนาดเฟส และปรับความราบเรียบทางเวลาประวิงให้มากขึ้นดังนั้นในโครงการวิจัยนี้จึงนำวงจรกรองความถี่แบบเบิรน์สไตน์มาประยุกต์ใช้ในการออกแบบวงจรปรับแก้ความผิดเพี้ยนทางเวลาประวิงของสัญญาณวิดีโอนั่นเอง