บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

A. Kananthai (1997) มีบทบาทในทางคณิตศาสตร์ไทยเป็นอย่างมาก ได้คิดค้นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) ขึ้นมาใหม่ โดยให้ชื่อว่า**ตัวดำเนินการไดมอนด์** (diamond operator) ซึ่งมีบทบาทสำคัญมากในการหาผลเฉลย (solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่มีความสัมพันธ์กับตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่มีอยู่แล้ว ได้แก่ ตัวดำเนินการลาปลาซ (Laplace operator) และตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก (ultra-hyperbolic operator) โดยได้นิยามตัวดำเนินการไดมอนด์ดังนี้

$$\Diamond = \left[\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^2\right]$$

ซึ่งพบความสัมพันธ์ดังกล่าวคือ

$$\Diamond = \triangle\,\Box = \Box\,\triangle$$

โดยที่

$$\triangle = \left[\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right] \quad \text{สำหรับ } p+q=n$$

และ

$$\Box = \left[\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right] \quad \text{สำหรับ } p+q=n$$

เป็นตัวดำเนินการลาปลาซและตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกตามลำดับ

ในส่วนของตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกนั้น S.E. Trione ได้ค้นพบผลเฉลยมูลฐาน (elementary solutions) ของตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกและในเวลาเดียวกัน M.A. Tellez ได้แสดงให้เห็นว่าการเกิดผลเฉลยของตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกนั้น จะขึ้นอยู่กับค่าของ p,q และ n ว่าเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ ในการค้นพบผลเฉลยของตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกเป็นการขยายความรู้ของสมการคลื่นให้กว้างขวางขึ้น

ต่อมา A. Kananthai (2000) ได้ศึกษาผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกที่อยู่ในรูป

$$\square^k u(x) = \sum_{r=0}^{m} C_r \square^r \delta$$

C_r เป็นค่าคงที่ และ δ เป็นดิสตริบิวชันไดแรคเดลตา (Dirac- delta distributions) และยังค้นพบผลเฉลยของสมการในรูป

$$\diamondsuit^k \ u(x) = \sum_{r=0}^{m} C_r \diamondsuit^r \delta(x)$$

แปรเปลี่ยนไปตามค่าของ k และ m ด้วย

ต่อมาไม่นานนัก A. Kananthai ก็ได้พัฒนาตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกและได้นิยามตัวดำเนินการใหม่เป็น

$$\square_{c_1}^k = \left(\frac{1}{c_1^2} \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right)^k \quad \text{และ} \quad \square_{c_2}^k = \left(\frac{1}{c_2^2} \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right)^k$$

โดยที่ $\square_{c_1}^k$ และ $\square_{c_2}^k$ เป็นตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก กระทำซ้ำกัน k ครั้งและได้ศึกษาผลเฉลยมูลฐานของสมการ

$$\square_{c_1}^k \square_{c_2}^k u(x) = \delta(x)$$

โดยที่ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า และ $\delta(x)$ เป็นดิสตริบิวชันไดแรคเดลตา และพบผลเฉลยมูลฐานของสมการ $\square_{c_1}^k \square_{c_2}^k u(x) = \delta(x)$

$$u(x) = S_{2k}^H(x) * T_{2k}^H(x)$$

โดยที่ $*$ แทนผลประสาน (convolutions) ของสองฟังก์ชัน $S_{2k}^H(x)$, $T_{2k}^H(x)$ ซึ่งนิยามโดย

$$S_{2k}^H(x) = \begin{cases} \dfrac{V^{(2k-n)/2}}{K_n(2k)}, x \in \Gamma_+ \\ 0, x \notin \Gamma_+ \end{cases}$$

$$T_{2k}^H(x) = \begin{cases} \dfrac{W^{(2k-n)/2}}{K_n(2k)}, x \in \Gamma_+ \\ 0, x \notin \Gamma_+ \end{cases}$$

โดยที่ $V = c_1^2(x_1^2 + \cdots + x_p^2) - x_{p+1}^2 - x_{p+q}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$,

$W = c_2^2(x_1^2 + \cdots + x_p^2) - x_{p+1}^2 - x_{p+q}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$

c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวบวก

ในกรณีเฉพาะ ถ้า $k=1, p=1$ $x_1 = t$ (time) c_1 และ c_2 เป็น velocity จะทำให้คำตอบเป็นผลเฉลยมูลฐานของคลื่นอิลาสติก (elastic wave)

ที่สำคัญ A. Kananthai (2000) ได้ศึกษาผลประสานของ**ส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอริสซ์** (diamond kernel of Marcel Riesz) ของสมการ

$$T_m(x) = T_{m-r}(x) * T_r(x)$$

โดยที่ r เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบและ $r < m$ และยังศึกษาผลประสานของสมการ

$$T_m(x) * T_m^{*-1}(x) = T_m^{*-1}(x) * T_m(x) = \delta$$

เมื่อ

$$T_m(x) = (-1)^m S_{2m}(x) * R_{2m}(x), m = 0,1,2,...$$

โดยที่

$$S_{2m}(x) = 2^{-2m}\pi^{-n/2}\Gamma\left(\frac{n-2m}{2}\right)\frac{|x|^{2m-n}}{\Gamma(m)}$$

เป็น**ส่วนกลางเชิงวงรีของมาร์เคอริสซ์** (elliptic kernel of Marcel Riesz) และ

$$R_{2m}(x) = \begin{cases} \dfrac{V^{(2m-n)/2}}{K_n(2m)}, x \in \Gamma_+ \\ 0, x \notin \Gamma_+ \end{cases}$$

เป็น**ส่วนกลางอัลตราไฮเพอร์โบลิกของมาร์เคอริสซ์** (ultra-hyperbolic kernel of Marcel Riesz)

ตัวดำเนินการไดมอนด์ยังถูกพัฒนาโดย G. Sritanratana และ A. Kananthai (2007) และได้พัฒนาตัวดำเนินการใหม่ที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการไดมอนด์ซึ่งอยู่ในรูป

$$\Diamond_{c_1}^k = \left[\frac{1}{c_1^4}\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^2\right]^k$$

และ

$$\Diamond_{c_2}^k = \left[\frac{1}{c_2^4}\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^2\right]^k$$

โดยที่ $\Diamond_{c_1}^k$ และ $\Diamond_{c_2}^k$ เป็นตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการไดมอนด์, $p+q=n$ เป็นมิติของปริภูมิยูคลิเดียน c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวบวก (positive constant) และยังค้นพบผลเฉลยมูลฐานของสมการที่อยู่ในรูป

$$\Box_{c_1}^k u(x) = \delta(x) \text{ และ } \Box_{c_2}^k u(x) = \delta(x)$$

$$\triangle_{c_1}^k u(x) = \delta(x) \text{ และ } \triangle_{c_2}^k u(x) = \delta(x)$$

นอกจากนี้ S. Bupasiri และ K. Nonlaopon (2010) ยังใช้แนวคิดของรูปแบบสมการ

$$\Diamond^{k}\ u(x)=\sum_{r=0}^{m} C_r\ \Diamond^{r}\ \delta(x)$$

พัฒนารูปแบบของสมการใหม่เป็น

$$\Diamond_{c}^{k}\ u(x)=\sum_{r=0}^{m} C_r\ \Diamond_{c}^{r}\ \delta(x)$$

และประเภทของผลเฉลยของสมการจะขึ้นอยู่กับค่าของ k และ m

S. Bupasiri และ K. Nonlaopon (2009) ยังค้นพบผลเฉลยแบบอ่อนของสมการโดยใช้แนวคิดของรูปแบบสมการ

$$\sum_{r=0}^{m} C_r\ \square^{r}\ u(x)=f(x)$$

พัฒนารูปแบบของสมการใหม่เป็น

$$\sum_{r=0}^{m} C_r\ \square_{c}^{r}\ u(x)=f(x)$$

จากการศึกษาที่กล่าวมาข้างต้น ผลเฉลยของสมการล้วนเป็นผลประสาน(convolutions) ของดิสตริบิวชัน นอกจากนี้ A. Kananthai ก็ขยายไปศึกษาผลประสานของ**ส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอร์ริสซ์**ของสมการ

$$T_m(x)=T_{m-r}(x)*T_r(x)$$

โดยที่ r เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบและ $r<m$ และยังศึกษาผลประสานของสมการ

$$T_m(x)*T_m^{*-1}(x)=T_m^{*-1}(x)*T_m(x)=\delta$$

เมื่อ

$$T_m(x)=(-1)^m S_{2m}(x)*R_{2m}(x), m=0,1,2,\ldots$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยมูลฐานของสมการที่อยู่ในรูป

$$\Diamond^{k}\ u(x)=\delta(x)$$

โดยที่ $\Diamond^{k}$ เป็นตัวดำเนินการไดมอนด์ กระทำซ้ำกัน k-ครั้ง

โดยที่

$$S_{2m}(x)=2^{-2m}\pi^{-n/2}\Gamma\left(\frac{n-2m}{2}\right)\frac{|x|^{2m-n}}{\Gamma(m)}$$

เป็น**ส่วนกลางเชิงวงรีของมาร์เคอริสซ์** และ

$$R_{2m}(x)=\begin{cases}\dfrac{V^{(2m-n)/2}}{K_n(2m)}, x\in\Gamma_+\\ 0, x\notin\Gamma_+\end{cases}$$

เป็น**ส่วนกลางอัลตราไฮเพอร์โบลิก (ultra-hyperbolic kernel) ของมาร์เคอริสซ์**

ในการวิจัยครั้งนี้จึงเป็นการศึกษาผลประสานของดิสตริบิวชันของผลเฉลยมูลฐานที่เกิดจากตัวดำเนินการ $\Diamond_{c}^{k}$ ที่สัมพันธ์กับ**ส่วนกลางไดมอนด์ของมาเคอริสซ์**ของสมการที่อยู่ในรูป

$$\diamondsuit_c^k\ u(x) = \delta(x)$$

และยังขยายแนวคิดไปศึกษาอินเวอร์ส (inverst) ของผลเฉลยดังกล่าวในพีชคณิตผลประสาน (convolution algebra) อีกด้วย

นอกจากนี้ยังหาผลคูณแฟมิลี่ของดิสตริบิวชันที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการ $\diamondsuit_c^k$ โดยจะศึกษาสมบัติของผลประสานของดิสตริบิวชัน

$$T_{m,c}(x) = S_{\alpha,c}(x) * R_{\beta,c}(x) \qquad (1.1)$$

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. หาความสัมพันธ์ส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอริสซ์
2. ศึกษาผลประสานของผลคูณของแฟมิลี่ของดิสตริบิวชันที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการ $\diamondsuit_c^k$
3. หาอินเวอร์สของส่วนกลางของ $T_{m,c}(x) = S_{\alpha,c}(x) * R_{\beta,c}(x)$ ที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการ $\diamondsuit_c^k$

ขอบเขตของการวิจัย

ศึกษาผลประสานของดิสตริบิวชันของผลเฉลยมูลฐานที่เกิดจากสมการ

$$\diamondsuit_c^k\ u(x) = \delta(x)$$

โดยที่

$$\diamondsuit_c^k = \left[\frac{1}{c^4}\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right)^2 \right]^k$$

เป็นตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการไดมอนด์ กระทำซ้ำกัน k ครั้ง $p+q=n$ เป็นมิติของปริภูมิยูคลิเดียน $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า และ $\delta(x)$ เป็นดิสตริบิวชันไดแรคเดลตา

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1 ได้องค์ความรู้และทฤษฎีใหม่ๆที่เกี่ยวกับผลประสานของดิสตริบิวชันและนำไปใช้เกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

2 การนำไปประยุกต์ใช้ในแขนงวิชาทฤษฎีดิสตริบิวชัน ทฤษฎีตัวดำเนินการและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

3 เป็นการเผยแพร่ผลงานวิจัยทางคณิตศาสตร์เพื่อตีพิมพ์ในระดับนานาชาติและนำไปใช้ประโยชน์อย่างต่อเนื่อง

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ฟังก์ชันต่อเนื่องเชิงเส้นบนปริภูมิของฟังก์ชันค่าทดสอบ จะเรียกว่า **ดิสตริบิวชัน** ซึ่งในทางฟิสิกส์แล้ว ฟังก์ชันไดแรคเดลตาถือว่าเป็นดิสตริบิวชันที่มีความสำคัญมาก

(P.K. Ram. 1998) ได้นิยามคุณสมบัติฟังก์ชันไดแรคเดลตาดังต่อไปนี้

$$\delta(x-\xi)=0 \text{ สำหรับ } x \neq \xi$$

และมีสูตรทั่วไปคือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\xi) f(x) dx = f(\xi)$$

โดยที่ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบ (sufficiently smooth) ทำให้มีนักคณิตศาสตร์ได้คิดค้นทฤษฎีที่สัมพันธ์กับดิสตริบิวชันไดแรคเดลตา และตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นจำนวนมาก ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่รู้จักและคุ้นเคยกันอยู่แล้ว ได้แก่ ตัวดำเนินการลาปลาซ นิยามโดย

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

ตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกนิยามโดย

$$\Box = \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right)$$

เมื่อ $p+q=n$ โดยที่ n เป็นมิติของปริภูมิ R^n

บทนิยามและความรู้พื้นฐาน

1. ฟังก์ชันค่าทดสอบ (test functions)

กำหนดให้ R^n เป็นปริภูมิ n มิติซึ่งระบบคาร์ทีเซียนของพิกัดของจุด P จะเขียนแทนด้วย $x=\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ และระยะทาง r ของ P จากจุดกำเนิดคือ $r=\left|x\right|=\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)^{1/2}$ ให้ k เป็น n อันดับ (n-tuple) ของจำนวนที่ไม่เป็นลบซึ่ง $k=\left(k_1,\ldots,k_n\right)$ ซึ่งเรียก k ว่า มัลติอิลเด็กซ์ (multiindex) ของอันดับ n จะได้ว่า

$$\left|k\right| = k_1+\cdots+k_n, \quad x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$$

และ

$$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}} = D_1^{k_1} \cdots D_n^{k}$$

โดยที่ $D_j = \partial / \partial x_j, j=1,2,\ldots,n$

ตัวอย่าง 1.1

สำหรับใน R^3 ซึ่ง $k=\left(3,0,4\right)$ จะได้ว่า

$$D^k = \frac{\partial^7}{\partial x_1^3 \partial x_3^4} = D_1^3 D_3^4$$

บทนิยาม 1.1

ซัพพอร์ต (supports) ของฟังก์ชัน $f\left(x\right)$ คือโคลสเซอร์ (closure) ของเซตของจุด x ทั้งหมดซึ่ง $f\left(x\right) \neq 0$ ซัพพอร์ต (supports) ของฟังก์ชัน $f\left(x\right)$ จะเขียนแทนด้วย supp f

ตัวอย่าง 1.2

สำหรับ $f\left(x\right)=\sin x$, $x \in R$ supp f ประกอบด้วยเส้นจำนวนจริงทั้งหมด ที่ลากผ่าน $\sin x = 0$ เมื่อ $x = n\pi$

บทนิยาม 1.2

ถ้า supp f เป็นเซตที่มีขอบเขต (bounded set) แล้ว f จะกล่าวว่ามีซัพพอร์ตกระชับ (compact support)

ต่อไปจะเป็นความรู้พื้นฐานในการนิยามฟังก์ชันวางนัยทั่วไป (generalized function) พิจารณาปริภูมิ D ที่ประกอบด้วยฟังก์ชันค่าจริง $\varphi(x)=\varphi(x_1,\dots,x_n)$ ซึ่งประกอบด้วยข้อความเหล่านี้

(1) $\varphi(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้อนันต์ครั้งนิยามที่ทุกๆจุดใน R^n ฟังก์ชันที่ว่าจะเขียนแทนด้วย C^∞

(2) จะมีจำนวน A ที่ $\varphi(x)=0$ สำหรับ $r>A$ หมายความว่า $\varphi(x)$ มีซัพพอร์ตกระชับ จะเรียก $\varphi(x)$ ว่า**ฟังก์ชันค่าทดสอบ** (test function)

ตัวอย่าง 1.3

ซัพพอร์ตของฟังก์ชัน

$$f(x)=\begin{cases} 0, -\infty < x \le -1 \\ x+1, -1 < x < 0 \\ 1-x, 0 \le x < 1 \\ 0, 1 \le x < \infty \end{cases}$$

คือ $[-1,1]$

บทนิยาม 1.3

ปริภูมิชวาร์ท (Schwartz space) ของฟังก์ชัน S บน R^n คือปริภูมิฟังก์ชัน

$$S(R^n)=\{f\in C^\infty(R^n) \mid \|f\|_{\alpha,\beta}<\infty, \forall \alpha,\beta\}$$

โดยที่ $C^\infty(R^n)$ เป็นเซตของฟังก์ชันปรับเรียบ (smooth function) จากเซตของจำนวนเชิงซ้อน C ไปยัง C และ

$$\|f\|_{\alpha,\beta}=\|x^\alpha D^\beta f\|_\infty$$

โดยที่ $\|\cdot\|_\infty$ เป็น supremum norm

2. ดิสตริบิวชัน (distribution)

บทนิยาม 2.1

ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) t บนปริภูมิ D ของฟังก์ชันค่าทดสอบ คือการดำเนินการที่ทุกๆฟังก์ชันค่าทดสอบ $\varphi(x)$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\langle t,\varphi\rangle$ ซึ่ง

$$\langle t, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2\rangle = c_1\langle t,\varphi_1\rangle + c_2\langle t,\varphi_2\rangle$$

สำหรับฟังก์ชันค่าทดสอบ φ_1 และ φ_2 และจำนวนจริง c_1, c_2

ในทางฟิสิกส์จะมีปัญหามากมายซึ่งต้องใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันไดแรคเดลตา ซึ่งมีสมบัติดังต่อไปนี้

$$\delta(x-\xi) = 0, x \neq \xi$$

$$\int_a^b \delta(x-\xi)dx = \begin{cases} 0, a, b < \xi \\ 1, a \leq \xi \leq b \end{cases}$$

และ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\xi)f(x)dx = f(\xi)$$

บทนิยาม 2.2

ฟังก์ชันต่อเนื่องเชิงเส้น (continuous linear function) บนปริภูมิ D ของฟังก์ชันค่าทดสอบจะเรียกว่า **ดิสตริบิวชัน**

ตัวอย่าง 2.1 ดิสตริบิวชันเฮฟวิไซด์ (Heaviside distribution) ใน R^n คือ

$$\langle H_R, \varphi \rangle = \int_R \varphi(x)dx$$

โดยที่

$$H_R(x) = \begin{cases} 1, x \in R \\ 0, x \notin R \end{cases}$$

ตัวอย่าง 2.2 ดิสตริบิวชันไดแรคเดลตาใน R^n คือ

$$\langle \delta(x-\xi), \varphi(x) \rangle = \varphi(\xi)$$

สำหรับ ξ เป็นจุดตรึง (fix point)ใน R^n

บทนิยาม 2.3

ดิสตริบิวชัน E จะกล่าวว่าเป็นผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อย L ถ้า

$$LE = \delta$$

3. ฟังก์ชันแกมมา (gamma function)

บทนิยาม 3.1

ฟังก์ชันแกมมาเขียนแทนด้วย Γ ซึ่งนิยามโดย

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

โดยที่ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ $\mathrm{Re}(z) > 0$

ประพจน์ 3.1 กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

(1) $z\Gamma(z+1) = \Gamma(z+1) \qquad z \neq 0,-1,-2,\ldots$

(2) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z} \qquad z \neq 0,\pm1,\pm2,\ldots$

(3) $\Gamma(z)\Gamma\left(z+\dfrac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) \qquad z \neq 0,-1,-2,\ldots$

4. สมบัติของผลประสาน (convolution) ของดิสตริบิวชัน

บทนิยาม 4.1

ผลประสานของ $f * g$ ของ $f(t)$ และ $g(t)$ ใน R^n นิยามโดย

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

ตัวอย่าง 4.1

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

และ

$$g(t) = \begin{cases} \sin t, 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \end{cases}$$

เนื่องจาก

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

จะได้ว่า

$$f * g = \begin{cases} \displaystyle\int_{0}^{t} l^{-t} \sin(t-\tau) d\tau, 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \\ \displaystyle\int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} l^{-t} \sin(t-\tau) d\tau, t \geq \dfrac{\pi}{2} \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

สมบัติข้อที่ 1

$s * t = t * s$ **(สมบัติการสลับที่ของดิสตริบิวชัน)**

สมบัติข้อที่ 2

$(s*t)*u = s*(t*u)$ **(สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของดิสตริบิวชัน)**

ประพจน์ 4.1 ถ้า $s*t$ หาค่าได้ จะได้ว่า $(D^k s)*t$ และ $s*(D^k t)$ หาค่าได้ และ

$$(D^k s)*t = D^k(s*t) = s*(D^k t)$$

ถ้า L เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยจะได้ว่า

$$(L\,s)*t = L\,(s*t) = s*(L\,t)$$

บทนิยาม 4.2 ให้ $x = (x_1,\dots,x_n) \in R^n$ และ

$$u = c^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2) - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2,\ p+q=n$$

กำหนด $\Gamma_+ = \{x \in R^n : x_1 > 0, u > 0\}$ เป็นอาณาบริเวณภายในของกรวยเปิด และ $\overline{\Gamma}_+$ แทนโคลซเซอร์ของฟังก์ชัน Γ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน α ใดๆ นิยามฟังก์ชัน

$$R_{\alpha,c}(u) = \begin{cases} \dfrac{u^{(\alpha-n)/2}}{K_n(\alpha)}, x \in \Gamma_+ \\ 0, x \notin \Gamma_+ \end{cases} \qquad (2.1)$$

เมื่อ $K_n(\alpha)$ เป็นค่าคงตัว ซึ่ง

$$K_n(\alpha) = \frac{\pi^{(n-1)/2}\Gamma((2+\alpha-n)/2)\Gamma((1-\alpha)/2)\Gamma(\alpha)}{\Gamma((2+\alpha-p)/2)\Gamma((p-\alpha)/2)}. \qquad (2.2)$$

ให้ $R_{\alpha,c}(u) \subset \overline{\Gamma}_+$, เมื่อ supp $R_{\alpha,c}(u)$ เป็นซัพพอร์ตของ $R_{\alpha,c}(u)$ นำเสนอโดย (Nozaki. 1964:72) และจะเรียก ฟังก์ชัน $R_{\alpha,1}$ ว่า **ส่วนกลางอัลตราไฮเพอร์โบลิกของมาร์เคอริสซ์** $R_{\alpha,1}(u)$ เป็นฟังก์ชันธรรมดา ถ้า $\mathrm{Re}(\alpha) \geq n$ และเป็นดิสตริบิวชันของ α ถ้า $\mathrm{Re}(\alpha) < n$

บทนิยาม 4.3 ให้ $x = (x_1,\dots,x_n) \in R^n$ และ

$$v = c^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2) + x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2 \quad \text{เมื่อ } p+q=n.$$

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน β ใดๆ นิยามฟังก์ชัน

$$S_{\beta,c}(v) = 2^{-\beta}\pi^{-n/2}\Gamma\left(\frac{n-\beta}{2}\right)\frac{v^{(\beta-n)/2}}{\Gamma(\beta/2)}. \qquad (2.3)$$

$S_{\beta,c}(v)$ จะเรียกว่า **ส่วนกลางเชิงวงรีของมาร์เคอริสซ์** $S_{\beta,c}(v)$ เป็นฟังก์ชันธรรมดาถ้า $\mathrm{Re}(\beta) \geq n$ และเป็นดิสตริบิวชันของ β ถ้า $\mathrm{Re}(\beta) < n$

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

(A. Kananthai. 1999) ได้ศึกษาผลเฉลยมูลฐานของสมการอยู่ในรูปของ

$$\Box_{c_1}^{k}\Box_{c_2}^{k}u(x)=\delta(x)$$

จะได้ว่า

$$u(x)=S_{2k}^{H}(x)*T_{2k}^{H}(x)$$

เป็นผลเฉลยมูลฐาน โดยที่ * แทนผลประสานของ $S_{2k}^{H}(x)$ และ $T_{2k}^{H}(x)$ ตามลำดับ นอกจากนี้ยังพบว่า ถ้า $k=1, p=1$ $x_1=t$ (time) c_1 และ c_2 เป็น velocity จะได้ผลเฉลยมูลฐานของสมการคลื่นอิลาสติก (elastic wave) อันดับ 4 เมื่อ

$$S_{2k}^{H}(x)=\begin{cases}\dfrac{V^{(2k-n)/2}}{K_n(2k)}, x\in\Gamma_+\\ 0, x\notin\Gamma_+\end{cases}$$

โดยที่ $V=c_1^2(x_1^2+\cdots+x_p^2)-x_{p+1}^2-x_{p+q}^2-\cdots-x_{p+q}^2$,
$W=c_2^2(x_1^2+\cdots+x_p^2)-x_{p+1}^2-x_{p+q}^2-\cdots-x_{p+q}^2$
c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวบวก

(G. Sritanratana และ A. Kananthai. 2004) ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการ

$$\Diamond_{c_1}^{k}\Diamond_{c_2}^{k}u(x)=f\left(x,\ \triangle_{c_1}^{k-1}\Box_{c_2}^{k}\Diamond_{c_2}^{k}u(x)\right)$$

โดยที่ $\Diamond_{c_1}^{k}\Diamond_{c_2}^{k}$ เป็นผลคูณของตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการไดมอนด์ กระทำซ้ำกัน k ครั้ง นิยามโดย

$$\Diamond_{c_1}^{k}=\left[\frac{1}{c_1^4}\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^2-\left(\sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^2\right]^k$$

และ

$$\Diamond_{c_2}^{k}=\left[\frac{1}{c_2^4}\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^2-\left(\sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^2\right]^k$$

โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวบวก, k เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบ, $p+q=n$ เป็นมิติของปริภูมิยูคลิเดียน $x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า และ $f\left(x,\ \triangle_{c_1}^{k-1}\Box_{c_2}^{k}\Diamond_{c_2}^{k}u(x)\right)$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนด เราพบว่า $u(x)$ ของสมการจะแปรเปลี่ยนตามเงื่อนไขของ f และ $\triangle_{c_1}^{k-1}\Box_{c_2}^{k}\Diamond_{c_2}^{k}u(x)$ ในกรณีเฉพาะ $u(x)$ ยังสัมพันธ์กับสมการคลื่นอิลาสติกซึ่งขึ้นอยู่กับค่าของ p,q และ k

(A. Kananthai. 2001) ศึกษาผลเฉลยมูลฐานของสมการ $\diamondsuit^k u(x) = f(x)$ ซึ่งสัมพันธ์กับสมการคลื่น โดยที่ $\diamondsuit^k$ เป็นตัวดำเนินการไดมอนด์ กระทำซ้ำกัน k ครั้ง นิยามโดย

$$\diamondsuit^k = \left[\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^2\right]^k$$

โดยที่ $p+q=n$ เป็นมิติของปริภูมิยูคลิเดียน $x=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$ k เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป จะพบว่า $u(x)$ เปลี่ยนไปตามเงื่อนไขของ p และ q นอกจากนี้ผลเฉลยยังสัมพันธ์กับสมการลาปลาซและสมการคลื่น

K. Nonlaopon และ A. Kananthai ได้ศึกษาคุณสมบัติของส่วนกลาง (kernel) ของตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับสมการความร้อน (heat equations) และสมการคลื่น (wave equations) ซึ่งตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับสมการความร้อนอยู่ในรูป

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -c^2(-\Delta)^k u(x,t)$$

ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,0)=f(x)$ $x=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$ เป็นปริภูมิยูคลิเดียนมิติที่ n f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง $t\in[0,\infty)$ และ k เป็นจำนวนเต็มบวก

M.A. Telleze และ A. Kananthai ได้ศึกษาแฟมิลี่ของดิสตริบิวชัน $K_{\alpha,\beta}$ ที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการไดมอนด์และยังศึกษาคุณสมบัติของ $K_{\alpha,\beta} * K_{\alpha',\beta'}$

K. Nonlaopon และ A. Kananthai ได้ศึกษาส่วนกลางความร้อนของอัลตราไฮเพอร์โบลิกที่สัมพันธ์กับสเปกตรัม ซึ่งสมการอยู่ในรูป

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -c^2 \Box^k u(x,t)$$

ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,0)=f(x)$ $x=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$ เป็นปริภูมิยูคลิเดียนมิติที่ n f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง $t\in(0,\infty)$ และ k เป็นจำนวนเต็มบวก

(H. Yildirim, M.Z. Sarikaya และ S. Ozturk. 2004) ได้ค้นพบตัวดำเนินการใหม่ซึ่งใช้แนวคิดของการค้นพบตัวดำเนินการไดมอนด์ โดยให้ชื่อว่า **ตัวดำเนินการเบสเซลไดมอนด์** (Bessel diamond operators) ซึ่งได้แสดงว่าสมการ

$$\diamondsuit_B^k u(x) = \sum_{r=0}^{m} C_r \diamondsuit_B^r \delta(x)$$

มีผลเฉลยที่แตกต่างกันขึ้นอยู่กับค่าของ p, q และ n

(S. Bupasiri และ K. Nonlaopon. 2010) ยังอาศัยแนวคิดของสมการที่อยู่ในรูปแบบ

$$\diamondsuit^k u(x) = \sum_{r=0}^{m} C_r \diamondsuit^r \delta(x)$$

พัฒนาและศึกษาโดยนิยามตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการไดมอนด์และศึกษาสมการที่อยู่ในรูป

$$\Diamond_c^k u(x) = \sum_{r=0}^{m} C_r \Diamond_c^{r} {}^{r} \delta(x)$$

(A. Kananthai. 1998) ได้ศึกษาผลประสานของ**ส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอริสซ์**ของสมการ

$$T_m(x) = T_{m-r}(x) * T_r(x)$$

โดยที่ r เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบและ $r < m$ และยังศึกษาผลประสานของสมการ

$$T_m(x) * T_m^{*-1}(x) = T_m^{*-1}(x) * T_m(x) = \delta$$

เมื่อ $$T_m(x) = (-1)^m S_{2m}(x) * R_{2m}(x), m = 0,1,2,\ldots$$

โดยที่ $$S_{2m}(x) = 2^{-2m} \pi^{-n/2} \Gamma\left(\frac{n-2m}{2}\right) \frac{|x|^{2m-n}}{\Gamma(m)}$$

เป็น**ส่วนกลางเชิงวงรี (elliptic) ของมาร์เคอริสซ์** และ

$$R_{2m}(x) = \begin{cases} \dfrac{V^{(2m-n)/2}}{K_n(2m)}, x \in \Gamma_+ \\ 0, x \notin \Gamma_+ \end{cases}$$

เป็น**ส่วนกลางอัลตราไฮเพอร์โบลิกของมาร์เคอริสซ์**

(S. Bupasiri และ K. Nonlaopon. 2009) ยังค้นพบผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก ซึ่งสมการอยู่ในรูป

$$\sum_{r=0}^{m} C_r \Box_c^r u(x) = f(x)$$

โดยที่ $\Box_c^r$ เป็นตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก กระทำซ้ำกัน r ครั้ง $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป

จะได้ว่า $$u(x) = f(x) * R^H_{2m,c}(x) * \left[C_m R^H_{0,c}(x) + w(x) R^H_{2,c}(x)\right]^{*-1}$$

เป็นผลเฉลยแบบอ่อนของสมการ $\sum_{r=0}^{m} C_r \Box_c^r u(x) = f(x)$

(S. Bupasiri. 2010) ยังค้นพบผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบลาปลาซ ซึ่งสมการอยู่ในรูป

$$\sum_{r=0}^{m} C_r \triangle^r u(x) = f(x)$$

โดยที่ $\triangle^{r}$ เป็นตัวดำเนินการลาปลาซ กระทำซ้ำกัน r ครั้ง $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป

จะได้ว่า
$$u(x)=f(x)*R^{e}_{2m}(x)*\left[(-1)^{m}C_{m}R^{e}_{0}(x)+w(x)R^{e}_{2}(x)\right]^{*-1}$$

เป็นผลเฉลยแบบอ่อนของสมการ $\sum_{r=0}^{m} C_r \triangle^{r} u(x)=f(x)$

(S. Bupasiri. 2010) สมการเชิงประกอบที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซ ซึ่งสมการอยู่ในรูป

$$\sum_{r=0}^{m} C_r \triangle^{r}_{c} u(x)=f(x)$$

โดยที่ $\triangle^{r}_{c}$ เป็นตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซ กระทำซ้ำกัน r ครั้ง $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป

จะได้ว่า

$$u(x)=f(x)*R^{e}_{2m,c}(x)*\left[(-1)^{m}C_{m}R^{e}_{0,c}(x)+w(x)R^{e}_{2,c}(x)\right]^{*-1}$$

เป็นผลเฉลยแบบอ่อนของสมการ $\sum_{r=0}^{m} C_r \triangle^{r}_{c} u(x)=f(x)$

จากการศึกษาที่กล่าวมาข้างต้น ผลเฉลยของสมการล้วนเป็นผลประสาน(convolutions) ของดิสตริบิวชัน นอกจากนี้ A. Kananthai ก็ขยายไปศึกษาผลประสานของ**ส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอร์ริสซ์**ของสมการ

$$T_m(x)=T_{m-r}(x)*T_r(x)$$

โดยที่ r เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบและ $r<m$ และยังศึกษาผลประสานของสมการ

$$T_m(x)*T_m^{*-1}(x)=T_m^{*-1}(x)*T_m(x)=\delta$$

เมื่อ
$$T_m(x)=(-1)^{m}S_{2m}(x)*R_{2m}(x),\ m=0,1,2,\ldots$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยมูลฐานของสมการที่อยู่ในรูป

$$\diamondsuit^{k}u(x)=\delta(x)$$

โดยที่ $\diamondsuit^{k}$ เป็นตัวดำเนินการไดมอนด์ กระทำซ้ำกัน k-ครั้ง

โดยที่
$$S_{2m}(x)=2^{-2m}\pi^{-n/2}\Gamma\left(\frac{n-2m}{2}\right)\frac{|x|^{2m-n}}{\Gamma(m)}$$

เป็น**ส่วนกลางเชิงวงรีของมาร์เคอริสซ์** และ

$$R_{2m}(x) = \begin{cases} \dfrac{V^{(2m-n)/2}}{K_n(2m)}, x \in \Gamma_+ \\ 0, x \notin \Gamma_+ \end{cases}$$

เป็น**ส่วนกลางอัลตราไฮเพอร์โบลิกของมาร์เคอริสซ์**

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้ เป็นการสร้างทฤษฎีบทการหาผลประสานของดิสตริบิวชันที่สัมพันธ์กับส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอริสซ์

ขั้นตอนดำเนินการวิจัย

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆที่เกี่ยวข้องผลประสานของดิสตริบิวชัน

2. ค้นคว้าหาเอกสารบทความวิจัย ตำรา และ เอกสารสิ่งพิมพ์ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยที่กำลังดำเนินการวิจัยอยู่จาก แหล่งข้อมูลต่างๆ ทั้งในฐานข้อมูลระดับชาติหรือนานาชาติ

3. โดยการอาศัยความรู้พื้นฐานที่ได้จากการศึกษาตามระเบียบวิธีตามข้อ 1 – 2 และประสบการณ์ที่ได้จากการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและปรึกษากับนักวิจัยที่ปรึกษาและนักวิจัยชาวต่างประเทศที่มีความเชี่ยวชาญ ในทฤษฎีดิสตริบิวชันและหาแนวทางในการคิดค้นทฤษฎีใหม่ๆที่เกี่ยวกับผลประสานของดิสตริบิวชัน

4. สร้างและพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหาผลประสานที่เป็นผลเฉลยมูลฐานของสมการ

$$\Diamond_c^k\ u(x) = \delta(x)$$

5. สร้างและพิสูจน์ทฤษฎีเกี่ยวกับการหาอินเวอร์สของส่วนกลางของ $T_{m,c}(x) = S_{\alpha,c}(x) * R_{\beta,c}(x)$ ที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการ $\Diamond_c^k$

6. สรุปผล เตรียมเอกสารสำหรับการตีพิมพ์ และเขียนรายงานการวิจัย

ต่อไปจะเป็นเครื่องมือที่จำเป็นสำหรับการสร้างทฤษฎีบทการหาผลประสานของดิสตริบิวชันที่สัมพันธ์กับส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอริสซ์ ได้แก่ **บทตั้ง** (lemma) ต่างๆดังนี้

บทตั้งที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์

บทตั้ง 1 ฟังก์ชัน $S_{\alpha,c}(x)$ และ $R_{\alpha,c}(x)$ ที่นิยามในสมการ (2.3) และ (2.1) เป็นดิสตริบิวชันเอกพันธ์อันดับ $(\alpha - n)$ และเป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ สำหรับ $\mathrm{Re}(\alpha) < n$

พิสูจน์ เนื่องจาก $S_{\alpha,c}(x)$ และ $R_{\alpha,c}(x)$ สอดคล้องกับสมการออยเลอร์

นั่นคือ $(\alpha - n)R_{\alpha,c}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} R_{\alpha,c}(x)$

และ $(\alpha - n)S_{\alpha,c}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} S_{\alpha,c}(x)$

ดังนั้น $S_{\alpha,c}(x)$ และ $R_{\alpha,c}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเอกพันธ์อันดับ $(\alpha - n)$

และโดย (Donoghue. 1969:154-155) ได้แสดงว่าทุกๆเป็นดิสตริบิวชันเอกพันธ์จะเป็นเทมเพอร์ดิสตริบิวชันด้วย

บทตั้ง 2 (The convolution of tempered distributions)

ผลประสานของ $S_{\alpha,c}(x) * R_{\alpha,c}(x)$ หาค่าได้และเป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์

พิสูจน์ เลือก Supp $R_{\alpha,c}(x) = K \subset \overline{\Gamma}_+$ เมื่อ K เป็น compact set

จะได้ว่า $R_{\alpha,c}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ที่มี compact support

และโดย (Donoghue. 1969:156-159)

จะได้ว่า $S_{\alpha,c}(x) * R_{\alpha,c}(x)$ หาค่าได้และเป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์

บทตั้ง 3 กำหนดสมการ $\Diamond_c^k u(x) = \delta(x)$ เมื่อ $\Diamond_c^k$ เป็นตัวดำเนินการที่นิยามในสมการ ( )สำหรับ $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ δ เป็นดิสตริบิวชันไดแรคเดลตา จะได้ว่า $(-1)^k S_{2k,c}(x) * R_{2k,c}(x)$ เป็นผลเฉลยมูลฐานเพียงหนึ่งเดียวของสมการ เมื่อ $S_{\alpha,c}(x)$ และ $R_{\alpha,c}(x)$ นิยามในสมการ (2.3) และ (2.1) เมื่อ $\alpha = 2k$ นอกจากนี้ $u(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ด้วย

พิสูจน์ การพิสูจน์ปรากฏในบทความวิจัย (Bupasiri and Nonlaopon. 2010)

และโดยบทตั้ง 2 จะได้ว่า $(-1)^k S_{2k,c}(x) * R_{2k,c}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ด้วย

บทตั้ง 4 (The convolutions of $R_{\alpha,c}(x)$ and $S_{\alpha,c}(x)$)

กำหนดให้ $S_{\alpha,c}(x)$ และ $R_{\alpha,c}(x)$ นิยามในสมการ (2.3) และ (2.1) จะได้ว่า

1.) $S_{\alpha,c}(x) * S_{\beta,c}(x) = S_{\alpha+\beta,c}(x)$ เมื่อ α และ β เป็น complex parameters

2.) $R_{\alpha,c}(x) * R_{\beta,c}(x) = R_{\alpha+\beta,c}(x)$ สำหรับ α และ β เป็นจำนวนเต็มคู่ ยกเว้น กรณี α และ β เป็นจำนวนเต็มคี่เท่านั้น

พิสูจน์ 1.) การพิสูจน์ปรากฏในบทความวิจัย (Donoghue. 1969:158)

2.) ในกรณี α และ β เป็นจำนวนเต็มคู่จะแสดงได้ในบทความวิจัย (Kananthai. 1997:101-106)

ต่อไปจะเป็นการพิสูจน์ในกรณีที่ α เป็นจำนวนคี่และ β เป็นจำนวนคู่ หรือ α เป็นจำนวนคู่และ β เป็นจำนวนคี่ (Bupasiri and Nonlaopon. 2010) ได้แสดงว่า

$$\Box_c^k R_{\alpha,c}(x) = R_{\alpha-2k,c}(x) \qquad (2.4)$$

และ

$$\Box_c^k R_{2k,c}(x) = \delta \qquad (2.5)$$

เมื่อ $\Box_c^k$ เป็นตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก กระทำซ้ำกัน k ครั้ง และกำหนดโดย

$$\Box_c^k = \left(\frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i} - \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial x_j} \right)^k$$

สำหรับ m เป็นจำนวนคี่จะได้ว่า

$$\Box_c^k R_{m,c}(x) = R_{m-2k,c}(x)$$

และ

$$R_{2k,c}(x) * \Box_c^k R_{m,c}(x) = R_{2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

หรือ

$$(\Box_c^k R_{2k,c}(x)) * R_{m,c}(x) = R_{2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

$$\delta * R_{m,c}(x) = R_{2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

หรือ

$$R_{m,c}(x) = R_{2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

เนื่องจาก m เป็นจำนวนเต็มคี่ ดังนั้น m-2k เป็นจำนวนเต็มคี่ และ 2k เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้าให้ $\alpha = 2k, \beta = m - 2k$

จะได้ว่า

$$R_{\alpha,c}(x) * R_{\beta,c}(x) = R_{\alpha+\beta,c}(x)$$

ต่อไปจะแสดงในกรณี α เป็นจำนวนคู่บวก และ β เป็นจำนวนคี่

โดย (2.4) จะได้ว่า

$$\Box_c^k R_{0,c}(x) = R_{-2k,c}(x) \quad \text{หรือ} \quad \Box_c^k \delta = R_{-2k,c}(x)$$

เมื่อ $R_{0,c}(x) = \delta$

เนื่องจาก

$$R_{-2k,c}(x) * \Box_c^k R_{m,c}(x) = R_{-2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x) \text{ สำหรับ m เป็นจำนวนคี่}$$

หรือ

$$(\square_c^k \delta) * \square_c^k R_{m,c}(x) = R_{-2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

$$\delta * \square_c^k R_{m,c}(x) = R_{-2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

$$R_{m-2(2k),c}(x) = R_{-2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

ให้ $\alpha = -2k, \beta = m - 2k$

เนื่องจาก α เป็นจำนวนเต็มคู่บวก และ β เป็นจำนวนเต็มคี่

จะได้ว่า

$$R_{\alpha,c}(x) * R_{\beta,c}(x) = R_{\alpha+\beta,c}(x)$$

บทที่ 4
ผลการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้ ได้ค้นพบทฤษฎีบทการหาผลประสานของดิสตริบิวชันที่สัมพันธ์กับส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอริสซ์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.1

กำหนดให้ $T_{m,c}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันที่สัมพันธ์กับส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอริสซ์ นิยามในสมการ (1.1) แล้วจะได้ว่า $T_{m,c}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ และ

$$T_{m,c}(x) = T_{m-r,c}(x) * T_{r,c}(x) \tag{4.1}$$

เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ และ $r < m$

นอกจากนี้ ถ้า $l = m - r$, $n = r$ จะได้ว่า

$$T_{l,c}(x) * T_{n,c}(x) = T_{l+n,c}(x) \text{ สำหรับ } l + n = m$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $T_{m,c}(x) = (-1)^m S_{2m,c}(x) * R_{2m,c}(x), \quad (m = 0,1,2,\ldots)$

ดังนั้น โดยบทตั้ง 2 จะได้ว่า $T_{m,c}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์

โดยบทตั้ง 3 จะได้ว่า $\Diamond_c^m T_{m,c} = \delta$

จึงได้ว่า $\Diamond_c^r \Diamond_c^{m-r} T_{m,c} = \delta$ สำหรับ $m > r$

และโดยบทตั้ง 3 จะได้ว่า

$$\Diamond_c^{m-r} T_{m,c}(x) = (-1)^m S_{2r,c}(x) * R_{2r,c}(x),$$

คอนโวลูชันทั้งสองข้างของสมการด้วย

$$(-1)^{m-r} S_{2(m-r),c}(x) * R_{2(m-r),c}(x),$$

จะได้ว่า

$$(-1)^{m-r} S_{2(m-r),c}(x) * R_{2(m-r),c}(x) *$$
$$\Diamond_c^{m-r} T_{m,c}(x) = (-1)^{m-r} S_{2(m-r),c}(x) * R_{2(m-r),c}(x) * (-1)^m S_{2r,c}(x) * R_{2r,c}(x),$$

หรือ

$$\Diamond_c^{m-r} [(-1)^{m-r} S_{2(m-r),c}(x) * R_{2(m-r),c}(x)] * T_{m,c}(x)$$
$$= (-1)^m S_{2(m-r),c}(x) * S_{2r,c}(x) * R_{2(m-r),c}(x) * R_{2r,c}(x)$$

เนื่องจาก

$S_{2m,c}(x)$ และ $R_{2m,c}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์และเป็นสมาชิกในปริภูมิของ convolution algebra u'

โดยบทตั้ง 3 และ 4 จะได้ว่า

$$\delta * T_{m,c}(x) = (-1)^m S_{2m,c}(x) * R_{2m,c}(x),$$
$$T_{m,c}(x) = (-1)^m S_{2m,c}(x) * R_{2m,c}(x),$$

จากสมการ (4.1) จะได้ว่า

$$T_{m,c}(x) = T_{m-r,c}(x) * T_{r,c}(x)$$

ให้ $l = m - r$, $n = r$ จะได้ว่า

$$T_{l,c}(x) * T_{n,c}(x) = T_{l+n,c}(x) = T_{m,c}(x)$$

ทฤษฎีบท 4.2

กำหนดให้ $T_{m,c}(x)$ นิยามในสมการ (1.1) แล้ว $T_{m,c}(x)$ เป็นสมาชิกของปริภูมิ u' ของ convolution algebra และมี $T_{m,c}^{*-1}(x)$ เป็นอินเวอร์สของ $T_{m,c}(x)$ ซึ่ง

$$T_{m,c}(x) * T_{m,c}^{*-1}(x) = \delta = T_{m,c}^{*-1}(x) * T_{m,c}(x)$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $T_{m,c}(x) = (-1)^m S_{2m,c}(x) * R_{2m,c}(x),$

เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ตามบทตั้ง 2 และ

supports ของ $S_{2m,c}(x)$ และ $R_{2m,c}(x)$ เป็น compact

จึงทำให้ $S_{2m,c}(x)$ และ $R_{2m,c}(x)$ เป็นสมาชิกของปริภูมิ u' ของ convolution algebra

โดย (Zemanian. 1965:Theorem 6.2.1, 151) จะมี $T_{m,c}^{*-1}(x)$ เป็นอินเวอร์สเพียงตัวเดียว ซึ่ง

$$T_{m,c}(x) * T^{*-1}_{m,c}(x) = \delta = T^{*-1}_{m,c}(x) * T_{m,c}(x)$$

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้ มีจุดมุ่งหมายเพื่อหาผลประสานของดิสตริบิวชันที่สัมพันธ์กับส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอริสซ์

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. หาความสัมพันธ์ส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอริสซ์
2. ศึกษาผลประสานของผลคูณของแฟมิลี่ของดิสตริบิวชันที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการ $\Diamond_c^k$
3. หาอินเวอร์สของส่วนกลางของ $T_{m,c}(x) = S_{\alpha,c}(x) * R_{\beta,c}(x)$ ที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการ $\Diamond_c^k$

ขอบเขตของการวิจัย

ศึกษาผลประสานของดิสตริบิวชันของผลเฉลยมูลฐานที่เกิดจากสมการ

$$\Diamond_c^k \, u(x) = \delta(x)$$

โดยที่

$$\Diamond_c^k = \left[\frac{1}{c^4}\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right)^2 \right]^k$$

เป็นตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการไดมอนด์ กระทำซ้ำกัน k ครั้ง $p+q=n$ เป็นมิติของปริภูมิยูคลิเดียน $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า และ $\delta(x)$ เป็นดิสตริบิวชันไดแรคเดลตา

นอกจากนี้ยังหาผลประสานของผลคูณของแฟมิลี่ของดิสตริบิวชันที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการ $\Diamond_c^k$

สรุปผลการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ได้ค้นพบทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1

กำหนดให้ $T_{m,c}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันที่สัมพันธ์กับส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอริสซ์ นิยามในสมการ (1.1) แล้วจะได้ว่า $T_{m,c}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ และ

$$T_{m,c}(x) = T_{m-r,c}(x) * T_{r,c}(x)$$

เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ และ $r < m$

นอกจากนี้ ถ้า $l = m - r,\ n = r$ จะได้ว่า

$$T_{l,c}(x) * T_{n,c}(x) = T_{l+n,c}(x) \text{ สำหรับ } l + n = m$$

ทฤษฎีบท 4.2

กำหนดให้ $T_{m,c}(x)$ นิยามในสมการ (1.1) แล้ว $T_{m,c}(x)$ เป็นสมาชิกของปริภูมิ u' ของ convolution algebra และมี $T^{*-1}_{m,c}(x)$ เป็นอินเวอร์สของ $T_{m,c}(x)$ ซึ่ง

$$T_{m,c}(x) * T^{*-1}_{m,c}(x) = \delta = T^{*-1}_{m,c}(x) * T_{m,c}(x)$$

ข้อเสนอแนะ

ควรศึกษาการหาผลประสานของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยในรูปแบบอื่นๆที่หลากหลาย

บรรณานุกรม

S. Bupasiri and K. Nonlaopon. (2009). On the weak solutions of the compound equation related to the ultra-hyperbolic operators. **Far East J. Appl. Math.**, 35, 129-139.

_______________ . (2010). On the solution of n-dimensional of operator related to the diamond operator, **FJMS.**, 45, 69-80.

S. Bupasiri, (2010). On the weak solution of compound Laplace equation. **Far East J. Appl. Math.**, 47, 95-104.

____________ . (2010). On the weak solution of compound equation related to A Laplace operator. **International J. of functional analysis, operator theory and applications,** 2, 115-124.

I. M. Gelfand and G. E. Shilov. (1964). **Generalized Functions.** Academic Press, New York.

A. Kananthai. (1998). On the Convolution equation related to the Diamond Kernel of Marcel Riesz. **Journal of Computational and Applied Mathematics** 100, 33-39.

____________ . (2000). On the Convolution related to the n-dimensional Ultra-hyperbolic operator, **Journal of Computational and Applied Mathematics** 115, 301-308.

____________ . (1997). On the solution of the n-dimensional Diamond operator. **Applied Mathematics and Computation** 88, 27-37.

____________ . (1999). On the product of Ultra-hyperbolic operator related to the Elastic waves, **Computational Technologies** 4 No., 88-91.

A. Kananthai, S. Suantai and V. Longani. (2002). On the operator $\oplus^k$ related to the wave equation and Laplacian. **Applied Mathematics and Computation** 132, 219-229.

Y. Nozaki. (1964). On Riemann-Liouville integral of ultra-hyperbolic type. **Kodai Mathematical Seminar Reports**. 6(2), 69-87.

K. Nonlaopon and A. Kananthai. (2004). On the generalized heat kernel, **Computation and technology**.

P.K. Ram. (1998). **Generalized functions theory and technique**. 2 nd ed. Birkhauser Boston Hamilton Printing.

A. Saglam, H. Yildirim and M. Z. Sarikaya. (2009). On the product of the ultra-hyperbolic Bessel operator related to the elastic waves, Selcuk **J. Appl. Math.**,10, 85-93.

M. Z. Sarikaya and H. Yildirim. (2009). On the B-convolutions of the Bessel diamond kernel of Riesz, **Appl. Math. Comput**., 208, 18–22

G. Sritanratana and A. Kananthai. (2004). On the product of the non-linear Diamond operators related to the elastic wave, **Applied Mathematics and Computation**,147, 79-88.

________________ . (2002). On the nonlinear Diamond operator related to the Wave equation, **Nonlinear Analysis : Series B. Real World Application 3**, 465-470.

M.A. Tellez. (1994). The distributional Hankel transform of Marcel Riesz's ultra-hyperbolic kernel, **studies in Applied Mathematics** 93, 133-162.

S. E. Trione and Rubén A. Cerutti. (1999). The inversion of Marcel Riesz ultra perbolic operators, **Applied Mathematics Letters** 12, 129-136.

S. E. Trione. (1987). On Marcel Riesz's ultrahyperbolic kernel**. Trabajos de Matematica**, p. 116, preprint.

H. Yildirim, M. Z. Sarikaya and S. Ozturk. (2004). The solutions of the \$n\$-dimensional Bessel diamond operator and the Fourier-Bessel transform of their convolution, **Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)** 114 (4), pp. 375-387.

ประวัติผู้ทำวิจัย

ชื่อ – สกุล	นายสุดประไทย บุพศิริ
วัน เดือน ปีเกิด	23 มกราคม 2524
สถานที่เกิด	จังหวัดนครพนม
ประวัติการศึกษา	จบหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พ.ศ. 2542 โรงเรียนอากาศอำนวยศึกษา อำเภออากาศอำนวย จังหวัดสกลนคร จบหลักสูตรปริญญาตรี (ค.บ. คณิตศาสตร์) พ.ศ. 2547 สถาบันราชภัฏสกลนคร จังหวัดสกลนคร จบหลักสูตรปริญญาโท (วท.ม. คณิตศาสตร์) พ.ศ. 2552 มหาวิทยาลัยขอนแก่น จังหวัดขอนแก่น

ภาคผนวก

บทความวิจัยที่จะส่งตีพิมพ์ในวารสารมหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร