ผลการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีต่อระดับการคิดทางเรขาคณิต ตามตัวแบบแวน ฮีลี และความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ของนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์

นวลศรี ชำนาญกิจ

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์
2550

(งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจาก- มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์)

THE EFFECT OF GEOMETRIC TEACHING BASED ON DINA VAN HIELE'S PHASES ON VAN HIELE LEVELS OF GEOMETRIC THINKING AND PROOF ABILITY OF STUDENT TEACHERS IN MATHEMATICS PROGRAM, NAKHON SAWAN RAJABHAT UNIVERSITY

NUANSRI CHAMNANKIT

FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
NAKHON SAWAN RAJABHAT UNIVERSITY

2007

บทคัดย่อ

ชื่องานวิจัย ผลการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีต่อ ระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮีลีและความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ของนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์

ผู้วิจัย ผศ. ดร. นวลศรี ชำนาญกิจ

ปี 2550

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาผลการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีต่อ ระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮีลีและความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ของนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2550

ผู้วิจัยดำเนินการวิจัยตามขั้นตอนการวิจัย 2 ขั้นตอนดังนี้

ระยะที่ 1 สำรวจระดับการคิดนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 1-2 โดยใช้แบบวัดระดับการคิดซึ่งพัฒนาโดย ยูซิสกิน จากนั้นจัดสอนเนื้อหาเรื่อง รูปเรขาคณิต โดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี เป็นเวลา 4 สัปดาห์ ๆ ละ 3 คาบ รวม 12 คาบ เมื่อสิ้นสุดการสอนวัดระดับการคิดโดยใช้แบบวัดระดับการคิดฉบับเดิม นำผลการทดสอบมาใช้เป็นระดับการคิดก่อนเรียน

ระยะที่ 2 ทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ก่อนเรียน จัดการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เป็นเวลา 8 สัปดาห์ สัปดาห์ ละ 3 คาบ รวม 24 คาบ เมื่อสิ้นสุดการสอน ทดสอบวัดระดับการคิดและความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตอีกครั้ง นำผลมาใช้เป็นระดับการคิดหลังเรียน และความสามารถในการพิสูจน์หลังเรียน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้มี 3 ชุด คือ แบบทดสอบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิต ซึ่งพัฒนาโดย ยูซิสกิน (Usiskin. 1982) มีความเที่ยงเท่ากับ 0.70 แบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้น มีความยากง่าย อยู่ระหว่าง 0.64 -0.75 และอำนาจจำแนก อยู่ระหว่าง 0.43-0.64 มีความเที่ยงเท่ากับ 1.00 และแผนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยใช้ลำดับขั้นของ แวน ฮีลี ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้น

ผลการวิจัยปรากฏผลดังนี้

1. นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี แวน ฮีลี มีระดับการคิดทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

2. นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป มีจำนวนร้อยละ 92.9 ซึ่งไม่ต่ำกว่าเกณฑ์จำนวนที่คาดหวังไว้ร้อยละ 80

3. นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

4. นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตตั้งแต่ร้อยละ 60 มีจำนวนร้อยละ 53.57 ซึ่งไม่ต่ำกว่าเกณฑ์จำนวนที่คาดหวังไว้ร้อยละ 50

5. ระดับการคิดทางเรขาคณิตกับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี มีความสัมพันธ์กันทางบวกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

Abstract

Research Title The Effect of Geometric Teaching Based on Dina van Hiele's Phases on van Hiele Levels of Geometric Thinking and Proof Ability of Student Teachers in Mathematics Program, Nakhon Sawan Rajabhat University

Researcher Asst. Prof. Dr. Nuansri Chamnankit

Year 2007

The purpose of this research were 1) to study the effect of geometric teaching based on with Dina van Hiele's phases on van Hiele levels of student teachers' geometric thinking, and 2) to investigate the student teachers' geometric proof ability in mathematics program, Nakhon Sawan Rajabhat University, first semester of 2007 academic year.

This research consisted of two procedures as followed:

The first stage was to explore van Hiele levels of geometric thinking of the first and second years of 28 student teachers in mathematics program, using the levels of geometric thinking test developed by Usiskin. The researcher taught "geometric figures" based Dina van Hiele's phases for 4 weeks, 3 periods a week, 12 periods in total. After teaching, the student teachers were tested to explore van Hiele levels of geometric thinking with the same test. This score was the pretest for the levels geometric thinking of student teachers in the second stage.

The second stage was to investigate the student teachers' geometric proof ability. The researcher taught "geometric proof" based on Dina van Hiele's phases for 8 weeks, 3 periods a week 24 periods in total. After that, the student teachers were tested to explore geometric thinking and proof ability with the same tests as the pretest. These scores were the posttest for the levels geometric thinking and proof ability of students.

The research instruments were; 1) the level of geometric thinking test developed by Usiskin with 0.70 reliability, 2) geometric proof ability with 0.64- 0.75 degree of difficulty, 0.43-0.64 degree of discrimination and 1.00 reliability, and 3) the lesson plan using the Dina van Hiele's phases developed by the researcher.

The findings of this research were:

1. The student teachers being taught by Dina Hiele's phases were statistical significance higher in level of geometric thinking after learning than before learning.

2. The student teachers being taught by Dina Hiele's phases whose obtained the level 2 of geometric thinking or higher were 92.9 percent that much more than the criterion of 80 percent.

3. The student teachers being taught by Dina Hiele's phases were statistical significantly higher in geometric proof ability after learning than before learning.

4. The student teachers being taught by Dina Hiele's phases whose get at least the 60 percent of geometric proof ability were 53.57 percent that equalled 50 percent significantly.

5. The level of geometric thinking and geometric proof ability of student teachers being taught by Dina Hiele's phases was in positive relation significantly.

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงได้โดยได้รับความสนับสนุนทุนอุดหนุนการวิจัยจากสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ และได้รับความร่วมมือเป็นอย่างดีจากนักศึกษาครู ชั้นปีที่ 3-4 ในการเป็นกลุ่มตัวอย่างทดลองใช้เครื่องมือวิจัยจึงขอขอบใจมา ณ ที่นี้และขอขอบใจนักศึกษาครูชั้นปีที่ 1-2 ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่างในการทดลองสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่ให้ความร่วมมือในการร่วมกิจกรรมการเรียนการสอนอย่างตั้งใจตลอดมา

ขอขอบใจ คุณ ชานนท์ ชำนาญกิจที่ช่วยในการผลิตสื่อและอุปกรณ์ประกอบการสอน และขอขอบคุณ ผศ.ดร.บัญญัติ ชำนาญกิจ ที่ให้คำเสนอแนะในการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป

คุณค่าของงานวิจัยขอมอบให้บุพการีผู้ให้กำเนิด และขอมอบให้ ครู อาจารย์ ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้ผู้วิจัย และขอขอบคุณเจ้าของเอกสาร ตำรา งานวิจัยทุกท่าน ที่ผู้วิจัยได้นำมาใช้อ้างอิงในงานวิจัยครั้งนี้

นวลศรี ชำนาญกิจ

สารบัญ

บทที่ หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

ภาพที่ **หน้า**

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่สำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ ระเบียบ มีแบบแผน สามารถคิดวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจและแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีตลอดจนศาสตร์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนาคนให้เป็นมนุษย์ที่สมบูรณ์ มีความสมดุลทั้งร่างกาย จิตใจ สติปัญญา และอารมณ์ สามารถคิดเป็น ทำเป็น แก้ปัญหาเป็น สามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข (กรมวิชาการ. 2544: 1) จึงนับว่าคณิตศาสตร์เป็นสาขาหนึ่งที่มีความสำคัญไม่ยิ่งหย่อนไปกว่าสาขาอื่น ๆ

เรขาคณิตเป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่ว่าด้วยการศึกษาเกี่ยวกับ สมบัติ ความสัมพันธ์และการวัดในสเปส (Good. 1973: 260)เป็นวิชาที่มีภาษาสำหรับใช้ในการอรรถาธิบายสถานการณ์ต่างๆ ที่เกิดขึ้น ตลอดจนความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์แขนงอื่นที่มีลักษณะทางกายภาพหรือเป็นรูปธรรม (Sherard III. 1981: 20; Senk. 1989: 274 –275) เรขาคณิตช่วยพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงตรรกะและสามัญสำนึกเกี่ยวกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ของคนเรา (Kennedy. 1985: 2 ; NCTM 1981 cited by Suydam. 1985: 481; Sherard III. 1981: 20) มิติสัมพันธ์เป็นทักษะที่มีความสำคัญมากในการที่จะทำให้คนเราประสบความสำเร็จในการศึกษาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ (Sherard III. 1981: 20) เรขาคณิตช่วยสอนในการอ่าน การตีความ และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (NCTM. 1981 cited by Suydam. 1985 : 481) และเรขาคณิตยังเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์แขนงอื่น ได้แก่ พีชคณิต ตรีโกณมิติ แคลคูลัส และเป็นพื้นฐานในการเรียนวิชาอื่น ได้แก่ ฟิสิกส์ ศิลปะ ดาราศาสตร์ เคมี ชีววิทยา และยังเป็นทักษะในการเรียนสถาปัตยกรรมและการออกแบบเกี่ยวกับวิศวกรรม (Sherard III. 1981: 20; อ้างถึงใน นวลศรี ชำนาญกิจ. 2544: 1) แนวคิดทางเรขาคณิตมีความสำคัญต่อการดำรงชีวิต (Sherard III. 1981: 20; Suydam. 1985: 481) ยิ่งไปกว่านั้นเรขาคณิตยังเป็นทักษะพื้นฐานในการใช้ถ้อยคำ เพื่อการสื่อสารกับผู้อื่นในเรื่องที่เกี่ยวกับที่ตั้ง ขนาด หรือ รูปร่างของวัตถุ (Sherard III. 1981: 19)

นอกจากนี้เรขาคณิตยังเป็นตัวแบบของการพิสูจน์เชิงนิรนัยอีกด้วย ซึ่งเป็นการพิสูจน์ที่มีความสำคัญในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และสาขาที่เกี่ยวข้องโดยเฉพาะวิชาเรขาคณิต แต่ที่ผ่านมา

พบว่านักศึกษามหาวิทยาลัยราชภัฏยังคงมีปัญหาในการพิสูจน์ ซึ่งเห็นได้จากงานวิจัยของ มารศรี แนวจำปา (2546) ที่พบว่านักศึกษาชั้นปีที่ 3 โปรแกรมคณิตศาสตร์ สถาบันราชภัฏอุบลราชธานีมีสมรรถภาพในการพิสูจน์อยู่ในระดับน้อยถึงปานกลางเท่านั้น นอกจากนี้ นวลศรี ชำนาญกิจ (2544) ยังพบว่า นักศึกษาครูโปรแกรมคณิตศาสตร์ สถาบันราชภัฏนครสวรรค์ มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตที่คลาดเคลื่อนและมีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตอยู่ในระดับที่ต้องปรับปรุง

การที่นักศึกษาในสถาบันราชภัฏหรือมหาวิทยาลัยราชภัฏ มีความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์หรือเรขาคณิตอยู่ในระดับต้องปรับปรุงนั้น สาเหตุประการหนึ่งก็คือนักศึกษาเหล่านี้มีระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี อยู่ในระดับต่ำกว่าระดับ 2 ซึ่งเป็นระดับที่ผู้เรียนจะไม่สามารถเข้าใจและเขียนการพิสูจน์ได้ด้วยตนเอง เพราะผู้เรียนที่จะประสบความสำเร็จในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้จะต้องมีระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี ตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป (Usiskin.1982) สาเหตุน่าจะมาจากในขณะที่เรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นนั้นระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี ของนักเรียนอยู่ในระดับไม่ถึงระดับ 2 อยู่แล้ว ซึ่งจะเห็นได้จากผลการสำรวจระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี ของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาทั่วประเทศ พบว่า นักเรียนเป็นจำนวนมากมีระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี อยู่ในระดับไม่ถึงระดับ 2 (จากระดับ 0, 1, 2, 3, 4) ดังจะเห็นได้จากงานวิจัยของ พนิดา กองเกตุใหญ่ (2542) เบญจพร สว่างศรี (2545) นาตยา น้ำจิตตรง (2546) บุญเสริม ยุพจันทร์ (2547) และพรรณี เหมะสถล (2547) ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายนักเรียนไม่ได้เรียนเรขาคณิตอีกเลย เนื่องจากเนื้อหาเรขาคณิตไม่ได้บรรจุไว้ในหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ปัญหาระดับการคิดทางเรขาคณิตไม่ถึง ระดับ 2 นี้จึงไม่ได้รับการแก้ไข

ผลที่ตามมาคือเมื่อนักเรียนเข้ามาเรียนในมหาวิทยาลัย โดยเฉพาะอย่างยิ่งในมหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ ส่วนมากแล้วจะจบชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายในเขตจังหวัด นครสวรรค์ อุทัยธานี และชัยนาท ซึ่งมีระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี ไม่ถึงระดับ 2 เมื่อนักเรียนเหล่านี้o นักเรียนบางคนเข้ามาศึกษาในหลักสูตรครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ จะต้องลงทะเบียนเรียนรายวิชา เรขาคณิตเบื้องต้น รากฐานเรขาคณิต เรขาคณิตนอกแบบยุคลิด เป็นต้น จึงจำเป็นต้องได้รับการแก้ไขตั้งแต่ต้นเพื่อให้การเรียนการสอนเรขาคณิตประสบความสำเร็จตามจุดมุ่งหมายที่ตั้งไว้

ผู้วิจัยจึงได้วัดระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮีลี ของนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ทุกชั้นปีในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2549 จำนวน 39 คน พบว่า นักศึกษา 29 คน คิดเป็นร้อยละ 64 ของนักศึกษาทั้งหมด มีระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี ต่ำกว่าระดับ 2 ซึ่งอาจเป็นสาเหตุให้นักศึกษาไม่ประสบความสำเร็จในการเรียนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต นอกจากนี้การมีระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี อยู่ในระดับต่ำ อาจทำให้นักศึกษา

เหล่านี้เมื่อออกไปฝึกสอนหรือออกไปเป็นครู ก็จะใช้วิธีท่องการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในการสอนนักเรียน โดยไม่เข้าใจเนื้อหาอย่างแท้จริง สิ่งที่ตามมาก็คือทำให้นักเรียนไม่ประสบความสำเร็จในการเรียนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไปด้วย (นวลศรี ชำนาญกิจ. 2544) ระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี มีลักษณะเฉพาะโดยที่ในแต่ละระดับมีภาษาเป็นของตัวเอง ไม่สามารถข้ามระดับได้ แต่ผู้สอนสามารถจัดกิจกรรมการสอนเพื่อพัฒนาระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี ของผู้เรียนให้ก้าวไปยังระดับที่อยู่ถัดไปได้ โดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี (Crowley. 1985: Fuy, Geddes & Tischler. 1988: 7)

ระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮีลี มีความสำคัญในการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิต เนื่องจาก ระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮีลี มีความสัมพันธ์กับผลการเรียนเรขาคณิต ดังงานวิจัยของ ยูซิสกิน (Usiskin. 1982) ฮัน (Han. 1986) โบแบงโก (Bobango. 1987) สตอเฟอร์ (Stover. 1989) และ แม็คไบรด์ (McBride. 1996) ที่พบว่าระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮีลี มีความสัมพันธ์กับผลการเรียนเรขาคณิต และนอกจากนี้ระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี ยังมีความสัมพันธ์กับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตอีกด้วย ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ พนิดา กองเกตุใหญ่ (2542) และบุญเสริม ยุพจันทร์ (2547) ที่พบว่าระดับทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี มีความสัมพันธ์กับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ดังนั้นก่อนที่ผู้สอนจะจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตควรวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี ของผู้เรียนเสียก่อน ต่อจากนั้นจึงจัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้เหมาะสมกับระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮีลี ของผู้เรียน

การแก้ปัญหานักศึกษาครูไม่ประสบความสำเร็จในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตสามารถกระทำได้ด้วยการสอนเรขาคณิตโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี เพื่อให้นักศึกษาได้เลื่อนระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮีลี ไปสู่ระดับ 2 เสียก่อน หลังจากนั้นจึงจัดการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี อีกครั้ง นักศึกษาก็จะมีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ดังงานวิจัยของ บุญเสริม ยุพจันทร์ (2547) โดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรขาคณิตนักเรียนที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮีลี อยู่ในระดับ 2 โดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ในเนื้อหาเรื่อง การพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 พบว่า นักเรียนร้อยละ 40.74 ของนักเรียนทั้งหมดมีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต และนักเรียนร้อยละ 51.85 สามารถพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิตจากระดับ 2 ไปสู่ระดับ 3 การจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตโดยใช้ลำดับขั้นของแวน ฮีลี จึงมีความสำคัญและมีความจำเป็น กล่าวคือช่วยเลื่อนระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี จากระดับหนึ่งไป

สู่ระดับที่สูงขึ้นที่อยู่ถัดไปและเมื่อมีระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี อยู่ในระดับตั้งแต่ 2 ขึ้นไปจะทำให้นักเรียนมีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตอีกด้วย

ผู้วิจัยในฐานะเป็นผู้สอนรายวิชาเรขาคณิตเบื้องต้น ให้แก่นักศึกษาครูจึงเห็นสมควรจัดการสอนเรขาคณิตโดยการใช้ลำดับขั้นการสอนของไดอานา แวน ฮีลี เพื่อยกระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี ของนักศึกษาจากระดับต่ำกว่า 2 จนไปสู่ระดับ 2 แล้วจึงเริ่มสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี เมื่อนักศึกษาเหล่านี้มีระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮีลี อยู่ในระดับ 2 นักศึกษาจะมีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตแบบยุคลิด และเมื่อจัดการเรียนการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ให้นักศึกษาก้าวไปสู่ระดับ 2- 3 นักศึกษาจะสามารถเรียนเรขาคณิตแบบต่าง ๆ ที่นอกเหนือไปจากเรขาคณิตแบบยุคลิด เช่น เรขาคณิตนอกแบบยุคลิด เป็นต้น เป็นการเตรียมตัวนักศึกษาในการเรียนเรขาคณิตนอกแบบยุคลิด ในโอกาสต่อไป

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ดังต่อไปนี้คือ

1. เพื่อเปรียบเทียบระดับการคิดทางเรขาคณิตก่อนเรียนกับหลังเรียนของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี

2. เพื่อศึกษาจำนวนนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี ที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป

3. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อนเรียนกับหลังเรียนของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี

4. เพื่อศึกษาจำนวนนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็มขึ้นไป

5. เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับการคิดทางเรขาคณิตกับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี

ขอบเขตของการวิจัย

1. ขอบเขตด้านเนื้อหา

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยนี้แบ่งออกเป็น 2 ส่วนดังนี้คือ

ส่วนที่ 1 เนื้อหาที่ใช้ในการสอนเรขาคณิตโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี เพื่อเลื่อนระดับการคิดแก่นักศึกษาที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 ได้แก่ เรื่อง รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

ส่วนที่ 2 เนื้อหาที่ใช้ในการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี ให้แก่นักศึกษาที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 2 ได้แก่ เนื้อหาเรื่อง รูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการและรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 2) เส้นขนานแบ่งเนื้อหาย่อยออกเป็น 2 เรื่องคือ เส้นขนานและผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม 3) รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 เนื้อหาย่อย คือ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

2. ขอบเขตประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

2.1 ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ ได้แก่ นักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 1-4 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2550 จำนวน 58 คน

2.2 กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองนครั้งนี้ ได้แก่ นักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 1-2 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2550 จำนวน 28 คน ซึ่งได้มาจาการสุ่มแบบเจาะจง

3. ขอบเขตด้านตัวแปร

3.1 ตัวแปรอิสระ

ตัวแปรอิสระ คือ การสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี

3.2 ตัวแปรตาม

ตัวแปรตาม มี 2 ตัวแปร คือ ระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี และความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

นิยามศัพท์เฉพาะ

ระดับการคิดทางเรขาคณิต หมายถึง ระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี ซึ่งมีอยู่ 5 ระดับ ได้แก่ ระดับ 0 ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก(visualization) ระดับ 1 ระดับการวิเคราะห์ (analysis) ระดับ 2 ระดับการนิรนัยอย่างไม่เป็นทางการ (informal deduction) ระดับ 3 ระดับการนิรนัย (deduction) และ ระดับ 4 ระดับการคิดสุดยอด (rigor)

การสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี หมายถึง การสอนเรขาคณิตโดยใช้ลำดับ 5 ขั้น ของไดนา แวน ฮีลี ได้แก่ การสืบสวนสอบสวน การทำกิจกรรมที่มีทิศทาง การให้การอธิบาย การทำกิจกรรมที่ไม่กำหนดทิศทาง การบูรณาการ โดยมีการสอนอยู่ 2 ระยะดังนี้

ระยะที่ 1 การจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี เพื่อเลื่อนระดับการคิดแก่นักศึกษาที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮีลี อยู่ในระดับ 1 เรื่อง รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และรูปสี่เหลี่ยมคางหมู เป็นเวลา 4 สัปดาห์ ๆ ละ 3 คาบ รวม 12 คาบ

ระยะที่ 2 การจัดการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในเนื้อหาเรื่อง 1) ความเท่ากันทุกประการ ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 เนื้อหาย่อย คือ รูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการและรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 2) เส้นขนานแบ่งเนื้อหาย่อยออกเป็น 2 เรื่องคือ เส้นขนานและผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม 3) รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 เนื้อหาย่อย คือรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน เป็นเวลา 8 สัปดาห์ ๆ ละ 3 คาบ รวมทั้งสิ้น 24 คาบ

นักศึกษาครู หมายถึง นักศึกษาสาขาครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ (ค.บ. 5 ปี) ชั้นปีที่ 1-2 มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2550

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

การวิจัยในครั้งนี้คาดว่าจะได้รับประโยชน์ดังต่อไปนี้คือ

1. ได้แผนการสอนรายวิชา เรขาคณิตเบื้องต้น เมื่อนำไปใช้สอนนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ จะทำให้นักศึกษามี ระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮีลี สูงขึ้นและมีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งจะทำให้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต สูงตามไปด้วย

2. นักศึกษาครูสามารถนำความรู้และความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไปใช้ในการพิสูจน์แนวคิดหรือทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์และสาขาอื่น ๆ ที่ใช้เรขาคณิตเป็นพื้นฐาน เช่น พีชคณิต ตรีโกณมิติ แคลคูลัส ฟิสิกส์ ศิลปะ ดาราศาสตร์ เคมี และชีววิทยา เป็นต้น ได้เป็นอย่างดี

3. นักศึกษาครูสามารถนำประสบการณ์ที่ได้รับจากการเรียนรู้การสอนเรขาคณิตโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี ไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรขาคณิตให้แก่นักเรียน เมื่อนักศึกษาออกฝึกประสบการณ์วิชาชีพและไปประกอบอาชีพครูในโอกาสต่อไป

4.เป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรขาคณิตเพื่อเลื่อนระดับการคิดทางเรขาคณิตให้แก่ผู้เรียน

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะขอนำเสนอตามหัวข้อดังต่อไปนี้

1. ระดับการคิดตามตัวแบบของ แวน ฮีลี

1.1 ความเป็นมาของตัวแบบแวน ฮีลี และระดับการคิด

1.2 การกำหนดระดับการคิดตามตัวแบบแวน ฮีลี

1.3 ลักษณะสำคัญของระดับการคิดทางเรขาคณิต

1.4 พฤติกรรมระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี

1.5 การวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี

1.6 การสอนเรขาคณิตเพื่อยกระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮีลี

2. การจัดการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

2.1 ความหมายของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

2.1 วิธีพิสูจน์ทางเรขาคณิต

2.2 การสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

2.3 การวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

4.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับระดับการคิดตามตัวแบบแวน ฮีลี

4.1.1 งานวิจัยในบ่ระเทศ

4.1.2 งานวิจัยในต่างประเทศ

4.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และเรขาคณิต

4.2.1 งานวิจัยในประเทศ

4.2.2 งานวิจัยในต่างประเทศ

5. กรอบแนวคิดในการวิจัยและสมมุติฐานการวิจัย

ระดับการคิดตามตัวแบบของ แวน ฮีลี

1. ความเป็นมาของตัวแบบ แวน ฮีลี และระดับการคิด

นวลศรี ชำนาญกิจ (2544:326) กล่าวไว้ว่า ปัญหาการเรียนการสอนเรขาคณิตเป็นเรื่องที่สนใจมานาน เราเคยพบว่านักเรียนรู้จัก รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ไม่สามารถบอกความหมายของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส นักเรียนบางคนไม่เข้าใจว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และถึงแม้จะเป็นผู้ใหญ่แล้วก็ยังเรียนเรขาคณิตได้ไม่ดีเท่าที่ควร โดยเฉพาะอย่างยิ่งการพิสูจน์ทางเรขาคณิต นักเรียนบางคนคิดว่าเพราะเหตุใดจึงต้องพิสูจน์ในเมื่อรู้อยู่แล้วว่าเป็นจริง ทำให้วงการจิตวิทยาชาวรัสเซียและสวิสมีการสืบค้นไปยังนักเรียนในระดับชั้นต้น ๆ โดยประมาณ 60 ปีมาแล้ว สืบเนื่องมาจากงานวิจัยของครูสอนเรขาคณิตสองสามีภรรยา ชาวดัตช์ คือ แวน ฮีลี และ ไดนา แวน ฮีลี (van Hiele & Dina van Hiele) ที่ได้พยายามหาทางช่วยเหลือนักเรียนโดยการคิดและวิเคราะห์ปัญหา และพบสาเหตุที่ทำให้นักเรียนประสบความยุ่งยากในการเรียนเรขาคณิต นั่นคือ พบว่าในการเรียนเรขาคณิตนั้นผู้เรียนแต่ละคนจะมีระดับการคิดทางเรขาคณิต (level of geometric thought) ของตนเอง ในการเรียนการสอนเรขาคณิตนั้นระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนเป็นอุปสรรคที่สำคัญต่อการสื่อสารระหว่างนักเรียนกับครูและกับเพื่อนนักเรียนด้วยกัน เพราะนักเรียนและครูมีระดับการคิดทางเรขาคณิตต่างระดับกันทำให้สื่อสารกันไม่เข้าใจ ถ้าเนื้อหาในหนังสือเรียนอยู่สูงกว่าระดับการคิดของนักเรียนหรือครูใช้วิธีการสอนโดยให้แนวคิดที่อยู่สูงกว่าระดับการคิดของนักเรียนจะส่งผลให้นักเรียนไม่สามารถเข้าใจปัญหาในหนังสือเรียนหรืองานที่ครูกำหนดให้ จึงทำกิจกรรมไม่ได้ ตอบไม่ตรงคำถาม เป็นต้น

ต่อมาในทศวรรษที่ 196 แนวคิดนี้ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวางในสหรัฐอเมริกา แต่ก็ยังไม่ได้มีการนำแนวคิดเกี่ยวกับทฤษฎีของตัวแบบของ แวน ฮีลี ไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตในโรงเรียนแต่อย่างใด จนกระทั่งมีการตีพิมพ์หนังสือเล่มหนึ่งของ สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา(NCTM) ที่ชื่อว่า Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. ในปี ค.ศ. 1989 จึงมีการนำทฤษฎีของแวน ฮีลี ไปใช้เป็นเครื่องมือในการสอนเรขาคณิตในโรงเรียน ในมาตรฐานนี้ ได้เน้นให้เห็นความสำคัญของการเรียนรู้อย่างมีลำดับขั้นในลักษณะเดียวกับที่ตัวแบบแวน ฮีลี กล่าวเอาไว้ โดยเริ่มต้นให้นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับรูปเรขาคณิตในลักษณะเป็นภาพรวม ๆ และวิเคราะห์สมบัติที่มีลักษณะเฉพาะระหว่างรูปต่าง ๆ และใช้การนิรนัยแบบง่าย ๆ การสอนมีข้อเสนอแนะให้คำนึงถึงลำดับขั้นของระดับการคิด (The National Council of Teachers of Mathematics. 1989 : 48) และนอกจากนี้ มาตรฐานยังเสนอแนะวิธีการเรียนซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดเกี่ยวกับลำดับขั้นของแวน ฮีลี โดยนำเสนอมุมมองของการจัดสิ่งแวดล้อมภายในห้องเรียนที่เอื้อให้นักเรียนมีความก้าวหน้าทางเรขาคณิตโดยการได้

ทำกิจกรรมในรูปแบบต่าง ๆ ได้แก่ การอภิปราย การอรรถาธิบาย และการสาธิต การบูรณาการกระบวนการทางสังคม ใช้การสื่อสารโดยให้มีการแลกเปลี่ยนแนวคิด ทำการทดสอบเพื่อยืนยันข้อคาดเดา (conjectures) ความรู้ได้มาจาก การพูดคุยสนทนากัน การเขียน การฟังและ การอ่าน (NCTM.1989: 214) และ ยูซิสกิน (Usiskin. 1982; cited by Teppo. 1991: 215-216. 1982) ได้ทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตกับระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พบว่า การสอนเรขาคณิตอย่างเป็นระบบ (Systematic geometry instruction) ให้นักเรียนก่อนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายมี ความจำเป็น เพราะจะช่วยให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเรียนเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายและโดยเฉพาะอย่างยิ่งนักเรียนที่มีระดับการคิดระดับ 2 (การนิรนัยอย่างไม่เป็นทางการ) จะพบความสำเร็จในการเรียนเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

2. การกำหนดระดับการคิดตามตัวแบบแวน ฮีลี

การกำหนดระดับการคิดตามตัวแบบแวน ฮีลี แบ่งออกเป็น 3 แบบ (กุลยา เหมวัสดุกิจ. 2545: 16) ดังนี้

2.1 แบบดั้งเดิม

เป็นแบบที่ แวน ฮีลี กำหนด ใช้หมายเลข 0 -4 ในการกำหนดระดับการคิดทั้ง 5 ระดับ (Crowley. 1987: 2-3; Burger and Shaughnessy. 1989: 31 อ้างถึงใน กุลยา เหมวัสดุกิจ: 17) ดังนี้

ระดับ 0 หมายถึง ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก(visualization)

ระดับ 1 หมายถึง ระดับการวิเคราะห์ (analysis/descriptive)

ระดับ 2 หมายถึง ระดับนิรนัยอย่างไม่เป็นทางการ(informal deduction/abstraction)

ระดับ 3 หมายถึง ระดับนิรนัยอย่างเป็นทางการ (deduction)

ระดับ 4 หมายถึง ระดับการคิดสุดยอด (rigor)

2.2 แบบใช้หมายเลข 1-5 ในการกำหนดระดับ

ในการกำหนดระดับการคิดทั้ง 5 ระดับ (Swafford, Jones & Thornton. 1997: 469 อ้างอิงใน กุลยา เหมวัสดุกิจ: 17) กำหนดดังนี้

ระดับ 0 หมายถึง ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก(visualization)

ระดับ 1 หมายถึง ระดับการวิเคราะห์ (analysis/descriptive)

ระดับ 2 หมายถึง ระดับอนุมานอย่างไม่มีแบบแผน (informal deduction/abstraction)

ระดับ 3 หมายถึง ระดับอนุมานอย่างมีแบบแผน (deduction)

ระดับ 4 หมายถึง ระดับการคิดสุดยอด (rigor)

2.4 **แบบใช้หมายเลข 0-5 ในการกำหนดระดับ**

ในการกำหนดระดับการคิดทั้ง 5 ระดับ (Clements and Battista. 1992b; cited by Clements et al., 1999: 193 ; อ้างอิงใน กุลยา เหมวัสดุกิจ: 17) กำหนดดังนี้

ระดับ 0 หมายถึง ระดับก่อนการจำแนกออก(prerecognitive)

ระดับ 1 หมายถึง ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก(visualization)

ระดับ 2 หมายถึง ระดับการวิเคราะห์ (analysis)

ระดับ 3 หมายถึง ระดับการคิดแบบนามธรรม(abstraction)

ระดับ 4 หมายถึง ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน(formal deduction)

ระดับ 5 หมายถึง ระดับการคิดสุดยอด(rigor)

จากที่กล่าวไว้ข้างต้น สรุปได้ว่า ระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี สามารถแบ่งออกได้ 5 ระดับ คือ ระดับ 0 ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก (visualization) ระดับ 1 ระดับการวิเคราะห์ (analysis) ระดับ 2 ระดับการนิรนัยอย่างไม่เป็นทางการ (informal deduction) ระดับ 3 ระดับการนิรนัย (deduction) และ ระดับ 4 ระดับการคิดสุดยอด (rigor)

3. **ลักษณะสำคัญของระดับการคิดทางเรขาคณิต ตามตัวแบบ แวน ฮีลี**

ระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี มีลักษณะที่สำคัญ 5 ประการ (Crowley. 1987: 4) ดังนี้

1. **เป็นไปตามลำดับขั้น** (Sequential) โดยที่มีการคิดที่เรียงลำดับทีละระดับ ไม่มีการข้ามระดับ นักเรียนจะมีการคิดอยู่ในระดับใดนั้น ต้องผ่านระดับที่มีมาก่อนเสมอ

2. **ความก้าวหน้า** (Advancement) ความก้าวหน้าจากระดับหนึ่งไปสู่อีกระดับหนึ่งขึ้นอยู่กับเนื้อหาและวิธีสอน ไม่ขึ้นอยู่กับอายุหรือวุฒิภาวะ ไม่มีวิธีสอนใดที่จะทำให้นักเรียนสามารถก้าวกระโดดข้ามระดับต่าง ๆ ได้

3. **ความชัดแจ้ง** (Intrinsic and Extrinsic) ตัวอย่างเช่น ในระดับ 0 เป็นเพียงการรู้จักเฉพาะรูปร่างแต่ไม่เข้าในสมบัติของรูป พอมาถึงระดับ 1 จะสามารถเข้าใจ สมบัติ และองค์ประกอบของรูปด้วย

4. **ภาษา** (Linguistics) ในแต่ละระดับจะมีภาษาและสัญลักษณ์ตลอดจนความสัมพันธ์ของการเชื่อมโยงสัญลักษณ์เหล่านี้เป็นของตนเอง ถ้าครูใช้ภาษาที่อยู่สูงกว่าระดับการคิดของนักเรียนจะทำให้นักเรียนจะไม่สามารถเข้าใจได้

5. **การไม่เข้ากัน** (Mismatch) การสอนต้องให้สอดคล้องกับระดับการคิดของ

นักเรียน ถ้าครูใช้วิธีการสอนในระดับที่สูงกว่าระดับการคิดของนักเรียน นักเรียนจะไม่เข้าใจและอาจจะมีแนวโน้มที่จะลดระดับการคิดลงได้

สรุปได้ว่าลักษณะการคิดมีอยู่ 5 ประการคือ เป็นไปตามลำดับขั้น ความก้าวหน้า ความชัดแจ้ง ภาษา และการไม่เข้ากัน

ในการสอนมโนทัศน์ทางเรขาคณิตนั้นต้องจัดกิจกรรมให้เหมาะสมกับระดับการคิดของนักเรียน นั่นคือ ถ้า เป็นเด็กเล็กต้องใช้ภาษาง่าย ๆ และอาจจะไม่จำเป็นต้องใช้ภาษาเขียน ถ้าเป็นเด็กโตจะสามารถใช้ภาษาเขียนได้ และต้องสอนจากสิ่งที่ง่ายไปยาก ไม่ควรนำสิ่งที่เกินระดับการคิดของนักเรียนมาสอนเพราะนักเรียนจะไม่สามารถเข้าใจได้ ผู้เรียนที่มีระดับการคิดอยู่ในระดับตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป จึงจะสามารถเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ดังนั้นผู้สอนจึงควรจัดการเรียนการสอนเพื่อยกระดับการคิดของนักเรียนจนถึงระดับ 2 เสียก่อนจึงสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

4. **พฤติกรรมแต่ละระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี**

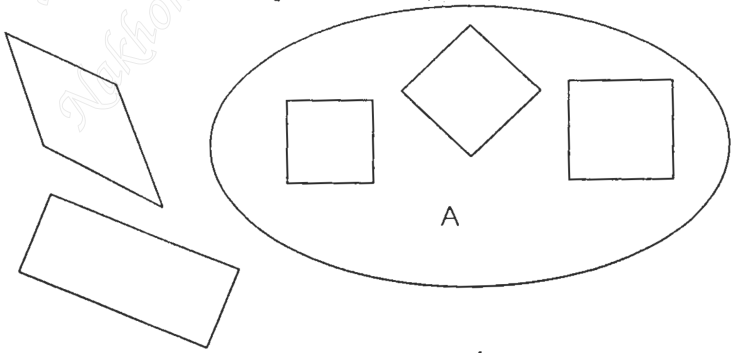
ครอว์เลย์ (Crowley.1987: 2-16) ได้กล่าวถึงพฤติกรรมของแต่ละระดับการคิดไว้ดังนี้

4.1 **ระดับ 0 การมองเห็น** (Visualization)

เป็นการมองเห็นรูปเรขาคณิตในลักษณะของภาพรวม แต่ไม่เห็นรายละเอียด ไม่เข้าใจสมบัติหรือองค์ประกอบของรูป รู้จักศัพท์ทางเรขาคณิต สามารถแยกแยะรูปร่างได้โดยอาศัยประสบการณ์ที่เคยพบมาก่อน สามารถลอกและเลียนแบบการวาดรูปได้

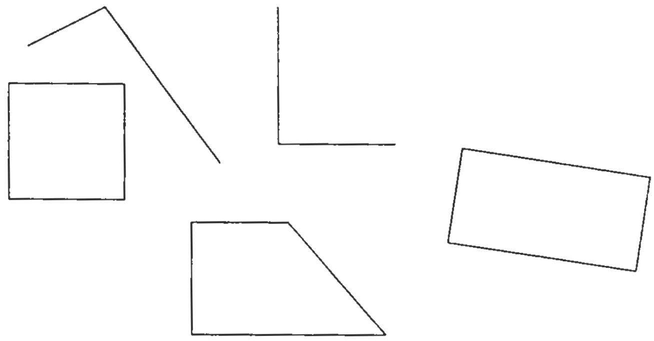
ตัวอย่างพฤติกรรมของนักเรียนในระดับ 0

1) นักเรียนสามารถยกตัวอย่างรูปเรขาคณิตโดยมองภาพรวม ๆ ตัวอย่างเช่น เมื่อกำหนดรูปให้ นักเรียนสามารถระบุได้ว่ารูปใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังภาพประกอบที่ 2.1 จะได้ว่า เซต A แทนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



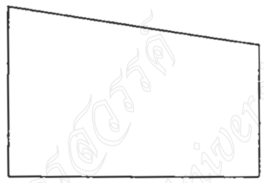
ภาพประกอบที่ 2.1

2) นักเรียนสามารถอธิบายเกี่ยวกับมุม รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และรูปสามเหลี่ยมในลักษณะต่าง ๆ จากรูปภาพหรือแผนภาพ ดัง ภาพประกอบที่ 2.2



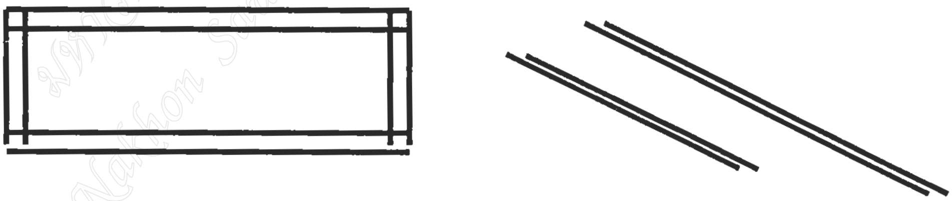
ภาพประกอบที่ 2.2

3) นักเรียนสามารถมองเห็นมุมฉากในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ดังภาพประกอบที่ 2.3



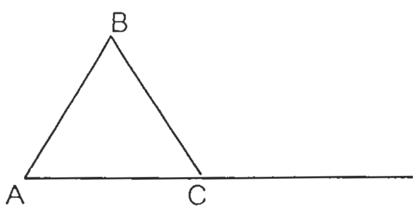
ภาพประกอบที่ 2. 3

4) นักเรียนสามารถสร้างรูปหรือวาดรูปหรือคัดลอกรูปได้ ตัวอย่างเช่น สามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเส้นขนาน โดยใช้ ดี-สติกซ์ (D-stix) ดังภาพประกอบที่ 2.4 เป็นต้น



ภาพประกอบที่ 2.4

5) นักเรียนสามารถเรียกชื่อรูปโดยใช้คำศัพท์เฉพาะหรือศัพท์สามัญได้ เช่น เรียกชื่อมุม โดยใช้สี ว่า มุมแดง หรือใช้ สัญลักษณ์ เช่น มุม A รวมกับ มุม B เท่ากับมุม C ดังภาพประกอบที่ 2.5

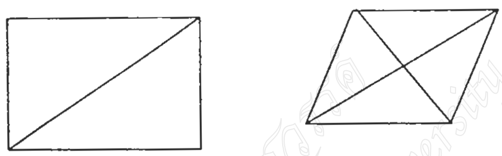


ภาพประกอบที่ 2.5

6) นักเรียนสามารถเปรียบเทียบและจัดประเภทของรูปเรขาคณิตโดยใช้การมองภาพรวม ๆ เช่น ให้คำอธิบายความแตกต่างของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากว่า "รูปหนึ่งใหญ่กว่าอีกรูปหนึ่ง"

7) นักเรียนอธิบายรูปเรขาคณิตโดยใช้ถ้อยคำที่แสดงถึงภาพรวม ๆ ของรูป เช่น นักเรียนอธิบายรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากว่า "มองดูเหมือนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส"

8) นักเรียนสามารถแก้โจทย์ปัญหาที่เคยพบโดยดูจากรูปมากกว่านำสมบัติของรูปไปใช้ เช่น การลองผิดลองถูกในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับปริศนาแทนแกรม (Tangram puzzle) เช่น สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จากชิ้นส่วนรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ 2 ชิ้น ดังภาพประกอบที่ 2.6



ภาพประกอบที่ 2.6

9) นักเรียนสามารถระบุส่วนต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิต แต่ไม่สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบหรือสมบัติของรูปเรขาคณิต และนอกจากนี้ยังไม่สามารถสรุปเป็นกรณีทั่วไป

4.2 **ระดับการคิด ระดับ 1 การวิเคราะห์** (Analysis)

นักเรียนเริ่มวิเคราะห์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต ผ่านการสังเกตและการทดลอง สามารถบอกลักษณะของรูปเรขาคณิตได้ โดยดูจากองค์ประกอบหรือสมบัติต่าง ๆ ของรูป

ตัวอย่างพฤติกรรมของนักเรียนในระดับ 1

(1)นักเรียนสามารถบอกและทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบต่าง ๆ ของรูปได้ เช่น สามารถบอกได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีมุมทุกมุมเป็นมุมฉากและด้านทุกด้านยาวเท่ากัน โดยการวัดขนาดของมุมและความยาวของด้านหรือใช้วิธีอื่น ๆ เป็นต้น

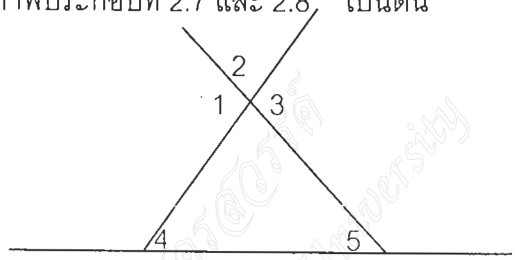
(2) นักเรียนสามารถเรียกชื่อส่วนต่าง ๆ ของรูปได้ เช่น สามารถสังเกตเห็นว่ารูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีด้านตรงข้ามขนานกัน และใช้วิธีตรวจสอบว่าด้านตรงข้ามจะไม่ตัดกันและมีระยะเท่ากันเสมอ

(3)นักเรียนสามารถเปรียบเทียบรูปเรขาคณิตโดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบของรูป เช่น นักเรียนสามารถบอกความเหมือนและความแตกต่างของมุมและด้านจากชิ้นส่วนต่าง ๆ ของรูป

(4)นักเรียนสามารถจัดประเภทของรูปโดยการแยกสิ่งที่เป็นตัวอย่างออกมาจากสิ่งที่ไม่เป็นตัวอย่าง เช่น สามารถแยกรูปว่าวออกมาจากรูปเรขาคณิตอื่น ๆ ได้

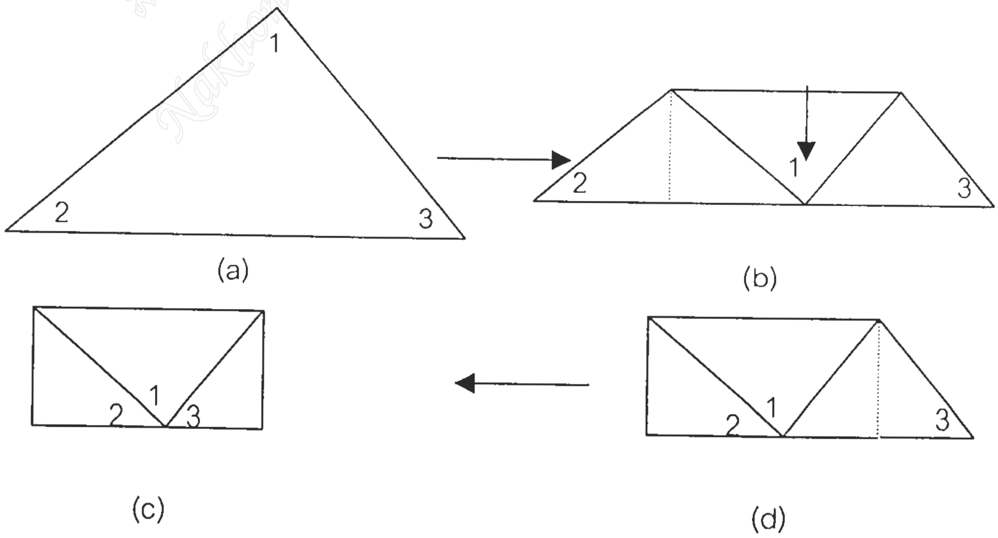
(5)นักเรียนสามารถใช้สมบัติของรูปในการตีความและอธิบายลักษณะของรูปและนำสมบัติไปสร้างหรือวาดรูป เช่น นักเรียนรู้จักรูปสี่เหลี่ยมแล้วนำสมบัติสองอย่าง คือ "มี 4 ด้าน" และ "ด้านทุกด้านยาวเท่ากัน" แต่ไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสไปใช้เพื่อค้นหาว่ารูปสี่เหลี่ยมชนิดใดบ้างที่มีลักษณะดังกล่าวซึ่งพบว่ารูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีด้านยาวเท่ากันสี่ด้าน เป็นต้น

(6) นักเรียนสามารถอธิบายรูปโดยการสรุปเป็นสมบัติทั่วไปได้ เช่น พบว่าเราสามารถหามุมสามมุมรวมกันเป็นมุมตรงและมุมทั้งสามเท่ากันทุกประการกับมุมสามมุมของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ ดังภาพประกอบที่ 2.7 และ 2.8 เป็นต้น



ภาพประกอบที่ 2.7

จากภาพประกอบ 7 จะได้ว่า $\hat{5} = \hat{3}$ และ $\hat{1} = \hat{4}$ ซึ่งสามารถแสดงได้โดยการเจาะ $\hat{5}$ $\hat{3}$ $\hat{1}$ และ $\hat{4}$ แล้วนำมุม $\hat{5}$ ไปแทนที่มุม $\hat{3}$ และ $\hat{4}$ ไปแทนที่ $\hat{1}$ จะได้ว่า $\hat{1}$ $\hat{2}$ และ $\hat{3}$ รวมกันเป็นมุมตรงจึงมีขนาดเท่ากับ 180° ดังนั้น $\hat{4}$ $\hat{2}$ และ $\hat{5}$ รวมกันได้ 180° นั่นคือมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180°



ภาพประกอบที่ 2.8

จากภาพประกอบที่ 2.8 เป็นการแสดงลำดับขั้นในการพับกระดาษเพื่อแสดงว่าผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมเป็น 180° มีลำดับขั้นดังนี้คือ ขั้นที่1 (รูป (a)) เป็นชิ้นส่วนของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ขั้นที่ 2 (รูป(b)) แสดงการพับมุม 1 ให้มุมยอดอยู่บนด้านด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม และขั้นที่ 3 (รูป(c)) แสดงการพับมุม 2 มาบรรจบกับมุม 1 และให้มุมยอดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ขั้นที่ 4(รูป (d)) แสดงการพับ มุม 3 ให้ มุมยอดมาบรรจบกับมุม 1 และอยู่บนเส้นตรงเดียวกับมุม 2 และ มุม 1 ดังนั้นจะได้ว่า มุม 1, มุม 2 และมุม 3 รวมกันได้ 180° เพราะเป็นมุมประชิดบนเส้นตรงเดียวกัน ดังนั้นมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180°

(7) นักเรียนสามารถอธิบายรูปโดยใช้สมบัติของรูป เช่นให้คำอธิบายสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสดังนี้ " มี 4 ด้าน มี 4 มุมฉาก ทุกด้านยาวเท่ากัน และ ด้านตรงข้ามขนานกัน "

(8) นักเรียนสามารถค้นพบสมบัติของรูปที่ไม่คุ้นเคยมาก่อนเช่น เมื่อรู้จักรูปว่าวแล้ว ต่อมาสามารถค้นพบและบอกสมบัติของรูปว่าวได้

(9) นักเรียนแก้ปัญหาเรขาคณิตจากการใช้สมบัติของรูปเรขาคณิตได้ ตัวอย่างเช่น เมื่อทราบสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและความยาวด้านประกอบมุมฉาก สามารถนำไปหาความยาวของเส้นทแยงมุมได้

(10) นักเรียนไม่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ของรูปได้ เช่น ไม่เข้าใจว่า ถ้าด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีความยาวเท่ากัน แล้ว จะทำให้ได้ขนาดของมุมตรงข้ามเท่ากันด้วย

(11) นักเรียนยังไม่สามารถสร้างและใช้บทนิยามอย่างเป็นทางการได้ เช่น ไม่สามารถบอกบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งเป็นเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอได้

(12) นักเรียนยังไม่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตได้ เช่น ไม่เข้าใจว่า รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปว่าว เป็นต้น นักเรียนยังไม่เห็นความสำคัญของการพิสูจน์หรือไม่ใช้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ในการอธิบายสิ่งที่ค้นพบ เช่น จากการวัด พบว่ามุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา จึงยังไม่เห็นความจำเป็นของการให้เหตุผลแบบนิรนัยเพื่อหาเหตุผลประกอบ

4.3 ระดับการคิด ระดับ 2 การนิรนัยอย่างไม่เป็นทางการ(Informal Deduction)

ในระดับนี้นักเรียนสามารถมองเห็นความสัมพันธ์ของสมบัติทั้งภายในรูปและความสัมพันธ์ระหว่างรูปต่าง ๆ สามารถจำแนกประเภทของรูปได้ เริ่มเข้าใจบทนิยามและใช้การให้เหตุผลอย่างไม่เป็นทางการ แต่ยังไม่เข้าใจระบบสัจพจน์ในการนิรนัย และสามารถเลียนแบบการพิสูจน์แต่ยังทำการพิสูจน์ด้วยตนเองไม่ได้

ตัวอย่างพฤติกรรมของนักเรียนในระดับ 2

(1) นักเรียนสามารถบอกสมบัติที่แตกต่างกันของรูปเรขาคณิตและตรวจสอบได้ว่าสมบัติดังกล่าวเพียงพอหรือไม่ เช่นสามารถเลือกสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและทดสอบโดยการวาดรูปประกอบ

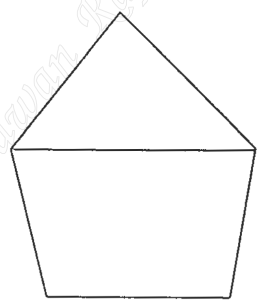
(2) นักเรียนระบุสมบัติขั้นต่ำในการกำหนดลักษณะของรูป เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสต้องเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและมีด้านยาวเท่ากันทุกด้านเป็นต้น

(3)สามารถสร้างบทนิยามและใช้บทนิยามในการจัดประเภทของรูปเช่น อธิบายว่าเหตุใด รูปสี่เหลี่ยมเหล่านั้นจึงเป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว

(4)นักเรียนสามารถใช้ข้อมูลที่กำหนดให้หาผลสรุปโดยใช้ความสัมพันธ์ทางตรรกศาสตร์ เช่น ถ้า $\hat{A} = \hat{B}$ และ $\hat{C} = \hat{B}$ แล้ว $\hat{A} = \hat{C}$ (เพราะต่างเท่ากับ $\hat{B}$)

(5) นักเรียนสามารถเรียงลำดับสมบัติของรูปเรขาคณิตได้ เช่น รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เป็นต้น

(6) นักเรียนสามารถค้นพบสมบัติใหม่จากการนิรนัย เช่น พบว่าผลบวกของมุมภายในรูปห้าเหลี่ยมเป็น 540 องศา จากการแบ่งมุมของรูปห้าเหลี่ยมเป็นมุมของรูปสามเหลี่ยมและมุมของรูปสี่เหลี่ยม ดังภาพประกอบที่ 2.9



ภาพประกอบที่ 2.9

จากภาพประกอบ 9 จะได้ว่า ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม เท่ากับ 180° และผลบวกของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมเท่ากับ 360° ดังนั้น ผลบวกมุมภายในของรูปห้าเหลี่ยมเท่ากับ $180^\circ + 360^\circ = 540^\circ$

(7) นักเรียนสามารถให้เหตุผลแบบนิรนัยอย่างไม่เป็นทางการได้ เช่น สามารถพิสูจน์ว่า ผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมเป็น 180 องศา แต่ผู้สอนต้องใช้คำถามนำทาง

(8) นักเรียนสามารถแสดงการให้เหตุผลในการพิสูจน์มากกว่าหนึ่งแบบ

(9) นักเรียนไม่สามารถแก้ปัญหาแบบนิรนัยได้

(10) นักเรียนยังไม่สามารถแยกแยะระหว่างประโยคเงื่อนไขและบทกลับได้

(11) นักเรียนยังไม่สามารถสร้างความสัมพันธ์ของเครือข่ายของทฤษฎีบทได้

4.4 **ระดับ 3 การนิรนัย** (Deduction)

นักเรียนเข้าใจการใช้ระบบสัจพจน์ในการสร้างทฤษฎีบททางเรขาคณิต เข้าใจความสัมพันธ์และบทบาทของ คำอนิยาม สัจพจน์ บทนิยาม ทฤษฎีบท และการพิสูจน์ สามารถสร้างการพิสูจน์ด้วยตนเองได้ และทำได้มากกว่า 1 วิธี เข้าใจเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ เข้าใจความแตกต่างระหว่างประพจน์และบทกลับของประพจน์

ตัวอย่างพฤติกรรมนักเรียนในระดับ 3

(1) นักเรียนเห็นความจำเป็นของ คำอนิยาม บทนิยาม และ สมมติฐานพื้นฐาน เช่น นักเรียนสามารถยกตัวอย่างสัจพจน์และทฤษฎีบททางเรขาคณิตระบบยุคลิดและอธิบายสิ่ง ที่เกี่ยวข้องได้

(2)นักเรียนยอมรับคุณลักษณะของบทนิยามอย่างเป็นทางการ (เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ) เช่น นักเรียนบอกสมบัติที่เพียงพอสำหรับการให้นิยามรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและแสดงสมบัติอื่นจากสมบัติที่เพียงพอ ได้แก่ บอกว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนาน แบ่งรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอประการหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เป็นต้น

(3) นักเรียนสามารถพิสูจน์ความสัมพันธ์ที่อยู่ในระบบสัจพจน์ซึ่งนักเรียนในระดับ 2 ยังทำไม่ได้ เช่น สามารถพิสูจน์ได้ว่า ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 180 องศา โดยใช้ การพิสูจน์อย่างเป็นทางการ

(4)พิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างทฤษฎีบทและข้อความที่เกี่ยวข้อง (บทกลับประพจน์แย้งสลับที่) เช่น นักเรียนสามารถพิสูจน์ว่า ถ้า เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแล้ว มุมที่ฐานมีขนาดเท่ากันและถ้ามุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากันแล้ว รูปนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เป็นต้น

4.5 **ระดับ 4 ระดับสุดยอด** (rigor)

ผู้เรียนสามารถใช้ระบบสัจพจน์หลาย ๆ ระบบในการทำงาน มีการเรียนเรขาคณิตนอกแบบยุคลิด และสามารถทำการเปรียบเทียบเรขาคณิตระบบอื่นๆ ได้ และเข้าใจเรขาคณิตที่เป็นนามธรรม

ตัวอย่างพฤติกรรมของนักเรียนในระดับ 4

(1) นักเรียนสามารถสร้างทฤษฎีบทได้อย่างถูกต้องในระบบสัจพจน์ที่แตกต่างกัน เช่น รากฐานเรขาคณิตของ ฮิลแบร์ต

(2) นักเรียนสามารถเปรียบเทียบระบบสัจพจน์ เช่น เรขาคณิตระบบยุคลิด และเรขาคณิตนอกระบบยุคลิด

(3) นักเรียนยอมรับสัจพจน์ที่ต้องกัน (consistency) ความเป็นอิสระของสัจพจน์ และความสมมูลกันของสัจพจน์

(4) สามารถคิดวิธีแก้ปัญหาที่เป็นกรณีทั่วไปได้

(5) สามารถศึกษาได้อย่างลึกซึ้งเพื่อพัฒนาไปถึงวิธีการใหม่และวิธีทางตรรกศาสตร์

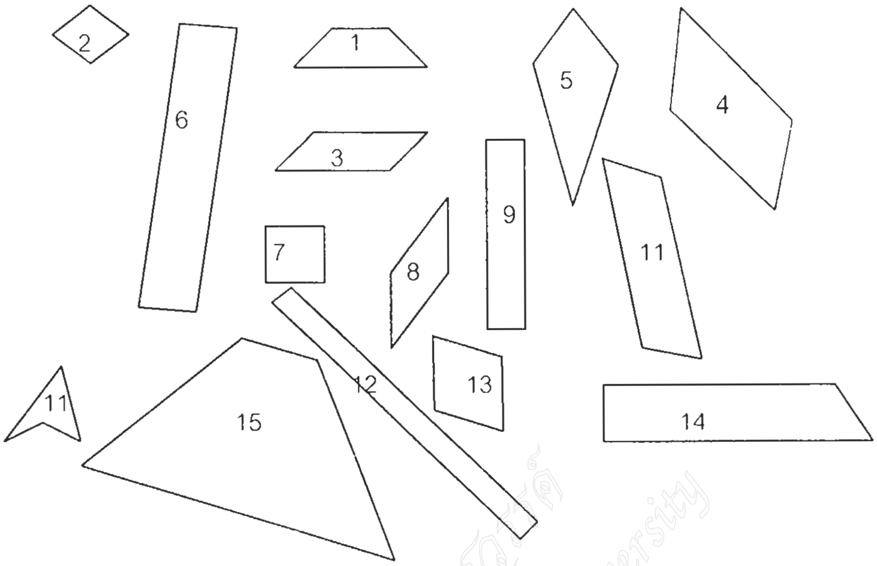
5. การวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี

การประเมินระดับการคิดของนักเรียนจะช่วยให้ครูได้จัดเตรียมกิจกรรมการเรียนการสอนเรขาคณิตให้เหมาะสมกับระดับการคิดของนักเรียน ในการประเมินระดับการคิดที่ใช้กันอยู่พอจะแบ่งออกได้เป็น 2 แบบคือ แบบไม่เป็นทางการ และ แบบเป็นทางการ

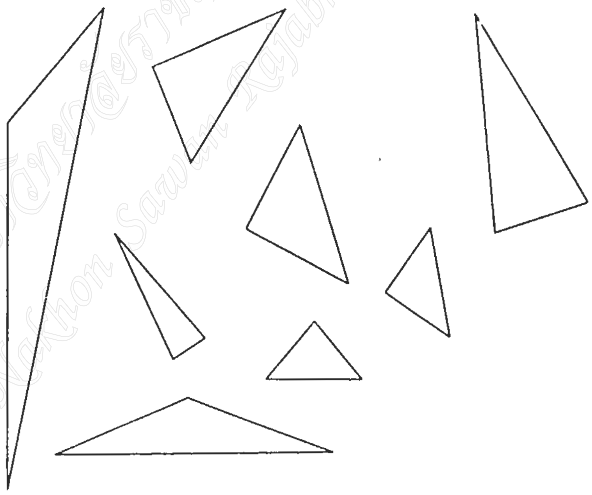
5.1 การประเมินระดับการคิดทางเรขาคณิตจากพฤติกรรม

การประเมินระดับการคิดทางเรขาคณิตจากพฤติกรรมทำได้โดยการวิเคราะห์คำตอบของนักเรียนจากการทำกิจกรรมทางเรขาคณิตในเรื่องที่เกี่ยวข้อง (Teppo.1991: 217) สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกาได้เสนอแนะไว้ในมาตรฐานหลักสูตรและการประเมินผลคณิตศาสตร์ในโรงเรียนไว้ว่าครูสามารถทำการประเมินเชิงวินิจฉัยได้ โดยการสังเกต การถามปากเปล่า การให้นักเรียนอธิบายคำตอบของตนเองเพื่อวัดความเหมาะสมของภาษาที่นักเรียนใช้และระดับพัฒนาการของมโนทัศน์ ตัวอย่างกิจกรรมที่ใช้สำหรับวินิจฉัยเพื่อระบุระดับการคิดของแวน ฮีลี ได้แก่ แบบฝึกหัดในการจัดประเภท (sorting tasks) เป็นกิจกรรมที่สามารถใช้ในการระบุระดับการคิดของนักเรียนในระดับ 0-2 (Burger & Shaughnessy. 1985: 419-427)โดยการแจกชิ้นส่วนของรูปสี่เหลี่ยมดังภาพประกอบที่ 2.10 แล้วให้นักเรียนระบุรูปที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมพร้อมทั้งอธิบายเหตุผล หรือจัดประเภทของ รูปสามเหลี่ยมพร้อมอธิบายเหตุผล ดังภาพประกอบที่ 2.11 การจัดระดับการคิดทำได้โดยการวิเคราะห์จากคำตอบของนักเรียน ตัวอย่างเช่น ถ้านักเรียนไม่สามารถระบุรูปสี่เหลี่ยม(ภาพประกอบที่ 2.10)หรือไม่ สามารถจัดประเภทของรูปสามเหลี่ยม (ภาพประกอบที่ 2.11) แสดงว่าระดับการคิดยังไม่ถึงระดับ 0 และถ้าสามารถทำกิจกรรมนี้ได้แต่อธิบายเหตุผลไม่ได้ แสดงว่าระดับการคิดอยู่ที่ระดับ 0 แต่ถ้าอธิบายเหตุผลได้ด้วยแสดงว่า

ระดับการคิดอยู่ที่ระดับ 1 และถ้าสามารถนำรูปสี่เหลี่ยมหรือรูปสามเหลี่ยมมาจัดประเภทเป็นหมวดหมู่ตามสมบัติที่เหมือนกัน แสดงว่าอยู่ที่ระดับ 2 เป็นต้น



ภาพที่ 2.1 แสดงกิจกรรมระบุรูปสี่เหลี่ยม(Burger & Shaughnessy. 1985; อ้างอิงใน นวลศรี ชำนาญกิจ. 2544: 342-343)



ภาพที่ 2.2 กิจกรรมการจัดประเภทรูปสามเหลี่ยม (Burger & Shaughnessy. 1985: 424; อ้างอิงใน นวลศรี ชำนาญกิจ. 2544: 342-343)

5.2 การประเมินระดับการคิดโดยใช้แบบทดสอบ

เครื่องมือในการประเมินระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี นอกจากวัดจากพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกมาโดยการสังเกต การถามปากเปล่า การให้นักเรียนอธิบายคำตอบของตนเอง เป็นต้น นอกจากนี้ยังมีวิธีที่นิยมใช้อีกวิธีหนึ่งคือการใช้แบบวัดระดับ

การคิดซึ่งเป็นแบบทดสอบที่ผู้วิจัยหรือครูเป็นผู้สร้างขึ้นเองหรือใช้แบบวัดระดับการคิดที่เป็นที่ยอมรับว่าสามารถวัดระดับการคิดได้ตรงกับระดับของนักเรียน แบบวัดระดับการคิดที่มีชื่อเสียงได้แก่ แบบวัดระดับการคิดซึ่งพัฒนาโดย ยูซิสกิน (Usiskin. 1982)

5.3 แบบทดสอบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮีลี พัฒนาโดย ยูซิสกิน

ไชยสังข์(Chaiyasang. 1989) ได้ปรับปรุงแบบวัดระดับการคิดของยูซิสกิน ซึ่งใช้สำหรับวัดระดับการคิดระดับ 1, 2, 3, 4, 5 โดยการปรับเป็นระดับ 0, 1, 2, 3, 4 และนำไปใช้วัดระดับการคิดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นในโรงเรียนทางภาคตะวันออกเฉียงใต้ของประเทศไทย ซึ่งแต่เดิมนั้นยูซิสกินได้สร้างคำถามมาใช้ประกอบการตอบคำถามด้วยปากเปล่า แบบทดสอบชุดนี้เป็นแบบทดสอบปรนัย 5 ตัวเลือก มีจำนวน 25 ข้อ แต่ละระดับถูกสร้างขึ้นมาและทดลองใช้กับโรงเรียนจำนวน 4 โรงเรียน แบบทดสอบนี้ไม่คำนึงถึงความยากง่ายของข้อสอบ แต่ใช้เนื้อหาและภาษาเป็นสาระสำคัญ ต่อมามีการพิมพ์เผยแพร่และได้รับการยอมรับให้เป็นแบบวัดระดับการคิดที่เป็นแบบทดสอบมาตรฐาน เกณฑ์ในการให้คะแนนกำหนดช่วงต่าง ๆ ดังนี้

สำหรับข้อ 1-5 คะแนน 3-5 คะแนน จัดอยู่ในระดับ 1 หรือ 0

สำหรับข้อ 6-10 คะแนน 6-10 คะแนน จัดอยู่ในระดับ 2 หรือ 1

สำหรับข้อ 11-15 คะแนน 9-15 คะแนน จัดอยู่ในระดับ 3 หรือ 2

สำหรับข้อ 16-20 คะแนน 16-20 คะแนน จัดอยู่ในระดับ 4 หรือ 3

สำหรับข้อ 21-25 คะแนน 21-25 คะแนน จัดอยู่ในระดับ 5 หรือ 4

เกณฑ์การให้คะแนนสำหรับแบบทดสอบวัดระดับการคิดที่พัฒนาโดยยูซิสกินจะคิดคะแนนเป็นช่วง ๆ ดังนี้ สำหรับคะแนนข้อ 1 ถึง 5 ถ้าได้คะแนน 0 หรือ 1 หรือ 2 แสดงว่ามีระดับการคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 แต่ถ้าได้คะแนนตั้งแต่ 3 ขึ้นไปแสดงว่ากำลังก้าวไปสู่ระดับ 1 ให้พิจารณา ข้อที่ 6-10 ถ้าได้คะแนนตั้งแต่ 3 คะแนนขึ้นไปแสดงว่านักเรียนจะมีระดับการคิดอยู่ที่ระดับ 1 แต่ถ้าได้คะแนนน้อยกว่า 3 คะแนน แสดงว่ายังคงมีระดับการคิดอยู่ที่ระดับ 0 และทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ

5.4 แบบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิต พัฒนาโดย ยูซิสกิน

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยใช้แบบทดสอบที่พัฒนาโดยยูซิสกิน (Usiskin. 1987: 169-178) ซึ่งเป็นแบบวัดระดับการคิดที่ได้แปลเป็นภาษาไทยแล้ว (แสดงในภาคผนวก ข หน้า 115) เนื่องจากเป็นแบบทดสอบที่ครอบคลุมเนื้อหาวิชาเรขาคณิตทุกเนื้อหา ตามจุดประสงค์ของ รายวิชาเรขาคณิตตามหลักสูตรครุศาสตรบัณฑิต (ค.บ. 5 ปี)มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2549

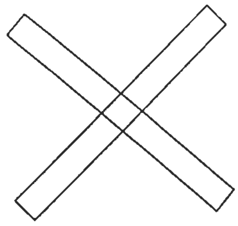
6. การสอนเพื่อยกระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี

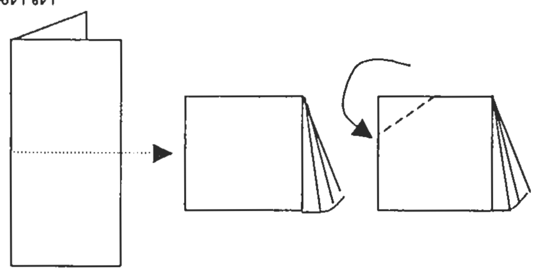
การสอนเรขาคณิตมีวิธีสอนอยู่หลายวิธี สำหรับการสอนเรขาคณิตเพื่อยกระดับการคิดทางเรขาคณิตนั้นสามารถสอนโดยใช้ลำดับขั้นตามตัวแบบ แวน ฮีลี ซึ่งมีความเป็นมาและลำดับขั้นตอน ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ความก้าวหน้าของระดับการคิดขึ้นอยู่กับวิธีสอน วิธีสอนและการจัดระบบการเรียนการสอนทั้งเนื้อหาและสื่อที่ใช้เป็นสิ่งสำคัญสำหรับการสอน ไดนา แวน ฮีลี (Dina van Hiele. 1984b: 5; cited by Crowley. 1987: 5 and Fuy, Geddes & Tischler. 1988: 8) ได้พัฒนาวิธีสอนอย่างเป็นลำดับขั้นเพื่อช่วยให้นักเรียนสามารถพัฒนาระดับการคิดทางเรขาคณิตของตนเองให้มีความก้าวหน้าไปสู่ระดับที่สูงขึ้นที่อยู่ถัดไปทีละระดับ ซึ่งมีอยู่ 5 ขั้น (phases) ได้แก่ การสืบสวนสอบสวน/การแสวงหาความรู้ การทำกิจกรรมที่มีทิศทาง การให้การอธิบาย การทำกิจกรรมที่ไม่กำหนดทิศทางการบูรณาการ ตัวอย่างการสอนเรื่องรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนแสดงในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงลำดับขั้นการสอน/ จุดประสงค์และกิจกรรมการสอนเรื่องรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน สำหรับนักเรียนที่มีระดับการคิดอยู่ในระดับ 2

ลำดับขั้นการสอน/ จุดประสงค์	กิจกรรม
1. การสืบสวนสอบสวน ***วัตถุประสงค์*** ในขั้นตอนนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อทดสอบความรู้พื้นฐานของนักเรียนเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนและให้นักเรียนเห็นแนวทางในการศึกษาเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนในขั้นต่อไป	1. ครูนำรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ให้ นักเรียนดูและให้นักเรียนสังเกต ลักษณะที่เหมือนกันและแตกต่างกันแล้วตอบคำถามเพื่อโยงความสัมพันธ์ระหว่างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนกับ รูปสี่เหลี่ยมชนิดอื่น ***ตัวอย่างคำถาม*** "รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนคืออะไร?" "รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคืออะไร?" "รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานคืออะไร?" "รูปเหล่านี้เหมือนกันอย่างไร?" "แตกต่างกันอย่างไร ?" "นักเรียนคิดว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนได้หรือไม่?" "รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสได้หรือไม่?" "เหตุใดจึงเป็นเช่นนั้น?"

ลำดับขั้นการสอน/ จุดประสงค์	กิจกรรม
2. ***การทำกิจกรรมที่มีทิศทาง*** ***วัตถุประสงค์*** เพื่อให้นักเรียนเรียนรู้คำศัพท์เกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน และสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนในรูปแบบต่าง ๆ	2.ครูให้นักเรียนสร้างรูปสี่เหลี่ยมโดยกำหนดให้มีเส้นทแยงมุมยาวเท่ากันโดยใช้กระดานตะปู หรือครูใช้แถบเราขาคณิตที่แสดงเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมที่แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน มีลักษณะดังรูป  แล้วให้นักเรียนสร้างรูปสี่เหลี่ยมและค้นหาว่ามีรูปสี่เหลี่ยมประเภทใดบ้างที่มีเส้นทแยงมุมตั้งฉากกัน นักเรียนจะพบว่า มีรูปสี่เหลี่ยมอยู่ 3 ชนิดคือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนและรูปว่าว แต่รูปที่มีด้านยาวเท่ากันทุกด้านคือรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 3. ครูให้นักเรียนสร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนให้มีขนาดของรูปเล็กใหญ่ แตกต่างกันเพื่อให้นักเรียนเห็นว่าขนาดของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนไม่ใช่ตัวกำหนดสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน นั่นคือรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนอาจจะมีขนาดแตกต่างกัน 4. ครูแนะนำสมบัติสำคัญของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเช่น เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันและตั้งฉากกันด้านตรงข้ามขนานกัน และด้านทุกด้านยาวเท่ากันมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน เส้นทแยงมุมหนึ่งเส้นแบ่งรูปออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ เป็นต้น

ลำดับขั้นการสอน/ จุดประสงค์	กิจกรรม
3. การให้การอธิบาย *วัตถุประสงค์* เพื่อให้นักเรียนได้มีทักษะในการอธิบายโดยใช้ภาษาของตนเองและสรุปกฎเกณฑ์ต่าง ๆด้วยตัวเอง	ครูส่งเสริมให้นักเรียนได้อธิบายและอภิปรายเกี่ยวกับสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนจากการสังเกต การสำรวจ และการคิด โดยที่ครูจะช่วยกล่อมเกลาทางด้านภาษาให้มีความเหมาะสม นักเรียนเรียนรู้ศัพท์เทคนิคและแสดงแนวคิดเกี่ยวกับสมบัติรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเพิ่มเติมจากการทำกิจกรรม เช่น การพับกระดาษ การใช้แถบเรขาคณิต กระดานตะปู การลากเส้นทแยงมุม การวัดมุม การใช้สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
4. การทำกิจกรรมที่ไม่กำหนดทิศทาง *วัตถุประสงค์* เพื่อให้นักเรียนมีอิสระในการทำกิจกรรมในการค้นหาวิธีแก้ปัญหาของตนเองและนำสิ่งที่รู้แล้วไปค้นหาสิ่งที่ยังไม่รู้	ให้นักเรียนพับกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากดังรูป (a) แล้วให้นักเรียนใช้จินตนาการว่าเมื่อพับเสร็จแล้วถ้าใช้กรรไกรตัดมุมดังรูป(b) จะได้รูปชนิดใด  (a) (b) เมื่อนักเรียนบอกคำตอบแล้วจึงให้นักเรียนลงมือตัดกระดาษจริง ๆ เพื่อตรวจสอบว่าคำตอบที่คิดไว้เป็นจริงหรือไม่ โดยให้นักเรียนตัดเป็นมุมขนาดต่าง ๆ แล้วอภิปรายถึงรูปที่ได้ และ อภิปรายเกี่ยวกับมุมที่เกิดจากเส้นทแยงมุมตัดกัน เพื่อโยงไปสู่สมบัติของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนซึ่งตั้งฉากซึ่งกันและกัน นอกจากนี้ให้ นอกจากนี้ให้ นักเรียนอภิปรายว่าเหตุใดพื้นที่

ลำดับขั้นการสอน/ จุดประสงค์	กิจกรรม
การทำกิจกรรมที่ไม่กำหนดทิศทาง(ต่อ)	ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนจึงเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลคูณของเส้นทแยงมุม
5. การบูรณาการ **วัตถุประสงค์** เพื่อตรวจสอบดูว่านักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนและสามารถนำสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมาใช้ได้หรือไม่ มากน้อยเพียงไร	ให้นักเรียนสรุปเกี่ยวกับสมบัติทั้งหมดของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

เบญจพร สว่างศรี (2545) ได้นำลำดับขั้นการสอนของไดนา แวน ฮีลี ไปใช้สอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในเนื้อหาเรื่อง ความยาว พื้นที่ และปริมาตร โรงเรียนบ้านสระเตย สำนักงานการประถมศึกษา จังหวัดสุพรรณบุรี มีลำดับขั้นตอนการสอน 5 ขั้นตอน ตัวอย่างขั้นตอนการสอน เรื่อง ความยาว ดังแสดงในตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 แสดงตัวอย่าง การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่อง ความยาว สำหรับนักเรียนที่มีระดับการคิดอยู่ในระดับ 0 (การมองเห็น)ของเบญจพร สว่างศรี

ลำดับขั้นการสอน	กิจกรรม
ขั้นที่ 1 การสืบสวนสอบสวน	ครูถามนักเรียนโดยใช้คำถามต่อไปนี้ "นักเรียนคิดว่ามีอุปกรณ์ที่ใช้วัดความสูงของโต๊ะเรียนที่เหมาะสมกว่าไม้บรรทัดไหม" "อุปกรณ์ที่เหมาะสมในการวัดความสูงของโต๊ะคืออะไร" ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปอุปกรณ์ดังกล่าว
ขั้นที่ 2 การทำกิจกรรมที่กำหนดทิศทาง	1.ครูกำหนดสิ่งของมา 1 ชิ้น ให้นักเรียนช่วยกันวัดความยาว และให้นักเรียนทำกิจกรรมการวัดความยาวของสิ่งต่าง ๆ 2.ครูซักถามหน่วยในการใช้วัดความยาว เช่น ความยาวของผ้า ความสูง น็อต ตะปู 3.ครูให้นักเรียนยกตัวอย่างเกี่ยวกับหน่วยที่ใช้ในการวัดเพิ่มเติม

ลำดับขั้นการสอน	กิจกรรม
ขั้นที่ 3 การให้การอธิบาย	1.ครูให้นักเรียนวัดสิ่งของแล้วบันทึกลงตาราง 2.นักเรียนช่วยกันสรุปความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้น
ขั้นที่ 4 การทำกิจกรรมที่ไม่กำหนดทิศทาง	1.ครูกำหนดความยาวของสิ่งต่าง ๆ แล้วเปลี่ยนหน่วยให้สัมพันธ์กันแล้วบันทึกค่าลงในตาราง ตัวอย่างเช่น วัดความสูงของโต๊ะเรียนได้ 1 เมตร 52 เซนติเมตร ให้เขียนเป็นทศนิยม จะได้ 1.52 เมตร เขียนเป็นทศนิยม 1 ตำแหน่งได้ 1.5 เมตร
ขั้นที่ 5 การบูรณาการ	ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปหลักในการประมาณทศนิยมหนึ่งตำแหน่งเป็นจำนวนเต็ม และทศนิยม 2 ตำแหน่งเป็นทศนิยม 1 ตำแหน่ง

กุลยา เหมวัสดุกิจ (2545) ได้นำลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนรายวิชา ค 203 นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสตรีสมุทรสงครามในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 โดยแบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 49 คน ลำดับขั้นที่ใช้มีอยู่ 5 ขั้น ดังแสดงในตารางที่ 2.3

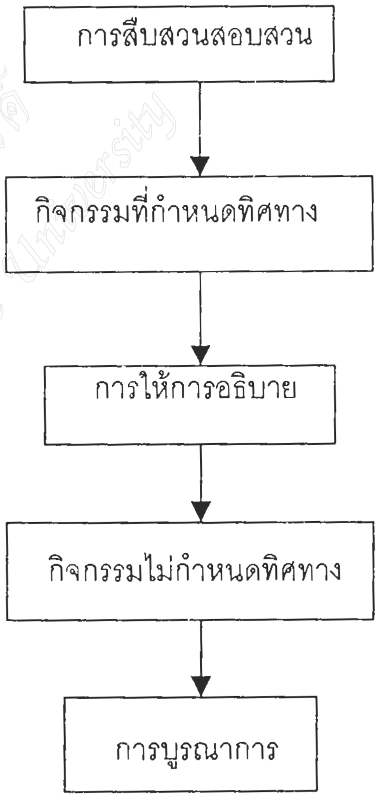
ตารางที่ 2.3 รายละเอียดของขั้นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ตามรูปแบบ แวน ฮีลี ของ กุลยา เหมวัสดุกิจ

ขั้นตอนการสอน	กิจกรรม
ขั้นที่ 1 การใช้คำถามเพื่อนำเข้าสู่บทเรียน	ครูให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการสนทนา โดยครูถามคำถามนักเรียนอาจเพื่อทบทวนบทเรียนที่ผ่านมาหรือแนะนำคำศัพท์ในบทเรียนใหม่ เป็นต้น
ขั้นที่ 2 การเรียนรู้สิ่งใหม่อย่ามีทิศทาง	ครูให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมการเรียนการสอนที่กำหนดตามแผนการสอน โดยการสำรวจหัวข้อที่ศึกษาผ่านสื่อที่ครูจัดให้จนเห็นแนวทางในการแก้ปัญหา โดยกิจกรรมการเรียนการสอนและสื่อที่ครูจัดให้ต้องเหมาะสมกับเนื้อหาที่ใช้สอน
ขั้นที่ 3 การแลกเปลี่ยนความคิดเห็น	ครูส่งเสริมให้นักเรียนอภิปรายจากสิ่งที่นักเรียนได้พบ จากการสังเกต การสำรวจ และการคิด ที่ได้จากขั้นที่ 2 โดยครูใช้กิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมให้นักเรียนได้อภิปราย เช่น การใช้กิจกรรมกลุ่ม การจับคู่ เป็นต้น ให้นักเรียนช่วยกันสรุปกฎเกณฑ์และสิ่งสำคัญ
ขั้นที่ 4 การเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ	ครูให้งานที่ซับซ้อนมากขึ้น โดยงานนั้นอาจมีวิธีทำที่หลากหลายและนักเรียนต้องใช้ความรู้ที่มีอยู่เป็นฐานในการคิด ซึ่งจะทำให้ได้ประสบการณ์ในการค้นพบวิธีแก้ปัญหาด้วยตนเอง
ขั้นที่ 5 การสรุปรวม	ครูให้นักเรียนสรุปบทเรียนที่เรียนในคาบ

ที่มา: กุลยา เหมวัสดุกิจ. 2545: 49

บุญเสริม ยุพจันทร์ (2547) ได้นำลำดับขั้นการสอนของ แวน ฮีลี ไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยมีลำดับขั้น 5 ขั้นดังแสดงในตารางที่ 2.4

ตารางที่ 2.4 แสดงขั้นตอนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของบุญเสริม ยุพจันทร์

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน	สร้าง/กระตุ้นความสนใจเตรียมความพร้อมในการเรียน
ขั้นกิจกรรม	จัดกิจกรรมการเรียนการสอนเป็นไปตามลำดับขั้นดังนี้ 
ขั้นสรุป/ประเมิน	สรุป/ประเมินผลการเรียนรู้ตามวัตถุประสงค์

ที่มา: บุญเสริม ยุพจันทร์. 2547:36

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า ลำดับขั้นของแวน ฮีลีหรือไดนา แวน ฮีลี มีอยู่ 5 ขั้น ดังนี้คือ ขั้นที่ 1 การสืบสวนสอบสวน ขั้นที่ 2 การทำกิจกรรมที่มีทิศทาง ขั้นที่ 3 การให้การอธิบาย ขั้นที่ 4 การทำกิจกรรมที่ไม่กำหนด ทิศทาง ขั้นที่ 5 การบูรณาการ

การจัดการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

1. ความหมายของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

การกล่าวอ้างสิ่งใดว่าเป็นจริงนั้น ในทางคณิตศาสตร์ ต้องมีการแสดงให้เห็นว่าสิ่งที่กล่าวถึงมีค่าความจริงเป็นจริงโดยใช้หลักทางตรรกศาสตร์ มีผู้ให้ความหมายของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

เจมส์(James. 1976 ; อ้างถึงใน บุญเสริม ยุพจันทร์. 2547: 7) กล่าวไว้ว่า การพิสูจน์เป็นการแสดงเหตุผลโดยอาศัยตรรกศาสตร์ ที่จะแสดงให้เห็นค่าความจริงของข้อความและกระบวนการของการแสดงข้อความที่ต้องการพิสูจน์โดยได้มาจากข้อความที่พิสูจน์มาแล้วหรือระบบสัจพจน์

ฮอร์ฟเฟอร์ (Hoffer. 1979: 272 ; cited by Moore. 1990 16 of 25) กล่าวไว้ว่า การพิสูจน์ คือ ลำดับทางตรรกศาสตร์ของประโยคที่แสดงว่าประพจน์นั้นเป็นจริงหรือเป็นเท็จ

วิลสัน (Wilson. 1993: 49) กล่าวไว้ว่า การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ คือ กระบวนการในการใช้บทนิยาม สัจพจน์ ข้อความที่เคยพิสูจน์มาแล้วว่าเป็นจริงและการให้เหตุผลแบบนิรนัยเพื่อแสดงว่าข้อความนั้นเป็นจริง

ซุยแดม (Suydam.1983: 97) กล่าวว่า การพิสูจน์เป็นกระบวนการของการให้เหตุผลจากเซตของข้ออ้าง(premises)โดยใช้การอนุมานไปสู่ข้อสรุป

เกรนและลิตเตอร์ (Grenn & Litter. 1997; อ้างถึงใน บุญเสริม ยุพจันทร์. 2547: 7) กล่าวไว้ว่า การพิสูจน์ข้อความหรือทฤษฎีบท คือ ลำดับของประโยค ที่อาศัยขั้นตอนทางตรรกศาสตร์เป็นลำดับ

จากความหมายของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การนำบทนิยาม อนิยาม สัจพจน์และทฤษฎีบทที่ได้มีการพิสูจน์แล้ว ไปใช้แสดงว่าข้อความใหม่เป็นจริง

2. การพิสูจน์ทางเรขาคณิต

เนื่องจากเรขาคณิตเป็นสาขาหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์การพิสูจน์ทางเรขาคณิตจึงเป็นการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นรูปแบบการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์จึงสามารถนำไปใช้พิสูจน์ทางเรขาคณิตได้เช่นเดียวกัน มีผู้กล่าวถึงการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไว้หลายคนพอสรุปได้ดังต่อไปนี้

ธนูชัย ภูอุดม (2524: 1) กล่าวไว้ว่า การพิสูจน์ทางเรขาคณิตต้องมีการพิสูจน์ทฤษฎีบท และนำตัวทฤษฎีบทไปใช้อ้างในการพิสูจน์ทฤษฎีบทอื่น ๆ หรือโจทย์ปัญหา และการ

พิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีรูปแบบการพิสูจน์อยู่ 2 รูปแบบคือ การพิสูจน์ทางตรง (direct proof) และการพิสูจน์ทางอ้อม(indirect proof) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

2.1 การพิสูจน์ทางตรง

การพิสูจน์ทางตรงเป็นการพิสูจน์ที่เริ่มต้นจาก เหตุ หรือสมมุติฐานหรือข้อความที่ยอมรับมาก่อน นำไปสู่ผลสรุปตามต้องการ

2.2 การพิสูจน์ทางอ้อม

การพิสูจน์ทางอ้อมเริ่มจากผลสรุป โดยตั้งสมมุติฐานว่าถ้าผลสรุปเป็นเท็จจะเกิดอะไรขึ้นบ้าง หากว่านำไปสู่ข้อขัดแย้ง คือพบว่า มีผลทำให้ข้อความใดข้อความหนึ่งเป็นจริงและเป็นเท็จในขณะเดียวกัน จะสรุปว่าสมมุติฐานที่ว่านั้นเป็นไปไม่ได้ นั่นคือผลสรุปต้องเป็นจริง

สุเทพ ทองอยู่ (2534: 1-3 อ้างถึงใน บุญเสริม ยุพจันทร์. 2547: 8-9) กล่าวว่า การพิสูจน์ทางเรขาคณิตเป็นการให้เหตุผลแบบนิรนัยหรืออนุมาน ซึ่งการให้เหตุผลแบบนิรนัยเป็นการให้เหตุผลที่อ้างว่าข้ออ้างยืนยันผลสรุปหรือผลสรุปนั้นเป็นผลสรุปที่แน่นอนจากข้ออ้าง การให้เหตุผลจะสมเหตุสมผลก็ต่อเมื่อถ้าข้ออ้างทุกข้อเป็นจริงแล้วผลสรุปต้องเป็นจริงด้วย ถ้าข้ออ้างทุกข้อเป็นจริงแต่ผลสรุปเป็นเท็จถือว่าเป็นการให้เหตุผลที่ไม่สมเหตุสมผล

รูปแบบการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล ได้แก่

(1) การแจงผลตามเหตุ

1) ถ้า p แล้ว q

2) p

ดังนั้น q

(2) การแจงผลค้าน

1) ถ้า p แล้ว q

2) ไม่ใช่ q

ดังนั้น ไม่ใช่ p

(3) กฎของตรรกบท

1) ถ้า p แล้ว q

2) ถ้า q แล้ว r

ดังนั้น ถ้า p แล้ว r

(4) การอนุมานร่วม

1) p

1) q

ดังนั้น p และ q

(5) กฎการทำให้ง่าย

p และ q

ดังนั้น p

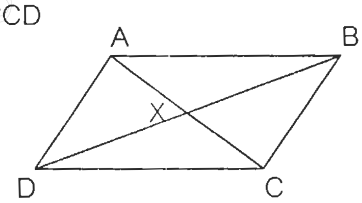
กรมวิชาการ (2514: 5-13 อ้างถึงใน เยาวเรศ สิงหนันท์. 2533: 21-29) กล่าวไว้ว่า การพิสูจน์ทางเรขาคณิตมี 3 วิธี คือ การพิสูจน์ทางตรง พิสูจน์ทางอ้อม และวิธีเอ็กซ์คลูชัน ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

(1) การพิสูจน์ทางตรง

คือการนำข้อความที่เป็นเหตุเป็นผลมาเรียบเรียงเป็นขั้น ๆ ข้อความเหล่านั้นได้มาจากโจทย์ จากทฤษฎี สัจพจน์ นิยามและบทสร้าง ต่าง ๆ จากบทเรียนที่เรียนมาแล้ว วิธีเรียบเรียงข้อความนั้น ๆ อาจเรียบเรียงจากผลไปหาเหตุ ซึ่งได้จากวิธีคิดที่เรียกว่า การวิเคราะห์ หรือเรียบเรียงจากเหตุไปหาผล เรียกว่า การสังเคราะห์

ตัวอย่าง การพิสูจน์แบบวิเคราะห์และแบบสังเคราะห์

โจทย์ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง $\overline{AC}$ ตัดกับ $\overline{BD}$ ที่จุด X ทำให้ BX = DX และ $A\hat{D}B = C\hat{B}D$ จงพิสูจน์ว่า AB = CD



สิ่งกำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง $\overline{AC}$ ตัดกับ $\overline{BD}$ ที่จุด X ทำให้ BX = DX และ $A\hat{D}B = C\hat{B}D$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ AB = CD

พิสูจน์แบบวิเคราะห์

ข้อความ	*เหตุผล*
1. AB = CD ถ้า $\Delta ABX \cong \Delta CDX$	1.เป็นด้านที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ
2. $\Delta ABX \cong \Delta CDX$ ถ้า AX = CX $A\hat{X}B = C\hat{X}D$ และ XB = XD	2.มีด้านที่สมนัยกันสองคู่และมุมระหว่างด้านคู่ที่เท่ากันมีขนาดเท่ากัน
3. แต่ $A\hat{X}B = C\hat{X}D$	3.มุมตรงข้าม
4. XB = XD	4. โจทย์กำหนดให้
5. AX = CX ถ้า $\Delta ABX \cong \Delta CDX$	5. ทำนองเดียวกับข้อ 1
6. $\Delta ABX \cong \Delta CDX$ ถ้า $A\hat{D}X = C\hat{B}X$ DX = BX และ $A\hat{X}D = C\hat{X}B$	6. มีมุมที่สมนัยกันเท่ากันสองคู่ และด้านที่สมนัยกันเท่ากันหนึ่งคู่
7. $A\hat{D}X = C\hat{B}X$, DX = BX	7. โจทย์กำหนดให้
8. $A\hat{X}D = C\hat{X}B$	8. มุมตรงข้าม
9. AB = CD	9. จากข้อ 1-8

พิสูจน์แบบสังเคราะห์

ข้อความ	*เหตุผล*
1. $A\hat{D}X = C\hat{B}X$	1.โจทย์กำหนดให้
2. DX = BX	2.โจทย์กำหนดให้
3. $A\hat{X}D = C\hat{B}X$	3.มุมตรงข้าม
4. $\Delta ADX \cong \Delta CBX$	4.มุมที่สมนัยกันเท่ากันสองคู่และด้านที่สมนัยกันเท่ากันหนึ่งคู่
5. AX = CX	5.ด้านที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ
6. BX = DX	6. โจทย์กำหนดให้
7. $A\hat{X}B = C\hat{X}D$	7. มุมตรงข้าม

ข้อความ	*เหตุผล*
7. $\Delta AXB \cong \Delta CXD$	8. ด้านที่สมนัยกันเท่ากันสองคู่และมุมที่สมนัยกันเท่ากันหนึ่งคู่
4. AB = CD	9. ด้านที่สมนัยกันเท่ากันที่เท่ากันทุกประการ

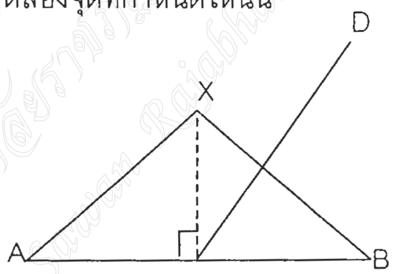
(2) การพิสูจน์ทางอ้อม

การพิสูจน์ทางอ้อมมีอยู่ 2 แบบคือ

1) **แบบที่1 วิธีการทับกันสนิท**(Coincidence Method) คือ มีรูปสองรูปที่มีส่วนประกอบบางส่วนซ้อนกันอยู่ รูปหนึ่งมีเงื่อนไขตามโจทย์ อีกรูปหนึ่งเป็นรูปที่สร้างเพิ่มเติมเพื่อช่วยในการพิสูจน์และมีเงื่อนไขตามโจทย์บางประการ โดยการพิสูจน์ว่ารูปทั้งสองทับกันสนิทเป็นรูปเดียวกัน ดังนั้นรูปนั้นก็จะมีสมบัติครบถ้วนทุกอย่าง

ตัวอย่าง การพิสูจน์แบบวิธีทับกันสนิท

โจทย์ จงพิสูจน์ว่า จุดที่อยู่ห่างจากจุดที่กำหนดให้เป็นระยะทางเท่ากัน จะอยู่บนเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับเส้นตรงที่ลากต่อจุดสองจุดที่กำหนดให้นั้น



สิ่งกำหนดให้ A, B เป็นจุดที่กำหนดให้สองจุด X เป็นจุด ๆ หนึ่งที่ทำให้ XA = XB และ $\overline{CD}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด C

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ X อยู่บนเส้นตรง $\overline{CD}$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลาก $\overline{XC}$

พิสูจน์แบบ การพิสูจน์แบบวิธีทับกันสนิท

ข้อความ	*เหตุผล*
1. AC = BC	1. C เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน $\overline{AB}$
2. XA = XB	2. โจทย์กำหนดให้
3. XC = XC	3. เป็นด้านร่วม

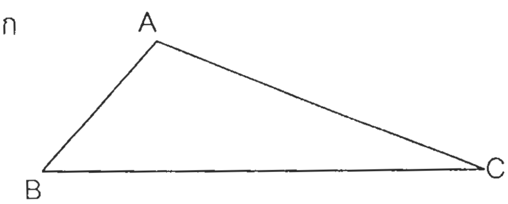
ข้อความ	*เหตุผล*
4. $\Delta ACX \cong \Delta BCX$	4. มีด้านที่สมนัยกันเท่ากันสามคู่
5. $A\hat{C}X \cong B\hat{C}X$	5. มุมที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ
6. $A\hat{C}X + B\hat{C}X = 180^\circ$	6. มุมประชิดที่ $\overline{XC}$ พบกับ $\overline{AB}$ ที่จุด C
7. $2A\hat{C}X = 180^\circ$	7. จากข้อ 5 และ 6 แทน $B\hat{C}X$ ด้วย $A\hat{C}X$
8. $A\hat{C}X = 90^\circ$	8. นำ 2 หารทั้งสองข้าง
9. $\overline{XC}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$	9. นิยามของเส้นตั้งฉาก
10.ดังนั้น $\overline{XC}$ เป็นเส้นตรงเดียวกับ $\overline{DC}$ นั่นคือ X อยู่บนเส้นตรง CD	10.มุมที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ

2) แบบที่ 2 วิธีเอ็กซ์คลูชัน (Exclusion method)

เป็นวิธีสรุปผลจากที่โจทย์ต้องการ จะตั้งข้อแม้ว่า ถ้าไม่เป็นอย่างที่ต้องการพิสูจน์หรือถ้าสิ่งที่ต้องการพิสูจน์นั้นไม่เป็นจริง จะมีกรณีอื่นใดบ้างที่เป็นไปได้ ก็ให้รวบรวมไว้ทุกกรณีแล้วหาเหตุผลมาพิสูจน์ว่ากรณีที่คิดว่าจะเป็นไปได้นั้นกลับเป็นไปไม่ได้ เพราะเหตุผลมาพิสูจน์นั้นเป็นจริงกรณีเดียว เช่นต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{XY}$ ขนานกับ $\overline{PQ}$ โดยตั้งข้อแม้ว่า ถ้า $\overline{XY}$ ไม่ขนานกับ $\overline{PQ}$ กรณีที่จะเป็นไปได้คือ $\overline{XY}$ ตัดกับ $\overline{PQ}$ แล้วพิสูจน์ว่าเป็นไปไม่ได้ เพราะเหตุผลแย้งกับโจทย์ จึงสรุปว่า $\overline{XY}$ ขนานกับ $\overline{PQ}$

ตัวอย่าง การพิสูจน์วิธีเอ็กซ์คลูซีฟ

โจทย์ ถ้ามุมสองมุมของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดไม่เท่ากัน ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมใหญ่จะยาวกว่าด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมเล็ก



สิ่งกำหนดให้ ΔABC มี $\hat{B} > \hat{C}$

วิธีคิด สิ่งต้องพิสูจน์ $AC > AB$

ถ้า AC ไม่มากกว่า AB กรณีที่เป็นไปได้คือ $AC = AB$ หรือ $AC < AB$

ถ้า กรณีที่ 1 $AC = AB$ เป็นจริงแล้ว $\hat{B} = \hat{C}$ แต่โจทย์ให้ $\hat{B} > \hat{C}$ ซึ่งขัดแย้งกับโจทย์ ดังนั้น $AC = AB$ เป็นไปไม่ได้

ถ้า กรณีที่ 1 $AC < AB$ เป็นจริงแล้ว $\hat{C} > \hat{B}$ แต่โจทย์ให้ $\hat{B} > \hat{C}$ ซึ่งขัดแย้งกับโจทย์ ดังนั้น $AC < AB$ เป็นไปไม่ได้

นั่นคือ $AC > AB$

พิสูจน์ วิธีเอ็กซ์คลูชัน

ข้อความ	*เหตุผล*
1. ถ้า AC ไม่มากกว่า AB กรณีที่เป็นไปได้คือ $AC = AB$ หรือ $AC < AB$	1. ขนาดของเส้นตรงสองเส้นที่นำมาเปรียบเทียบ
2. ถ้า $AC = AB$ $\therefore$ $\hat{B} = \hat{C}$	2. มุมตรงข้ามด้านที่ยาวเท่ากัน
3. ข้อ 2 เป็นไปไม่ได้	3. แย้งกับโจทย์ โจทย์ให้ $\hat{B} > \hat{C}$
4. ถ้า $AC < AB$ $\therefore$ $\hat{C} > \hat{B}$	4. มุมใหญ่อยู่ตรงข้ามกับด้านยาว
5. ข้อ 4 เป็นไปไม่ได้	5. แย้งกับโจทย์ โจทย์ให้ $\hat{B} > \hat{C}$
6. ดังนั้น AC ไม่มากกว่า AB เป็นไปไม่ได้ นั่นคือ $AC > AB$	6. จากข้อ 2 ถึงข้อ 5 แย้งกับโจทย์เมื่อยาวเท่ากันไม่ได้ และสั้นกว่าไม่ได้ จึงต้องยาวเท่ากัน

3) **วิธียกรูปซ้อนกัน** (Superposition) ใช้มากในการพิสูจน์เกี่ยวกับความ เท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

ตัวอย่าง การพิสูจน์โดยการยกรูปซ้อนกัน

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมเท่ากันสองคู่ แงด้านซึ่งมีแขนร่วมระหว่างมุมคู่ที่เท่ากันยาวเท่ากัน รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

สิ่งกำหนดให้ ABC และ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปซึ่งมี $BC = EF$ $\hat{B} = \hat{C}$ และ $\hat{C} = \hat{F}$

สิ่งต้องพิสูจน์ พิสูจน์ว่า $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

พิสูจน์ โดยการยกรูปซ้อนกัน

ข้อความ	*เหตุผล*
1. ยก ΔABC ซ้อนบน ΔDEF ให้จุด B ทับจุด E และด้าน BC ทาบไปตามด้าน EF จุด C ก็จะทับจุด F และ ให้จุดA อยู่ข้างเดียวกันกับจุด D	1. BC = EF โจทย์กำหนดให้
2. $\hat{B} = \hat{E}$	2. โจทย์กำหนดให้
3. ∴ BA ก็ทาบไปบนด้าน ED	3. มุมเท่ากันวางให้ซ้อนกันสนิทได้
4. $\hat{C} = \hat{F}$	4. โจทย์กำหนดให้
5. ∴ CA ก็ทาบไปบนด้าน FD	5. ทำนองเดียวกันกับข้อ 4
6. ∴ จุด A จะทับจุด D	6. เส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุด ๆ เดียว
7. ∴ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	7. ทุกส่วนประกอบของรูปสามเหลี่ยมซ้อนกันสนิท

จากที่ได้กล่าวมาสรุปได้ว่า การพิสูจน์ทางเรขาคณิต มีอยู่ 2 วิธี คือ (1) การพิสูจน์ทางตรง โดย ใช้การพิสูจน์โดยวิธีวิเคราะห์และสังเคราะห์ (2) การพิสูจน์ทางอ้อม โดยใช้วิธีทับกันสนิท วิธีเอ็กซ์คลูชัน และ วิธียกรูปซ้อนกัน

นอกจากวิธีการพิสูจน์ดังกล่าวแล้ว ยังมีข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการพิสูจน์ทางเรขาคณิตดังต่อไปนี้

พรรณทิพย์ ม้ามณี (2520 ; อ้างถึงใน วัฒนา มณีวงศ์. 2542 ค: 19) ได้ให้ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตไว้ดังนี้

(1) อ่านโจทย์ให้ละเอียดแล้วแยกแยะว่าโจทย์กำหนดอะไรมาให้ และต้องการพิสูจน์อะไร

(2) เขียนในแบบทั่ว ๆ ไปโดยปราศจากความลำเอียง

(3) รูปที่เขียนพยายามให้ชัดเจนเพื่อง่ายแก่การพิสูจน์

(4) พยายามเลี่ยงการใช้คำคลุมเครือ

(5) เลือกหาวิธีการที่เหมาะกับสิ่งที่ต้องการหา

(6) ใช้นิยาม อนิยาม สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ สัจพจน์ และทฤษฎีบทที่พิสูจน์มาแล้วเท่านั้นในการพิสูจน์

(7) อย่าให้สิ่งที่ต้องพิสูจน์เป็นเหตุผลในการพิสูจน์

(8) แถลงเหตุผลที่จะใช้ให้ง่าย สั้น และชัดเจน

กุสตาร์ฟสัน และ ฟริสค์ (Gustafson and Frisk.1991:64-65) ยังให้ข้อเสนอแนะอื่น ๆ ประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิตดังนี้

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการเท่ากันทุกประการ ไม่จำเป็นต้องจำหมายเลขของทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง เพียงแต่ทำความเข้าใจในสิ่งที่ทฤษฎีบทกล่าวไว้เท่านั้น แล้วพยายามเขียนด้วยภาษาของตนเอง อย่าใช้วิธีท่องจำ เพราะไม่มีข้อความใดใช้สำหรับพิสูจน์ทฤษฎีบทได้ทุกทฤษฎีบท แต่สามารถนำลำดับขั้นดังต่อไปนี้ไปใช้เป็นแนวทางได้

(1) อ่านตัวทฤษฎีบทอย่างรอบคอบ ทำความเข้าใจคำแต่ละคำที่ปรากฏในตัวทฤษฎีบท

(2) เขียนสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์

(3) สร้างรูปแสดงสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ให้ครบ

(4) เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์ แล้วค้นหา บทนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทที่กล่าวถึงก่อนหน้านี้ ซึ่งจะช่วยให้สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้

(5) บางครั้งอาจจำเป็นต้องมีการลากเส้นเพิ่มเติมเพื่อช่วยในการพิสูจน์ แต่ต้องแน่ใจว่าสามารถทำเช่นนั้นได้

(6) เขียนการพิสูจน์โดยระบุเหตุผลประกอบในแต่ละข้อตามรูปแบบการพิสูจน์

3. **การสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต**

มีผู้กล่าวถึงการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไว้ไม่มากนัก ส่วนมากจะกล่าวถึงการสอนมโนทัศน์ทางเรขาคณิต จะขอนำมากล่าวในที่นี้ดังนี้

ยุพิน พิพิธกุล (2539: 64-65) ได้กล่าวถึงวิธีสอนพิสูจน์ทางเรขาคณิตไว้ 3 แบบ คือ

(1) **การสอนทฤษฎีบท**

ในการสอนทฤษฎีบทมีขั้นตอนดังนี้คือ

1) หาวิธีการให้ผู้เรียนได้ค้นพบเนื้อหาทฤษฎีบทด้วยตนเอง ซึ่งอาจจะใช้การสาธิตของครู การทดลอง การสร้าง การใช้เหตุผลและการใช้สื่อการสอนสำเร็จรูป

2) ให้ผู้เรียนแยกเหตุและผล

3) ให้ผู้เรียนบอกสิ่งกำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

4) เลือกวิธีการพิสูจน์ โดยมากใช้จากผลไปสู่เหตุแล้วเรียบเรียงจากเหตุไปสู่ผล บางข้อใช้การสังเคราะห์ บางข้ออาจจะใช้การวิเคราะห์และการสังเคราะห์ร่วมด้วยทั้งนี้ขึ้นอยู่กับโจทย์

(2) การพิสูจน์แบบฝึกหัด

ในการพิสูจน์แบบฝึกหัดมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1) ผู้สอนใช้คำถามและแสดงการสร้างตามลำดับ ผู้เรียนสร้างตามผู้สอนจะเขียนกระดานดำ แสดงวิธีสร้างทีละขั้นไปพร้อม ๆ กัน อย่าสอนจนจนจบแล้วถามผู้เรียนอีกว่าสร้างอย่างไรเป็นการเสียเวลา

2) การพิสูจน์จะใช้วิธีสังเคราะห์หรือวิเคราะห์ขึ้นอยู่กับดุลยพินิจของผู้สอน

สรุปได้ว่า การสอนการพิสูจน์ครูผู้สอนสร้างรูปและเขียนแสดงการพิสูจน์อย่างเป็นลำดับขั้นตอนให้นักเรียนได้เห็นและแสดงวิธีการพิสูจน์ไปพร้อม ๆ กับนักเรียน ถ้าเป็นการสอนการพิสูจน์ทฤษฎีบทต้องให้นักเรียนเขียนสิ่งกำหนดให้ สิ่งต้องพิสูจน์และสร้างเพื่อการพิสูจน์ (ถ้าจำเป็น)และแยกเหตุและผล

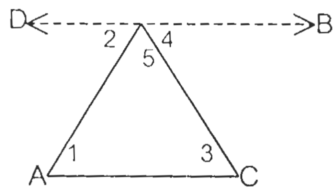
4. การวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

การวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตสามารถวัดได้โดยให้ผู้เรียนเขียนแสดงพิสูจน์ หรือให้ผู้เรียนเลือกคำตอบจากแบบทดสอบหรือเติมคำตอบลงในช่องว่างที่กำหนดให้แล้วแต่ดุลยพินิจของผู้สอน ในที่นี้จะแสดงตัวอย่างการวัดความสามารถในการพิสูจน์ของผู้วิจัยที่ไดทำวิจัยไว้ดังนี้

เยาวเรศ สิงหนันท์ (2533) ได้สร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เป็นแบบทดสอบแบบความเรียง (Essay test) จำนวน 4 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน เกี่ยวกับเนื้อหา 4 หัวข้อ เรื่อง ทฤษฎีบทเบื้องต้นทางเรขาคณิต ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และวงกลม ลักษณะของข้อสอบประกอบด้วยโจทย์ รูปประกอบการพิสูจน์ โดยให้นักเรียนเติมข้อความลงในช่องว่างที่ขาดหายไปดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง *แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิต พัฒนาโดย เยาวเรศ สิงหนันท์ (2533:94)*

1. ผลบวกของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ เท่ากับ 180 องศา



สิ่งกำหนดให้ ....

....

สิ่งต้องพิสูจน์ ....

....

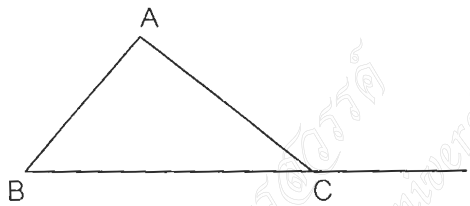
พิสูจน์ ลาก DE ผ่านจุด B และขนานกับ AC

ข้อความ	เหตุผล
1. AC // DE	1. ....
2.	2. มุมที่เกิดจากเส้นตัดเส้นขนานมีขนาดเท่ากัน
3. $\hat{1}+\hat{3}=\hat{2}+\hat{4}$	3. ....
4. $\hat{1}+\hat{3}+\hat{5}=\hat{2}+\hat{4}+\hat{5}$	4. ....
5. $\hat{2}+\hat{4}+\hat{5}=D\hat{B}E$	5. ....
6. $\hat{1}+\hat{3}+\hat{5}=D\hat{B}E$	6. ....
7.	7. $D\hat{B}E$ เป็นมุมตรง
8. $\hat{1}+\hat{3}+\hat{5}=180^{\circ}$	8. ....

บุญเสริม ยุพจันทร์ (2547) ได้สร้างข้อสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์เรขาคณิต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ลักษณะข้อสอบเป็นแบบความเรียง จำนวน 5 ข้อ ในเนื้อหาเรื่อง สัจพจน์ในวิชาเรขาคณิต ทฤษฎีบทเบื้องต้นทางเรขาคณิต ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

***ตัวอย่างแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์เรขาคณิต พัฒนาโดย บุญเสริม ยุพจันทร์** (2547: 80)*

1. ขนาดของมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด



สิ่งกำหนดให้ ....

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ ....

แนวคิดเขียนแผนผังแสดงเหตุผลดังนี้

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล

กุสตาร์ฟและฟริสค์ (Gustafson & Frisk. 1991) ได้นำเสนอการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในแบบฝึกหัดที่ให้ผู้เรียนทำ ซึ่งประกอบไปด้วย การเติมคำตอบที่ขาดหายไป และ การแสดงการพิสูจน์ด้วยตนเอง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

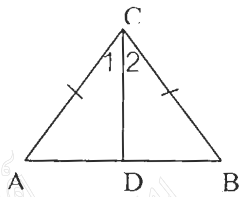
ตัวอย่างแบบฝึกหัดการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สร้างโดย กุสตาร์ฟและฟริสค์ (Gustafson & Frisk. 1991)

1.

กำหนดให้

$\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\angle 1 \cong \angle 2$

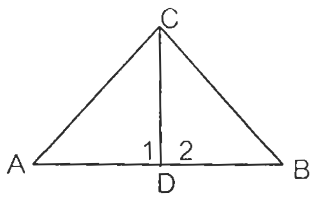
จงพิสูจน์ว่า $\Delta ACD \cong \Delta BCD$



พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\overline{AC} \cong \overline{BC}$	1. ....
2.	2. สิ่งกำหนดให้
3.	3. เส้นตรงทุกเส้นเท่ากันทุกประการกับตัวมันเอง (กฎการสะท้อน)
4. $\Delta ACD \cong \Delta BCD$	4. ....

2. จากรูป กำหนดให้ $\overline{AD} \cong \overline{BD}$, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $\Delta ADC \cong \Delta BDC$



สรุปได้ว่า ในระดับมัธยมศึกษาจะนิยมใช้ แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตแบบความเรียงโดยเติมคำตอบที่ขาดหายไป ระดับอุดมศึกษาจะใช้ แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์โดยการคำตอบที่ขาดหายไปควบคู่ไปกับการเขียนการพิสูจน์ด้วยตนเองจนสมบูรณ์ ในที่นี้ผู้วิจัยใช้แบบทดสอบที่เป็นการเติมคำตอบและเขียนแสดงการพิสูจน์ด้วยตนเอง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับระดับการคิดตามตัวแบบ แวน ฮีลี

1.1 งานวิจัยในประเทศ

สำหรับในประเทศไทยนั้นมีการทำงานวิจัยเกี่ยวกับระดับการคิดทางเรขาคณิต ไม่มากนัก ส่วนมากแล้วเป็นงานวิจัยที่วัดระดับการคิดทางเรขาคณิต และเป็นการวิจัยในระดับบัณฑิตศึกษา ส่วนการนำระดับการคิดไปประยุกต์ใช้ในการจัดการเรียนการสอนมีค่อนข้างน้อย งานวิจัยที่รวบรวมได้ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2533 มีดังนี้

เยาวเรศ สิงหนันท์ (2533) ได้ทำวิจัยเรื่อง "ศึกษาเปรียบเทียบความสามารถใน การพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตระหว่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนรัฐบาลและโรงเรียนเอกชน เขตการศึกษา 6" โดยมีกลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จากโรงเรียนรัฐบาลจำนวน 273 คน และโรงเรียนเอกชน จำนวน 251 คน ในการทำวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้วัดความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตของนักเรียนโดยมีเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์เรขาคณิตที่ผู้วิจัยเป็นผู้สร้างขึ้นตามแนวคิดของ แวน ฮีลี ซึ่งเป็นแบบทดสอบแบบความเรียง(Essay test) จำนวน 8 ข้อ มีค่าความเที่ยง 0.83 ผลการวิจัยพบว่า 1) จำนวนนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์การผ่านแบบทดสอบทั้งฉบับของนักเรียนโรงเรียนรัฐบาลมากกว่าจำนวนนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์การผ่านแบบทดสอบทั้งฉบับของนักเรียนโรงเรียนเอกชน 2) จำนวนนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์บกพร่องแต่ละเกณฑ์ คือ (1) เขียนสิ่งกำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ถูกต้อง (2) เขียนพิสูจน์และให้เหตุผลถูกต้องได้ครึ่งหนึ่งของการพิสูจน์ในข้อนั้นหรือเขียนข้อความพิสูจน์ถูกหมดแต่ให้เหตุผลผิดในแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์ (3) เขียนการพิสูจน์ถูกต้องเกือบหมดแต่ให้เหตุผลผิดในแต่ละขั้นของการพิสูจน์ (3) เขียนการพิสูจน์ถูกต้องเกือบทั้งหมดแต่มีข้อบกพร่องในการใช้สัญลักษณ์ ศัพท์ หรือข้อความของทฤษฎีที่ใช้อ้าง (4) เขียนการพิสูจน์ถูกต้องทั้งหมดยกเว้นข้อบกพร่องในการใช้สัญลักษณ์เพียง 1 แห่ง หรือเขียนพิสูจน์ถูกต้องทั้งหมดไม่มีข้อผิดพลาดเลย ปรากฏว่า จำนวนนักเรียนโรงเรียนรัฐบาลผ่านเกณฑ์แต่ละเกณฑ์ ในข้อ (1)-(4) คิดเป็นร้อยละ 40.02 19.18 15.48 และ 12.18 เรียงตามลำดับ ส่วนจำนวนนักเรียนโรงเรียนเอกชนผ่านเกณฑ์แต่ละเกณฑ์ในข้อ (1)-(4) คิดเป็นร้อยละ 19.72 14.08 9.06 และ 2.69 เรียงตามลำดับ และพบว่า 2) นักเรียนในโรงเรียนรัฐบาลมีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตสูงกว่านักเรียนโรงเรียนเอกชนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ .01

พนิดา กองเกตุใหญ่ (2542) ได้ทำวิจัยเรื่อง "ระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น ในจังหวัดกาญจนบุรี" โดยมีกลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น สังกัดกรมสามัญศึกษา จังหวัดกาญจนบุรี จำนวน 590 คน จำแนกเป็น

ชาย จำนวน 260 คน หญิง จำนวน 330 คน โดยการสุ่มแบบเจาะจง ได้กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 4 โรงเรียน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแบบแวนฮีลี และแบบสอบถามข้อมูลพื้นฐาน ที่ผู้วิจัยเป็นผู้สร้างขึ้น ผลการวิจัยพบว่า (1) ระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแบบแวน ฮีลี ของนักเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1, 2 และ 3 มีการกระจายอยู่ในระดับต่าง ๆ ดังนี้คือ อยู่ในระดับ 1 ระดับการวิเคราะห์ ระดับ 2 ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน และระดับ 3 ระดับอนุมานที่เป็นแบบแผน โดยที่นักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีแนวโน้มที่จะมีระดับการคิดอยู่ในระดับ 3 ระดับอนุมานที่เป็นแบบแผน สูงกว่านักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 (2) นักเรียนร้อยละ 40.7 ของนักเรียนทั้งหมดมีระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแบบแวน ฮีลี อยู่ใน ระดับ 3 ระดับอนุมานที่เป็นแบบแผน การ และระดับ 4 การคิดขั้นสุดยอด

กุลยา เหมวัสดุกิจ (2545) ได้ทำวิจัยเรื่อง "ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวน ฮีลี่ ที่มีต่อระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2" โดยมีกลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสตรีสมุทรปราการ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 98 คน ในการทำวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ทดลองสอนนักเรียนโดย การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลี แล้ววัดระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนโดยใช้เครื่องมือคือแบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้น มีความเที่ยง เท่ากับ 0.7642 เมื่อสิ้นสุดการสอนวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนที่ได้รับการสอน ตามตัวแบบ แวน ฮีลี ใช้ระดับการคิด 5 ระดับคือ ระดับ 0 ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก (visualization) ระดับ 1 ระดับการวิเคราะห์ (analysis) ระดับ 2 ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน (informal deduction) ระดับ 3 ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน (formal deduction) และระดับการคิด 4 ระดับ สุดยอด (rigor) พบว่า

(1) นักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตคงที่มีจำนวนมากที่สุด รองลงมาคือมีระดับการคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 1 ระดับ และเพิ่มขึ้น 2 ระดับตามลำดับ เมื่อจำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนพบว่านักเรียนกลุ่มสูงที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตที่คงที่มีจำนวนมากที่สุด รองลงมาคือระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 2 ระดับ และเพิ่มขึ้น 1 ระดับ ตามลำดับ และนักเรียนกลุ่มปานกลางและต่ำที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตคงที่มีจำนวนมากที่สุด รองลงมาคือมีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 1 ระดับ และเพิ่มขึ้น 2 ระดับ

(2) นักเรียนที่มีระดับความคิดอยู่ในระดับ 1 3 และ 4 มีจำนวนเพิ่มขึ้น โดยที่นักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 4 มีจำนวนเพิ่มขึ้นมากที่สุด ส่วนนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 และ 2 มีจำนวนลดลง โดยนักเรียนที่มีความคิดทาง

เรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 มีจำนวนลดลงมากที่สุดและนักเรียนกลุ่มสูงที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 4 มีจำนวนเพิ่มขึ้นมากที่สุดและอยู่ในระดับ 0 มีจำนวนลดลงมากที่สุด ส่วนนักเรียนกลุ่มปานกลางที่มีระดับความคิดอยู่ในระดับ 4 มีจำนวนเพิ่มขึ้นมากที่สุดและอยู่ในระดับ 0 มีจำนวนลดลงมากที่สุด นอกจากนี้ยังพบว่า นักเรียนกลุ่มต่ำที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 มีจำนวนเพิ่มขึ้นมากที่สุดและอยู่ในระดับ 0 มีจำนวนลดลงมากที่สุด

เบญจพร สว่างศรี (2545) ได้ทำวิจัยเรื่อง "การศึกษาผลการสอนเรขาคณิตด้วยลำดับขั้นการสอนของ ไดอานา แวน ฮีลี ที่มีต่อระดับการคิดทางเรขาคณิตและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1" โดยดำเนินการวิจัย ขั้นที่ 1 สำรวจระดับการคิดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปี 1 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานการประถมศึกษาจังหวัดสุพรรณบุรี ในโรงเรียน 2 โรงเรียน จำนวน 90 คนโดยใช้แบบสำรวจระดับการคิดตามตัวแบบของแวน ฮีลี ซึ่งพัฒนาโดยยูสกิน แล้วนำมาจัดระดับการคิดตามตัวแบบของแวนฮีลี พบว่านักเรียนร้อยละ 75.28 มีระดับการคิดอยู่ในระดับ 0 ระดับการมองเห็น และร้อยละ 24.72 อยู่ในระดับ 1 คือ ระดับการวิเคราะห์ ส่วนโรงเรียนบ้านสระเตยนักเรียนมีระดับการคิดทางเรขาคณิตค่อนข้างต่ำกว่าสองแห่งที่ไปสำรวจจึงเลือกเป็นกลุ่มตัวอย่าง ขั้นตอนที่ 2 ทดลองสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างในเนื้อหา คณิตศาสตร์ชั้น ม. 1 บทที่ 7 เรื่อง ความยาว พื้นที่ และปริมาตร โดยใช้ลำดับขั้นการสอนของไดอานา แวน ฮีลี เมื่อสิ้นสุดการทดลองทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตโดยใช้แบบทดสอบที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้น และวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตโดยใช้แบบวัดระดับการคิดฉบับเดิม ผลการวิจัยพบว่า (1) นักเรียนที่เรียนโดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนที่จัดขึ้นตามลำดับขั้นการสอนของไดอานา แวนฮีลี หลังเรียนมีระดับการคิดทางเรขาคณิตและมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตสูงกว่าก่อนเรียน และ (2) นักเรียนที่เรียนโดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนที่จัดขึ้นตามลำดับขั้นการสอนของ ไดอานา แวนฮีลี มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนผ่านเกณฑ์ร้อยละ 65 ของคะแนนเต็ม

นาตยา น้ำจิตตรง (2546) ได้ทำวิจัยเรื่อง "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนระหว่างการสอนที่เน้นลำดับขั้นการเรียนรู้เรขาคณิตของแวนฮีลีโมเดลกับการสอนแบบปกติ" กลุ่มตัวอย่างเป็น นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสอาดเผดิมวิทยา จังหวัดชุมพร ปีการศึกษา 2545 จำนวน 2 ห้องเรียน ห้องเรียนละ 50 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมอย่างละ 1 ห้องเรียน โดยให้กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้การสอนที่เน้นลำดับขั้นการเรียนรู้เรขาคณิตของตัวแบบ แวน ฮีลี และกลุ่มควบคุมเรียนโดยการสอนแบบปกติ เมื่อสิ้นสุดการสอนทดสอบนักเรียนโดยการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตโดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตเรื่อง ความเท่ากันทุกประการ ซึ่งเป็นแบบทดสอบ

ปรนัยผสมแบบอัตนัย แบบทดสอบปรนัยเป็นชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ และแบบทดสอบอัตนัย เป็นการแสดงการพิสูจน์ จำนวน 2 ข้อ ผลการวิจัยพบว่า (1) นักเรียนที่ได้รับการสอนที่เน้นลำดับขั้นการเรียนรู้ของแวนฮีลีโมเดลมีระดับการคิดสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ.05 (2)นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีความเข้าใจทางเรขาคณิตไม่สูงกว่าขั้นที่ 1 ของแวน ฮีลีโมเดล อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ .05 (3) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนที่เน้นลำดับขั้นการเรียนรู้ของแวน ฮีลีโมเดล สูงกว่าเกณฑ์ ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ .05

พรรณี เหมะสถล (2547) ได้ทำวิจัยเรื่อง "การสำรวจระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบของ แวน ฮีลี ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ โดยมีกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จากโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ จำนวน 273 คน ในการทำวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้วัดระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบของ แวน ฮีลี ที่พัฒนาโดยยูซิสกิน (Usiskin) จำนวน 5 ชุด รวม 25 ข้อ ไปทดสอบนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนสาธิตฯ จำนวน 73 คน โดยให้นักเรียนทำแบบทดสอบทีละชุด แล้วตรวจให้คะแนน เพื่อจัดระดับ ผลการวิจัยพบว่า เมื่อแยกตามระดับการคิดจะได้ผลดังนี้ คือมีจำนวนนักเรียนร้อยละ 65.75 ของนักเรียนทั้งหมด ระดับการคิดอยู่ใน ระดับ 0 มีจำนวนนักเรียนร้อยละ 28.77 ของนักเรียนทั้งหมด ระดับการคิดอยู่ในระดับ 1 มีจำนวนนักเรียนร้อยละ 5.78 ของนักเรียนทั้งหมด มีระดับการคิดอยู่ในระดับ 2 การพิสูจน์อย่างไม่เป็นทางการ และไม่มีนักเรียนคนใดเลยที่มีระดับการคิดอยู่ในระดับ 3 การพิสูจน์อย่างเป็นทางการ และระดับ 4 การคิดขั้นสุดยอด

จากงานวิจัยในประเทศสรุปได้ว่า ระดับขั้นการคิดของแวนฮีลีของนักเรียนในประเทศไทยโดยภาพรวมยังต่ำกว่าระดับ 3 การพิสูจน์อย่างเป็นทางการและการสอนเรขาคณิตโดยใช้ลำดับขั้นการสอนของไดอานา แวนฮีลี สามารถเพิ่มระดับการคิดของนักเรียนได้ และนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวนฮีลี มีระดับการคิดทางเรขาคณิตและผลสัมฤทธิ์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ

1.2 งานวิจัยต่างประเทศ

งานวิจัยเกี่ยวกับระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบของแวน ฮีลี และลำดับขั้นการสอนเพื่อยกระดับการคิดของ ไดอานา แวนฮีลี ซึ่งรวบรวมได้มีดังนี้

เซ็งค์ (Senk. 1983) ได้ทำวิจัยเรื่อง "Proof-writing Achievement and van Hiele Levels among Secondary School Geometry Students" กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียน

ระดับมัธยมศึกษาที่เรียนวิชาเรขาคณิตจำนวน 1520 คน จาก 74 ห้องเรียนใน 5 รัฐของอเมริกา โดยดำเนินการวิจัยดังนี้ ในฤดูใบไม้ร่วงทดสอบระดับการคิดของนักเรียนตามตัวแบบของแวน ฮีลี และทดสอบความรู้ทางเรขาคณิต เมื่อเข้าสู่ฤดูใบไม้ผลิทดสอบนักเรียนอีกครั้งด้วยแบบทดสอบวัดระดับการคิดและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการพิสูจน์ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์อัลฟาของคอนบราค 0.85-0.88 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการพิสูจน์เป็นแบบทดสอบแบบประเมินค่า 5 ระดับคือ 0-4 และผ่านการตรวจสอบความตรงโดยผู้เชี่ยวชาญจำนวน 8 คน และครูจำนวน 2 คนทำหน้าที่ประเมินแต่ละถ้อยกระทงได้ค่าความเที่ยงมากกว่า .90

ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนจำนวน 30 % ไม่มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเมื่อตอนปลายปี นักเรียนจำนวน 40 % มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเมื่อตอนปลายปี ที่เหลือจำนวน 30 %มีความสามารถใน การพิสูจน์ ผ่าน ร้อยละ 75 และไม่มีความแตกต่างกันระหว่างเพศในผลสัมฤทธิ์ในการพิสูจน์ สิ่งที่เซ็งค์เสนอแนะไว้คือควรมีการศึกษาว่าระดับการคิดของแวน ฮีลีและผลสัมฤทธิ์ในการพิสูจน์มีความสัมพันธ์กันหรือไม่

ฮัน (Han. 1986) ได้ทำวิจัยเรื่อง "The Effects on Achievement and Attitude of a Standard Geometry Textbook and a Textbook Consistent with the Van Hiele Theory" มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาผลของการใช้ตำราเรียนเรขาคณิต 2 แบบ คือ ตำราที่ เรียบเรียบโดยยึดระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี และตำราที่เป็นมาตรฐาน ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติของนักเรียน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจาก 2 โรงเรียนจำนวน 478 คน โดยใช้แบบทดสอบ 3 ฉบับเพื่อทดสอบนักเรียน คือ ฉบับเดือนกันยายน เดือนมกราคมและเดือนพฤษภาคม และแบบทดสอบการพิสูจน์ทดสอบในเดือนพฤษภาคม และทดสอบเจตคติที่มีต่อวิชาเรขาคณิตของนักเรียนในระหว่างเดือนมกราคมถึงเดือนพฤษภาคมโดยใช้แบบวัดเจตคิที่มีองค์ประกอบ 3 องค์ประกอบคือ ความสนใจ การมองเห็นประโยชน์และความยากง่ายของเรขาคณิต

ผลการวิจัยพบว่า ระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี ของนักเรียนทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน แต่เมื่อพิจารณาภายในกลุ่มจะพบว่าระดับการคิดทางเรขาคณิต ของแวน ฮีลี และผลสัมฤทธิ์ในการเขียนการพิสูจน์มีปฏิสัมพันธ์กัน และพบว่าผลสัมฤทธิ์ในการเขียนการพิสูจน์และเจตคติของนักเรียน นักเรียนที่เรียนโดยใช้ตำราที่จัดเรียบเรียบโดยยึดระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี สูงกว่า นักเรียนที่เรียนโดยใช้ตำรามาตรฐาน และมีความคิดเห็นว่าเรขาคณิตตอนปลายปียากกว่าตอนกลางปี ส่วนนักเรียนที่เรียนแบบโดยใช้ตำราเรียนเรขาคณิตที่เป็นมาตรฐานคิดว่าเรขาคณิตตอนปลายปี ง่ายกว่าตอนกลางปี เมื่อผ่านไปครึ่งปีนักเรียนมีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงเจตคติในองค์ประกอบความสนใจ และพบว่าการใช้ตำราเรียนเรียบ

เรียบโดยยึดระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี ยังคงทำให้นักเรียนรู้สึกว่าการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเป็นสิ่งที่ยาก และนักเรียนที่เรียนแบบเก่าโดยใช้ตำราเรขาคณิตที่เป็นมาตรฐานใช้เวลาในเรื่องการพิสูจน์มากกว่านักเรียนกลุ่มที่เรียนโดยใช้ตำราที่จัดเรียบเรียบโดยยึดระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี

ไชยสังข์ (Chaiyasang. 1987) ได้ทำวิจัยเรื่อง "An Investigation into Level of Geometric Thinking and Ability to Construct Proof of Students in Thailand." มีจุดมุ่งหมายเพื่อสำรวจระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนไทยที่เรียนเรขาคณิตแนวใหม่ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 3,047 คน จาก 12 โรงเรียนที่ตั้งอยู่ในภาคตะวันออกของประเทศไทย เครื่องมือที่ใช้เป็นแบบทดสอบ 2 ฉบับ คือ (1) แบบทดสอบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี ของยูซิสกิน ซึ่งเป็นข้อสอบปรนัยชนิดเลือกตอบ 5 ตัวเลือก จำนวน 25 ข้อ และ (2) แบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ ซึ่งพัฒนาโดย CDASSG Project เป็นแบบทดสอบความเรียงให้แสดงการพิสูจน์หรือเติมข้อความแสดงการพิสูจน์ในช่องว่างที่เว้นไว้ให้

ผลการวิจัยพบว่านักเรียนส่วนมากมีระดับการคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 40% ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถพิสูจน์เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการโดยใช้การนิรนัย 2 ขั้นตอนได้ แต่มีนักเรียนจำนวนไม่ถึงร้อยละ 15 ที่สามารถสร้างการพิสูจน์โดยใช้การนิรนัยหลายขั้นตอน นักเรียนที่มีระดับการคิดอยู่ในระดับ 0 1 และ 2 ไม่สามารถพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้ ส่วนนักเรียนที่มีระดับการคิดระดับ 3 สามารถพิสูจน์ทางเรขาคณิตแบบง่ายได้ นักเรียนที่มีระดับการคิดระดับ 4 สามารถพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้ยกเว้นที่เป็นการพิสูจน์ที่ซับซ้อน นอกจากนี้ยังพบอีกว่า นักเรียนที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิต อยู่ในระดับ 0 1 และ 2 ไม่สามารถบอกสิ่งกำหนดให้และสิ่งซึ่งต้องการพิสูจน์ได้ สามารถใช้การนิรนัยแบบง่าย ๆ ได้ทั้ง ๆ ที่จบการพิสูจน์แล้วก็ยังคงพิสูจน์ต่อไป นำสิ่งต้องการพิสูจน์มาเป็นสิ่งกำหนดให้ ให้เหตุผลประกอบการพิสูจไม่ถูกต้อง สรุปได้ไม่ถูกต้อง ยอมรับการพิสูจน์จากการอุปนัย นักเรียนที่มีระดับการคิดระดับ 3 มีปัญหาเช่นเดียวกันแต่ไม่พบบ่อยนัก และนักเรียนกลุ่มนี้สามารถใช้กระบวนการในการพิสูจน์ได้ถูกต้องมากกว่า

โบแบงโก(Bobango. 1987) ได้ทำวิจัยเรื่อง "Van Hiele Levels of Geometric Thought and Student Achievement in Standard Content and Proof Writing: The Effect of Phase-Based Instruction." เพื่อศึกษาระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี และผลสัมฤทธิ์ในการเขียนการพิสูจน์ ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้คอมพิวเตอร์ตามลำดับขั้นการสอนของแวน ฮีลี และศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับการคิดทางเรขาคณิตกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

เรขาคณิต และผลสัมฤทธิ์ในการเขียนการพิสูจน์ ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้คอมพิวเตอร์ตามลำดับขั้นการสอนของแวน ฮีลี กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนจำนวน 72 คน ซึ่งได้มาจากโรงเรียน 4 โรงเรียน ซึ่ง 2 โรงเรียนเป็นโรงเรียนสำหรับนักเรียนปกติ ส่วนอีก 2 โรงเรียนเป็นโรงเรียนสำหรับเด็กเก่ง ในการสอนใช้โปแกรม Geometric Supposer และใช้บทเรียนที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้นมาเอง โดยใช้ลำดับขั้นการสอนของ แวน ฮีลี

ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนในโรงเรียนสำหรับเด็กปกติมีระดับการคิดทางเรขาคณิตสูงขึ้น โดยเฉพาะจากระดับ 1 เป็นระดับ 2 มากกว่าระดับอื่น ๆ และระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี มีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเนื้อหาเรขาคณิตมาตรฐานและการเขียนการพิสูจน์ แต่ความสัมพันธ์นี้มีไม่มาก และยังพบว่านักเรียนที่มาจากโรงเรียนสำหรับเด็กเก่งจะเปลี่ยนระดับการคิดไปสู่ระดับที่สูงขึ้นอย่างเห็นได้ชัด นอกจากนี้ยังพบว่าการสัมภาษณ์สามารถประเมินระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนได้

สตคเฟอร์ (Stove. 1989) ได้ทำวิจัยเรื่อง “An Exploration of Student's Reasoning Ability and van Hiele Levels as Correlates of Proof-Writing Achievement in Geometry.” มีจุดมุ่งหมายของการวิจัยคือเพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการให้เหตุผลกับระดับการคิดของแวน ฮีลี ในการเขียนการพิสูจน์เรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนที่เรียนเรขาคณิตใน โรงเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายกวม (Guam High School) จำนวน 104 คน ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ในการเขียนการพิสูจน์มีความสัมพันธ์กับระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวนฮีลีค่อนข้างสูง ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงการนิรนัย มีความสัมพันธ์กับคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบปลายเปิด กระบวนการเชิงบูรณาการมีความสัมพันธ์กับจำนวนตัวเลือกในข้อสอบแบบเลือกตอบ ค่าเฉลี่ยและความเร็วในให้เหตุผล แบบอุปนัยไม่มี ความสัมพันธ์กัน ไม่มีความแตกต่างระหว่างเพศในทุกตัวแปรที่ศึกษา แต่พบว่าเพศกับชนชาติของนักเรียนมีปฏิสัมพันธ์กัน ผู้วิจัยให้ข้อเสนอแนะเพิ่มเติมว่านักเรียนมัธยมศึกษาส่วนมากไม่ประสบความสำเร็จในการพิสูจน์ จึงไม่ควรเน้นการพิสูจน์ในระดับมัธยมศึกษา และควรจัดหลักสูตรที่ช่วยพัฒนากระบวนการนิรนัยเพื่อช่วยเพิ่มระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี ของนักเรียน

ฟินเนลล์ (Finnell. 1992) ได้ทำวิจัยเรื่อง “Metacognition and the van Hiele Model of Thinking in Geometry.” เพื่อค้นหาหลักฐานทางอภิปัญญาที่เกี่ยวข้องกับระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี ของนักเรียนที่เรียนเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยใช้การสืบสวนสอบสวนอย่างเป็นธรรมชาติ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนจำนวน 12 คน ที่เข้าเรียนใน

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายมาแล้วเป็นเวลา 1 ปี โดยใช้แบบทดสอบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี แล้วนำมาวิเคราะห์หาหลักฐานของการใช้อภิปัญญาของนักเรียน

ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่มีระดับการคิด ระดับ 1 ไม่มีความรู้ทางเรขาคณิตที่จำเป็นสำหรับการทำกิจกรรมให้สำเร็จ มีความเชื่อว่าตนเองเป็นนักคณิตศาสตร์ที่ดีได้ ไม่ใส่ใจว่าจะทำกิจกกรมได้หรือไม่ได้ เมื่อเลือกคำตอบแล้ว จะไม่ตรวจสอบคำตอบ ส่วนนักเรียนที่มีระดับการคิดระดับ 2 มักจะแสดงออกโดยการซักถามและให้ข้อเสนอแนะใช้ยุทธวิธีในการทำกิจกรรมมากกว่า 1 อย่าง และยกตัวอย่าง ที่รูปธรรมได้มากกว่า 1 อย่าง มีความเชื่อว่าตนเองเป็นนักคณิตศาสตร์ที่ดีได้ ชอบการพิสูจน์เพราะเชื่อว่าตนสามารถทำได้ดี รู้ว่าตนเองมีความสามารถอะไร มีการตรวจสอบคำตอบเพื่อดูว่าจะเปลี่ยนคำตอบหรือไม่ นอกจากนี้ยังพบว่านักเรียนที่ซอบซักถามปัญหากับนักเรียนที่ไม่ซักถามปัญหามีระดับการคิดไม่แตกต่างกัน แต่พฤติกรรมทางอภิปัญญาของนักเรียนที่ซักถามปัญหาจะเปลี่ยนแปลงในทางที่ดีขึ้น

เลอเวลเลน และเฮสเตอร์ (Lewellen & Hester. 1992) ได้ทำวิจัยเรื่อง "Conceptualizations of Geometric Motions in Elementary School Children: An Extension of the van Hiele Model." เพื่อศึกษาแนวคิดเกี่ยวกับเรขาคณิตของแวนฮีลีที่กว้างออกไป สำรวจและเปรียบเทียบระดับขั้นการคิดของแวนฮีลีของนักเรียน เรื่องรูปหลายเหลี่ยมและการเคลื่อนที่ทางเรขาคณิตและอธิบายลำดับขั้นของแวนฮีลีโมเดลอย่างละเอียดโดยใช้การสังเกตนักเรียนอย่างใกล้ชิดเกี่ยวกับพฤติกรรมของนักเรียนในระดับขั้นที่แตกต่างกัน โดยในการศึกษาใช้การสัมภาษณ์และการสังเกตนักเรียน

ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการอธิบายระดับการเคลื่อนที่ใหม่เมื่อได้เพิ่มเติมบทนิยามเกี่ยวกับระดับขั้นความคิดของนักเรียนได้มีการอธิบายเพิ่มเติมเกี่ยวกับระดับการคิดของแวน ฮีลี ในรูปหลายเหลี่ยมและการเคลื่อนที่ และเข้าใจพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนระดับประถมศึกษาอย่างชัดเจนว่า นักเรียนสามารถสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างไรและสิ่งใดที่ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดพฤติกรรมหรือเกิดความก้าวหน้านั้น

เอลชัค (Elchuck. 1992) ได้ทำวิจัยเรื่อง "The Effects of Software Type, Mathematics Achievement, Spatial Visualization, Locus of Control, Independent Time of Investigation, and van Hiele on Geometric Conjecturing Ability" มีจุดมุ่งหมายเพื่อ สำรวจผลการใช้ซอร์ฟแวร์ทางเรขาคณิตที่มีต่อ (1) ความสามารถในการสร้างข้อคาดเดา(Conjectures Making) (2) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (3) ทักษะการมองภาพเชิงมิติสัมพันธ์ (4) Locus of Control (5) เวลาที่ใช้ในการสำรวจอิสระ และ (6) ระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบของแวน ฮีลี กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับ 9 จำนวน 157 คน แบ่งออกเป็นกลุ่มทดลอง 2 กลุ่ม

กลุ่มหนึ่งเรียนโดยใช้ The Geometer's Sketchpad ส่วนอีกกลุ่มหนึ่งไม่ได้ใช้โปรแกรมนี้ ใช้เวลาทดลองกลุ่มละ 3 สัปดาห์ และมีเวลาให้นักเรียนได้ศึกษาเพิ่มเติมด้วยตนเองอีกด้วย หลังจากนั้นวัด ความสามารถในการคาดเดาเป็นเวลา 2 วัน ผลการวิจัยพบว่า เมื่อไม่คำนึงถึงตัวแปรเกี่ยวกับโรงเรียนพบว่า ประเภทของซอร์ฟแวร์ไม่มีผลต่อตัวแปรต่อไปนี้ ได้แก่ ทักษะด้านมิติสัมพันธ์ Locus of Control และระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบของแวน ฮีลี แต่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเวลาในการศึกษาด้วยตนเองมีความสัมพันธ์กับความสามารถในการสร้างข้อคาดเดา แต่เมื่อพิจารณาตัวแปรที่เป็นโรงเรียนจะพบว่า ประเภทของซอร์ฟแวร์มีความสัมพันธ์กับความสามารถในการสร้างข้อคาดเดา

บอนนี (Bonnie. 1994) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "Conjecturing and Proof-Writing in Dynamic Geometry." มีจุดมุ่งหมายเพื่อตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี กับผลสัมฤทธิ์ในการเขียนการพิสูจน์และการคาดเดาของนักเรียนระดับมัธยมศึกษา กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียน 2 ห้องเรียน แยกเป็นกลุ่มทดลอง 31 คน และกลุ่มควบคุม 27 คน โดยกลุ่มทดลองเรียนด้วยวิธีสอนแบบอุปนัยในการสร้างข้อคาดเดาใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางเรขาคณิต คือ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad และโปรแกรม The Supposer ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนด้วยวิธีสอนแบบนิรนัย ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ในการเขียนการพิสูจน์ ความสามารถในการสร้างข้อคาดเดาและหาข้อสรุป ความสามารถในการเขียนการพิสูจน์มีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ นักเรียนทั้งสองกลุ่มมีความสามารถในการเขียนการพิสูจน์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกัน

ซิมเซอร์ (Symser. 1994) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "The Effects of Geometric Supposers: Spatial ability, van Hiele Levels, and Achievement. Ph.D. The Ohio State University." กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนจำนวน 39 คน เป็นกลุ่มทดลอง 16 คน และกลุ่มควบคุม 23 คน โดยศึกษา 2 ระยะ คือ ระยะ ที่ 1 เป็นการศึกษาผลกระทบจากการใช้ซอร์ฟแวร์ช่วยคิดระยะยาว ระยะที่ 2 วิเคราะห์ผลการใช้บทเรียนเชิงมิติสัมพันธ์ โดยใช้แบบทดสอบระดับการคิดทางเรขาคณิตที่พัฒนาโดยยูซิสกิน (Usiskin) กับนักเรียนกลุ่มที่เรียนโดยใช้ลำดับขั้นการคิดของแวน ฮีลี จำนวน 25 ข้อ และหลังจบบทเรียนทดสอบด้วยแบบทดสอบซึ่งสร้างโดย ซีทีบี/แม็คกรอร์-ฮิลล์ (CTB/McGraw-Hill) จำนวน 42 ข้อ และส่วนที่เพิ่มเติมอีก 13 ข้อ เพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการมองเห็นภาพมิติสัมพันธ์ ระดับขั้นของแวนฮีลี ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันอย่ามีนัยสำคัญที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05 กลุ่มทดลองสามารถใช้ซอร์ฟแวร์ได้ดีและดีกว่ากลุ่มควบคุม และพบว่า การมองภาพ

มิติสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่มีความสัมพันธ์กัน และการมองภาพมิติสัมพันธ์กับระดับขั้นของแวนฮีลีไม่มีความสัมพันธ์กัน แต่พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนกับระดับขั้นของแวนฮีลีมีความสัมพันธ์กันในระดับปานกลางที่ระดับนัยสำคัญ .01 ระยะที่สอง กลุ่มทดลองได้รับการสุ่มให้เรียนบทเรียนเชิงมิติสัมพันธ์เป็นเวลาหนึ่งหรือสองสัปดาห์เพื่อแยกแยะข้อแตกต่างได้อย่างชัดเจนยิ่งขึ้น ซึ่งแสดงให้เห็นว่าไม่มีผลกระทบมากในการใช้บทเรียนเชิงมิติสัมพันธ์ และอีกพบว่า การใช้ซอร์ฟแวร์เพื่อช่วยคิดไม่สามารถระบุได้ว่ามีผลกระทบหรือไม่กระทบซึ่งกันและกันระหว่างทั้งสองกลุ่ม

แม็คไบรด์ (McBride. 1996) "A Convergent and Discriminant Validity Study of Several Instruments used to Measure and Predict Performance in Formal Geometry" มีจุดมุ่งหมายคือ สำรวจความสัมพันธ์ระหว่างระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวนฮีลี กับตัวแปรต่อไปนี้คือ ผลสัมฤทธิ์ทางเรขาคณิต การแสดงการพิสูจน์ และการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต เครื่องมือการวิจัยมี 3 ฉบับคือ แบบทดสอบวัดระดับระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี แบบทดสอบการพิสูจน์ทางเรขาคณิต และ แบบทดสอบการแก้ปัญหา

ผลการวิจัยพบว่า (1) ระดับการคิดเป็นตัวแปรทำนายผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต การแสดงการพิสูจน์ และการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตในระดับปานกลาง ($r = .55, .46, .56$ ตามลำดับ) (2) ลำดับขั้นในการพัฒนาทางสติปัญญาที่ผู้สอนจัดให้ผู้เรียนเป็นตัวทำนาย ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน การแสดงการพิสูจน์ และการแก้ปัญหาในระดับปานกลาง($r =.55, .46, .56$ ตามลำดับ) (3) ความรู้เดิมเป็นตัวทำนายผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในระดับปานกลาง ($r =.54$) ความถนัดเกี่ยวกับปริมาณเป็นตัวทำนาย ความสามารถในการการพิสูจน์ ความสามารถในการแก้ปัญหาที่ดีที่สุด (4) ระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี เป็นตัวทำนายที่ดีที่สุดเกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต

แสวฟฟอร์ด และธอร์นตัน (Swafford & Thorton. 1997: 467-483) ได้ทำวิจัยเรื่อง "Increased Knowledge in Geometry and Instructional Practice" โดยการสำรวจผลกระทบของการสอนเพื่อยกระดับความรู้ทางเรขาคณิตของครูและงานวิจัยของครูเกี่ยวกับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียน โดยใช้กลุ่มตัวอย่างเป็นครู 8 คน ดำเนินการทดลอง 4 สัปดาห์ โปรแกรมประกอบไปด้วย สารบัญคอร์สเกี่ยวกับเรขาคณิต และการสัมมนาเกี่ยวกับงานวิจัยที่อยู่บนพื้นฐานทฤษฎีของแวน ฮีลี ผลการวิจัยพบว่า หลังเรียนครูมีความก้าวหน้ากว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .01 และจากการสังเกตยังพบว่าครูมีความคิดและการแสดงออกเปลี่ยนแปลงไปอย่างเห็นได้ชัดเจน

ลี (Lee. 1999) ได้ทำวิจัยเรื่อง "The Relationship between Students' Proof-writing Ability and van Hiele Levels of Geometric Thought in a College Geometry Course" มีจุดมุ่งหมายเพื่อสำรวจพัฒนาการของทักษะการให้เหตุผลและความสามารถในการเขียนการพิสูจน์ที่สัมพันธ์กับระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี ของนักศึกษาระดับวิทยาลัย โดยใช้การศึกษาเชิงปริมาณควบคู่กับเชิงคุณภาพ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาจำนวน 12 คนที่ลงทะเบียนเรียนเรขาคณิตแนวใหม่ มีการทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนเพื่อนำผลมาเปรียบเทียบกัน ผลการวิจัยพบว่า คะแนนจากการทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนแตกต่างกัน สำหรับในส่วนเชิงคุณภาพพบว่า กลุ่มที่มีระดับการคิดระดับ 1 สามารถเลื่อนระดับการคิดไปถึงระดับ 5 แต่กลุ่มที่มีการคิดระดับ 3 ระดับการคิดยังคงอยู่ที่เดิมแต่มีทักษะในการให้เหตุผลและสามารถสร้างการพิสูจน์ได้ด้วยตนเอง ผลจากการศึกษาเชิงคุณภาพให้ข้อสนับสนุนว่านักศึกษาที่มีระดับการคิดระดับ 1 อาจจะมีความสามารถในการระบุสมมุติฐานและหาผลสรุปได้ด้วยตนเอง แต่เนื่องจากเวลาที่ใช้ศึกษามีเพียงภาคเรียนเดียวจึงไม่อาจจะยืนยันได้

มอยเยอร์ (Moyer. 2003) ได้ทำการวิจัยเรื่อง " An Investigation of The Geometer's Sketchpad and van Hiele Levels" มีจุดมุ่งหมายศึกษาผลของการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ประกอบการสอนเรขาคณิตที่มีต่อระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวนฮีลี และความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนจำนวน 4 ห้องเรียนโดยใช้ครูสองคน รับผิดชอบ 2 ห้อง ห้องหนึ่งเป็นห้องที่สอนตามปกติ ส่วน อีกห้องเป็นห้องที่สอนโดยใช้ The Geometer's Sketchpad ก่อนสอนทดสอบนักเรียนด้วยแบบทดสอบวัดความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ และแบบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิต ซึ่งพัฒนาโดย ยูซิสกิน (Usiskin) เมื่อสิ้นสุดการสอนทดสอบด้วยแบบทดสอบหลังเรียนซึ่งมี 2 ฉบับคือฉบับหนึ่งเป็นเนื้อหาเรขาคณิตส่วน อีกฉบับเป็นฉับเดียวกับก่อนเรียน และสำรวจเจคติและความเชื่อของนักเรียน

ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้ The Geometer's Sketchpad มีระดับการคิดคงเดิมและความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนไม่แตกต่างไปจากก่อนเรียน แต่พบว่าคะแนนระดับการคิดก่อนเรียนมีความสัมพันธ์กับคะแนนปลายภาคในวิชาพีชคณิต 1 นอกจากนี้ยังให้ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไปไว้ว่า (1) ควรทำวิจัยที่เป็นการสำรวจทักษะที่จำเป็นสำหรับครูในการนำโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนอย่างให้ประสิทธิภาพ (2) ศึกษาผลการใช้ The Geometer's Sketchpad ในห้องเรียนโดยใช้เอกสารตำราที่ไม่ใช่แนวคอนสตรัคติวิสซึม หรือวิธี ค้นพบ (3) ศึกษาการนำ The Geometer's Sketchpad ไปใช้สอนตลอดปี ไม่ใช่สอนเพียงบาง เนื้อหา

คาลบรัล (Calbral. 2004) ได้ทำวิจัยเรื่อง "The van Hiele's Model and Cognitive Visualization in Learning Geometry at Secondary School" มีจุดมุ่งหมายเพื่อ (1) สำรวจ บทบาทของ cognitive visualization ที่จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเลื่อนระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี จากระดับต่ำไปสู่ระดับที่สูงขึ้น ศึกษาความแตกต่างระหว่าง illustrative visual และ cognitive visual และบทบาทของทั้งสองวิธีที่มีต่อระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี ศึกษานำร่องเกี่ยวกับผลกระทบของ cognitive visualization ที่มีต่อการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษา กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นถึงมัธยมศึกษาตอนปลาย จำแนกได้ดังนี้ เกรด จำนวน 1 คน เกรด 8 จำนวน 6 คน เกรด 9 จำนวน 10 คน เกรด 10 จำนวน 10 คน และเกรด 12 จำนวน 2 คน ให้นักเรียนตอบปัญหา 4 ปัญหาโดยให้นักเรียนแสดงวิธีแก้ปัญหาด้วยวิธีการ 2 แบบคือ illustrative visual และ cognitive visual ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนจะสามารถแก้ปัญหาได้ดีถ้านักเรียนใช้วิธี illustrative visual มาใช้ในการแก้ปัญหา และวิธี cognitive visual จะช่วยให้นักเรียนสามารถปรับปรุงทักษะในการแก้ปัญหา และช่วยให้สามารถเลื่อนระดับการคิดทางเรขาคณิตของ แวน ฮีลีได้

แมททิวส์ (Mathews. 2004) ได้ทำวิจัยเรื่อง "A Comparison of Mira Phased – Based Instruction, Textbook Instruction, and No Instruction on The van Hiele Levels of Fifth-grade Students" มีจุดมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบผลการสอนโดยใช้การสอนที่แตกต่างกัน 3 แบบ คือ การสอนโดยใช้ขั้นตอนการสอนด้วยโปรแกรมมิรา การสอนโดยใช้ตำราประกอบการสอน และการสอนโดยให้นักเรียนศึกษาด้วยตนเอง ที่มีต่อระดับการคิดทางเรขาคณิตของแวน ฮีลี กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 5 จำนวน 3 ห้องเรียนรวมทั้งสิ้น 52 คน ในฤดูใบไม้ร่วงของปี ค.ศ. 2004 โดยใช้แผนแบบการวิจัยแบบทดสอบก่อน-หลังคือทดสอบก่อนเรียน ทดลองสอนเป็นเวลา10 วัน แล้วทดสอบหลังเรียน เพื่อดูการเปลี่ยนแปลงระดับการคิด

ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยให้นักเรียนศึกษาด้วยตนเอง มีระดับการคิดคงเดิม เมื่อเปรียบเทียบรายคู่จะพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้ตำราประกอบการสอนและได้รับการสอนโดยใช้ขั้นตอนการสอนด้วยโปรแกรมมิรา มีระดับการคิดไม่แตกต่างกัน ส่วน นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้ขั้นตอนการสอนแบบมิรากับนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยให้นักเรียนศึกษาด้วยตนเองมีระดับการคิดแตกต่างกัน และนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยให้นักเรียนศึกษาด้วยตนเองกับนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้ตำราประกอบการสอนมีระดับการคิดแตกต่างกันและได้ข้อสรุปว่า การจัดการเรียนการสอนของครูจะช่วยยกระดับการคิดของนักเรียนได้

2. **งานวิจัยเกี่ยวกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และเรขาคณิต**

2.1 **งานวิจัยในประเทศ**

งานวิจัยในประเทศเกี่ยวกับการพิสูจน์มีอยู่ 2 ลักษณะคือ การวิจัยเกี่ยวกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และการวิจัยเกี่ยวกับการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งมีงานวิจัยตั้งแต่ปี 2533 จนถึงปัจจุบันดังนี้

เยาวเรศ สิงหนันท์(2533) ได้ทำวิจัยเรื่อง "ศึกษาเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตระหว่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนรัฐบาลและโรงเรียนเอกชน เขตการศึกษา 6" โดยมีกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จากโรงเรียนรัฐบาล จำนวน 273 คน และโรงเรียนเอกชนจำนวน 251 คน โดยการวัดความสามรถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตของนักเรียน มีเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบความเรียง (essay test) จำนวน 8 ข้อ มีความเที่ยง 0.80

ผลการวิจัยพบว่า 1) จำนวนนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์การผ่านแบบทดสอบทั้งฉบับของนักเรียนโรงเรียนรัฐบาลมากกว่าจำนวนนักเรียนโรงเรียนเอกชน 2) จำนวนนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์บกพร่องแต่ละเกณฑ์คือ (1) เขียนสิ่งกำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ถูกต้อง (2) เขียนพิสูจน์และให้เหตุผลถูกต้องได้ครึ่งหนึ่งของการพิสูจน์ในข้อนั้น หรือเขียนข้อความพิสูจน์ถูกหมดแต่ให้เหตุผลผิดในแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์(3)เขียนการพิสูจน์ถูกต้องเกือบหมดแต่ให้เหตุผลผิดในแต่ละขั้นของการพิสูจน์ (3) เขียนการพิสูจน์ถูกต้องเกือบทั้งหมด แต่มีข้อบกพร่องในการใช้สัญลักษณ์ ศัพท์ หรือข้อความของทฤษฎีที่ใช้อ้าง (4) เขียนการพิสูจน์ถูกต้องทั้งหมดยกเว้นข้อบกพร่องในการใช้สัญลักษณ์เพียง 1 แห่ง หรือเขียนพิสูจน์ถูกต้องทั้งหมด ไม่มีข้อผิดพลาดเลย ปรากฏว่า จำนวนนักเรียนโรงเรียนรัฐบาลผ่านเกณฑ์แต่ละเกณฑ์ ในข้อ (1)-(4) คิดเป็นร้อยละ 40.02 19.18 15.48 และ 12.18 เรียงตามลำดับ ส่วนจำนวนนักเรียนโรงเรียน เอกชนผ่านเกณฑ์แต่ละเกณฑ์ในข้อ (1)-(4) คิดเป็นร้อยละ 19.72 14.08 9.06 และ 2.69 เรียงตามลำดับ นอกจากนี้ยังพบว่า 2) นักเรียนในโรงเรียนรัฐบาลมีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตสูงกว่านักเรียนโรงเรียนเอกชนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ .01

อาภรณ์รัตน์ สารทัศนานันท์ (2544) ได้ทำวิจัยเรื่อง "การสร้างชุดการเรียน เรื่อง "การพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์สำหรับนักศึกษาโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์" มีจุดมุ่งหมายเพื่อสร้างและพัฒนาชุดการเรียนเรื่อง "การพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์" สำหรับนักศึกษาโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ และเพื่อเปรียบเทียบ

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งมีทั้งหมด 7 หน่วย ได้แก่หน่วยที่ 1 การให้เหตุผลแบบอุปนัย หน่วยที่ 2 การพิสูจน์ข้อความในรูป $p \rightarrow q$ หน่วยที่ 3 การพิสูจน์ข้อความในรูป $p \leftrightarrow q$ หน่วยที่ 4 การพิสูจน์โดยกรณี หน่วยที่ 5 การพิสูจน์แย้งโดยยกตัวอย่างคัดค้าน หน่วยที่ 6 การพิสูจน์ว่ามีจริงและการพิสูจน์ข้อความซึ่งเป็นไปได้อย่างเดียว หน่วยที่ 7 การพิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักศึกษาโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 1 ปีการศึกษา 2544 จำนวน 44 คน

ผลการวิจัยพบว่าชุดการเรียนมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 80/80 ทุกหน่วย และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์หลังเรียนโดยใช้ชุดการเรียนสูงกว่าก่อนเรียนโดยใช้ชุดการเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ .05 และนักศึกษามีความคิดเห็นต่อการใช้ชุดการเรียนเรื่อง การพิสูจน์ ในวิชาคณิตศาสตร์ อยู่ในระดับมากเกือบทุกรายการ

มารศรี แนวจำปา(2546) ได้ทำวิจัยเรื่อง "การศึกษาสมรรถภาพในการพิสูจน์ของนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ของนักศึกษาชั้นปีที่ 3 โปรแกรมคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันราชภัฏอุบลราชธานี" มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาสมรรถภาพของนักศึกษาชั้นปีที่ 3 โปรแกรมคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันราชภัฏอุบลราชธานี เพื่อเปรียบเทียบสมรรถภาพการพิสูจน์ของนักศึกษาที่เรียนในระดับอ่อน ปานกลาง และดี เพื่อเปรียบเทียบสมรรถภาพการพิสูจน์ของนักศึกษาหมู่เรียน วท.บ 3.3 และนักศึกษาหมู่เรียน กศ.อศ.วท.บ. 3.4

ผลการวิจัยพบว่า สมรรถภาพของนักศึกษาชั้นปีที่ 3 โปรแกรมคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันราชภัฏอุบลราชธานีอยู่ในระดับปานกลางถึงมาก เมื่อนำผล การเรียนรายวิชา 4091201 มาเป็นเกณฑ์ในการจัดระดับผลการเรียนออกเป็น 3 ระดับ คือ ระดับดี ระดับปานกลาง และระดับน้อย ผลการวิจัยพบว่านักศึกษาหมู่เรียน วท.บ. 3.4 ที่มีผลการเรียนดีมากมีสมรรถภาพในการพิสูจน์ในระดับปานกลาง นักศึกษาหมู่เรียน วท.บ. 3.3 ที่มีผลการเรียนปานกลางมีสมรรถภาพในการพิสูจน์ในระดับปานกลาง นักศึกษาที่มีผลการเรียนน้อยมีสมรรถภาพการพิสูจน์ในระดับน้อยด้วย

บุญเสริม ยุพจันทร์ (2547) ได้ทำวิจัยเรื่อง "การพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์เรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยการจัดกิจกรรมตามลำดับขั้นของแวน ฮีลี" มีจุดมุ่งหมายเพื่อพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนตามลำดับขั้นของ แวน ฮีลี เรื่องการพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และศึกษาความสามารถในการพิสูจน์และระดับความคิดทางเรขาคณิต ของนักเรียนที่มีระดับความคิดอยู่ในระดับ 2 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 ที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 2 โรงเรียนกุลนทีรุทธาราม จำนวน 27 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วยกิจกรรม การเรียนการสอน แบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ และแบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิต

ผลการวิจัยพบว่า กิจกรรมการเรียนการสอนตามลำดับขั้นของแวน ฮีลี เรื่อง การพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีประสิทธิภาพเป็น 65.55/71.82 ไม่เป็นไปตามเกณฑ์ 70/70 ที่ตั้งไว้ นักเรียนร้อยละ 40.74 ของนักเรียนทั้งหมดมีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต และนักเรียนร้อยละ 51.85 สามารถพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิตจากระดับ 2 ไปสู่ระดับ 3

2.2 งานวิจัยในต่างประเทศ

งานวิจัยในต่างประเทศเกี่ยวกับการพิสูจน์คล้ายคลึงกับงานวิจัยที่ทำในประเทศซึ่งมีอยู่ 2 ลักษณะคือ การวิจัยเกี่ยวกับการพิสูจน์ทางคณิต และการวิจัยเกี่ยวกับการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งมีงานวิจัยตั้งแต่ปี 1987 จนถึงปัจจุบันที่พอรวบรวมได้มีดังนี้

แซอิด (Saeed. 1987) ได้ศึกษาถึงความเข้าใจของนักศึกษาในเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และความสัมพันธ์กับเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้รูปแบบ การให้เหตุผลแบบนิรนัย การให้เหตุผลแบบอุปนัย การพิสูจน์ทางตรง การพิสูจน์ทางอ้อม การยกตัวอย่างค้าน การตั้งสมมุติฐาน การให้บทนิยาม และการใช้หลักตรรกศาสตร์เบื้องต้น กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษามหาวิทยาลัย โอไฮโอ จำนวน 101 คน โดยใช้ข้อสอบในการพิสูจน์ 10 ข้อ แบบวัดเจตคติ จำนวน 26 ข้อ

ผลการวิจัยพบว่า นักศึกษาจำนวนมากมองไม่เห็นความแตกต่างระหว่างการอธิบายกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และไม่เห็นความจำเป็นในการพิสูจน์ข้อความที่รู้แล้วว่าเป็นจริง ไม่เข้าใจข้อความแย้งสลับที่ และยังไม่เข้าใจว่าการให้เหตุผลแบบอุปนัยไม่เป็นการเพียงพอที่จะพิสูจน์กรณีทั่วไปได้ และยังพบว่าคะแนนความสามารถในการพิสูจน์มีความสัมพันธ์กับเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

เค็มป์ (Kemp. 1990) ได้ทำวิจัยเรื่อง “The van Hiele Levels of Geometric Thought and Achievement in Euclidean Geometry among Deaf Undergraduate Students.” มีจุดมุ่งหมาย 6 ข้อ ได้แก่ (1) เพื่อใช้ทฤษฎีของแวน ฮีลี ในการอธิบายปัญหาการเรียนเรขาคณิตแบบยุคลิด โดยดูจากระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี (2) เพื่อศึกษาข้อมูลที่เป็นบรรทัด

ฐานสำหรับใช้ในการประเมินระดับการคิดตามตัวแบบ แวน ฮีลี ของนักศึกษาหูหนวก (3) เพื่อศึกษาการเปลี่ยนแปลงระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักศึกษาหูหนวกก่อนเรียนกับหลังเรียน (4) เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับการคิดตามตัวแบบแวน ฮีลี ของนักศึกษาหูหนวกกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาหูหนวกในมหาวิทยาลัย กาลลอเดต (Gallaudet University) ซึ่งเป็นมหาวิทยาลัยสำหรับคนหูหนวกโดยเฉพาะ โดยแบ่งเป็นกลุ่มทดลองซึ่งเป็นนักศึกษาที่เรียนเรขาคณิตแบบยุคลิด จำนวน 114 คน และกลุ่มควบคุมซึ่งเป็นนักศึกษาที่ไม่ได้เรียนเรขาคณิตแบบยุคลิดจำนวน 59 คน ก่อน-หลังการศึกษาทดสอบระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี ของนักเรียนทั้งสองกลุ่ม ส่วนกลุ่มทดลองต้องทำแบบทดสอบเพิ่มโดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ซึ่งพัฒนาโดยภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัย กาลลอเดต

ผลการวิจัยพบว่า จำนวนนักศึกษาร้อยละ 70 ทั้งสองกลุ่ม มีระดับการคิดอยู่ในระดับ แรกหรือระดับ 0 เมื่อสิ้นสุดการเรียนทดสอบนักศึกษา จำนวนนักศึกษาประมาณร้อยละ 17 มีระดับการคิดอยู่ในระดับ 2 ก่อนการทดลองนักศึกษากลุ่มควบคุมมีระดับการคิดสูงกว่ากลุ่มทดลอง แต่เมื่อตอนปลายภาคพบว่า กลุ่มควบคุมมีระดับการคิดต่ำกว่าหรือเท่ากับกลุ่มทดลอง และยังพบอีกว่าไม่มีนักศึกษาคนใดในทั้งสองกลุ่มที่มีระดับการคิดอยู่ในระดับ 3 หรือ ระดับ 4

มัวร์(Moore. 1990) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “College Students’ Difficulties in Learning to Do Mathematical Proofs” มีจุดมุ่งหมายเพื่อสำรวจปัญหาการเรียนเรขาคณิตของนักศึกษาเอกคณิตศาสตร์ในการถ่ายทอดระดับการคิดจากระดับต่ำคือเน้นขั้นตอนวิธี (algorithm) และสัญลักษณ์ ไปสู่ระดับสูง ที่เน้น การพิสูจน์ เป็นการวิจัยที่ทำต่อเนื่องจากการวิจัย ที่ทำมาแล้ว 2 เรื่อง ในมหาวิทยาลัยจอร์เจีย(Gorgia University) ใน 1989 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาจำนวน 1 ห้องเรียนที่เรียนการพิสูจน์ จำนวน 16 คน โดยที่ เป็นนักศึกษาปริญญาตรี เอกคณิตศาสตร์ จำนวน 8 คน เป็นนักศึกษาเอกคณิตศาสตร์ศึกษาจำนวน 6 คน และอีก 2 คนเป็นนักศึกษาระดับบัณฑิตศึกษาสาขาคณิตศาสตร์ วิธีเก็บรวบรวมข้อมูลใช้การสังเกตแบบไม่มีส่วนร่วมในชั้นเรียน การสัมภาษณ์นักศึกษาและอาจารย์ทั้งในห้องเรียนและนอกห้องเรียน

ผลการวิจัย พบว่า ปัญหาการพิสูจน์เรขาคณิตของนักศึกษาสามารถแยกออกเป็น 3 แบบ คือ (1) ปัญหาความเข้าใจมโนทัศน์ ได้แก่ บทนิยามมโนทัศน์ ภาพลักษณ์มโนทัศน์ และการใช้มโนทัศน์ (2) ปัญหาการใช้ภาษาและสัญกรณ์(notation) ได้แก่ ตรรกศาสตร์และการพิสูจน์ การแก้ปัญหาความเชื่อเกี่ยวกับคณิตศาสตร์และการพิสูจน์ และปัญหาเกี่ยวกับการเริ่มการพิสูจน์

ปัญหาเกี่ยวกับมโนทัศน์ ได้แก่ บทนิยามมโนทัศน์ ภาพลักษณ์มโนทัศน์ และการใช้มโนทัศน์ (3) ปัญหาการเริ่มต้นการพิสูจน์ และนอกจากนี้ยังพบตัวแบบที่ระบุตัวแปรหลัก ๆ ที่ทำให้นักศึกษามีปัญหาในการพิสูจน์

รวน (Ruan. 1996) ได้ทำวิจัยเรื่อง "A Comparative Study of Deductive Proofs in Geometry Education between the United States and the People's of China" มีจุดมุ่งหมายเพื่อเพื่อช่วยให้นักการศึกษาทางเรขาคณิตและครูเรขาคณิตได้พิจารณาทบทวนเกี่ยวกับการศึกษาการพิสูจน์เชิงนิรนัยเสียใหม่ โดยการเปรียบเทียบระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮีลี หลักสูตร และการทดสอบ วัสดุและสื่อประกอบการเรียนการสอนและวิธีสอนการพิสูจน์เชิงนิรนัย ระหว่างประเทศสหรัฐอเมริกากับประเทศสาธารณประชาชนจีน

ผลการวิจัยพบว่า หลักสูตรเกี่ยวกับการพิสูจน์เชิงนิรนัยยังไม่น่าพึงพอใจทั้งในประเทศสหรัฐอเมริกาและประเทศสาธารณประชาชนจีน ในประเทศสหรัฐอเมริกายังมีเอกสารตำราไม่เพียงพอและครูมักยึดตำราในการสอน ส่วนประเทศสาธารณรัฐประชาชนจีนนั้นพบว่านักเรียนต้องเรียนอย่างหนักเพราะข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัยต้องมีการแสดงการคิดทางเรขาคณิตในระดับสูง และพบว่านักเรียนไม่ประสบความสำเร็จในการพิสูจน์เชิงนิรนัยเช่นเดียวกับประเทศสหรัฐอเมริกา

คุค-แบ็กซ์ (Cook-Bax. 1997) ได้ทำวิจัยเรื่อง "An Investigation of the Differential Effect of Mira Manipulative Use on Secondary Students" มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนเกรด 9 และ 10 โดยใช้โปรแกรมมิรา (Mira) ในการพัฒนาการเขียนการพิสูจน์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษา จำนวน 42 คน เป็นกลุ่มทดลอง 21 คน และกลุ่มควบคุม 21 คน โดยกลุ่มทดลองสอนโดยใช้โปแกรมมิราและกลุ่มควบคุมสอนตามปกติ เครื่องมือการวิจัยได้แก่แบบทดสอบและแบบสัมภาษณ์ เกี่ยวกับการวางแผนพิสูจน์ การคิดค้นการพิสูจน์ ความคิดเห็นต่อการพิสูจน์ในเรื่องทั่ว ๆ ไป

ผลการวิจัยพบว่า โปรแกรมมิรามีประโยชน์ต่อนักเรียน ทั้งระดับสูงและระดับต่ำ และจากการสัมภาษณ์พบว่า นักเรียนทั้งสองกลุ่มไม่เห็นความจำเป็นในการพิสูจน์ มีปัญหาในการเริ่มต้นการพสูจน์และเห็นว่าการพิสูจน์เป็นเรื่องที่น่าเบื่อและยาก

เกลเลอร์(Gfeller. 2004) ได้ทำวิจัยเรื่อง " An Investigation of Tenth Grade Students' Views of the Purpose of Geometric Proof." จุดมุ่งหมายเพื่อสำรวจความคิดของนักเรียนเกี่ยวกับจุดมุ่งหมายของการพิสูจน์แบบใช้ตาราง (two-column proof) กลุ่มตัวอย่างเป็น

นักเรียนเกรด 10 จำนวน 11 ห้องเรียน โดยใช้วิธีการสังเกตในห้องเรียน และให้นักเรียนตอบคำถามโดยใช้แบบสอบถาม เกี่ยวกับจุดมุ่งหมายของการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

ผลการวิจัยพบว่า (1) นักเรียนมีปัญหาในการบอกจุดมุ่งหมายของการพิสูจน์เมื่อถูกถามตรง ๆ นักเรียนจำนวน 1 ใน 3 ของนักเรียนทั้งหมดบอกว่าจุดมุ่งหมายในการพิสูจน์คือ การให้คำอธิบาย(Explanation) และ การแสดงให้เห็นจริง (Verification) (2) นักเรียนส่วนมากบอกว่าจุดมุ่งหมายของการพิสูจน์คือการแสดงให้เห็นจริง มีอยู่เพียง 2-3 คน เท่านั้นที่กล่าวถึง การให้คำอธิบาย การจัดระบบ การสื่อความหมาย แต่พอสรุปได้ว่าจุดมุ่งหมายของการพิสูจน์มีอย่างน้อย 2 ข้อ (การให้คำอธิบาย การแสดงให้เห็นจริง และการสื่อความหมาย) (3) นักเรียนมีความคิดเห็นเกี่ยวกับจุดมุ่งหมายของการพิสูจน์อย่างหลากหลาย

ทรูเลิฟ(Truelove. 2004) ได้ทำการวิจัยเรื่อง"Geometry Teachers' Conceptions of Proof" มีจุดมุ่งหมายเพื่อสำรวจความเชื่อของครูระดับมัธยมศึกษาเกี่ยวกับมโนทัศน์ของการพิสูจน์ทางเรขาคณิต กลุ่มตัวอย่างเป็นครูผู้สอนเรขาคณิตจำนวน 114 คน จาก โรงเรียนทาง ตอนใต้ของรัฐมิสซูรี และทางตอนเหนือของรัฐอะคันซอร์ เครื่องมือในการวิจัยประกอบด้วยแบบประเมินชนิดมาตราส่วนประมาณค่า จำนวน 32 ข้อกระทงและคำถามเกี่ยวกับประชากรศาสตร์ 7 ข้อ 4 ระดับ เครื่องมือดังกล่าวมีความตรงและความเที่ยงเป็นไปตามเกณฑ์ วิธีดำเนินการวิจัย คือ สอบถามครูเกี่ยวกับธรรมชาติของวิธีสอนการพิสูจน์เรขาคณิต

ผลการวิจัยพบว่า ครูทั้งหมดจะใช้วิธีนำเสนอจากวิธีสอนแบบอุปนัยไปสู่นิรนัย และพบว่ามีตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับวิธีสอนเรขาคณิตของครูได้แก่ ประเภทของตำราเรียน ประสบการณ์ในการสอนเรขาคณิต การเห็นความสำคัญของการสอนเรขาคณิตหรือพีชคณิต ครูมีความเชื่อว่าการใช้กิจกรรมการสอนที่หลากหลาย ประเภทของตำรา และการเห็นความสำคัญในการสอนมีความสัมพันธ์กับความคิดเห็นของครู ส่วนตัวแปรที่เป็นเรื่องเวลาที่ใช้ในการพิสูจน์ ครูมีความคิดเห็นอยู่ในระดับน้อยที่สุด นอกจากนี้ยังพบว่า อายุของการมีใบประกอบวิชาชีพครูก็เป็นตัวแปรที่สัมพันธ์กับความคิดเห็นของครู

มัตสุดะ (Matsuda. 2004) ได้ทำวิจัยเรื่อง "The Impact of Different Proof Strategies on Learning Theorem Proving" มีจุดมุ่งหมายเพื่อผลของการใช้ยุทธวิธีแก้ปัญหา 2 แบบ คือ ยุทธวิธีไปข้างหน้า (Forward Strategies) กับ ยุทธวิธีถอยหลัง (Backward Strategies) ที่มีต่อการเรียนรู้การสร้างการพิสูจน์ทฤษฎีบทของนักเรียน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนจำนวน 52 คน โดยให้นักเรียนแสดงการแก้ปัญหาจำนวน 11 ข้อ

ผลการวิจัยพบว่า (1) นักเรียนที่ได้รับการสอนให้แก้ปัญหาด้วยยุทธวิธีไปข้างหน้าแสดงความสามารถในการพิสูจน์ดีกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนด้วยยุทธวิธีถอยหลัง (2) นักเรียนทั้งสองกลุ่มแสดงการพิสูจน์ได้ไม่ถูกต้องโดยมีความถี่พอ ๆ กัน (3) ทั้งสองกลุ่มมักจะเขียนการพิสูจน์ยาวเกินความจำเป็นและใช้ข้อความที่ไม่สมเหตุสมผลถึงแม้จะพิสูจน์ได้ถูกต้อง (4) กลุ่มยุทธวิธีถอยหลัง มีปัญหาในการพิสูจน์ คือมักจะเลือกใช้ข้ออ้างที่ไม่ใช่ข้ออ้างหลัก(major premise)

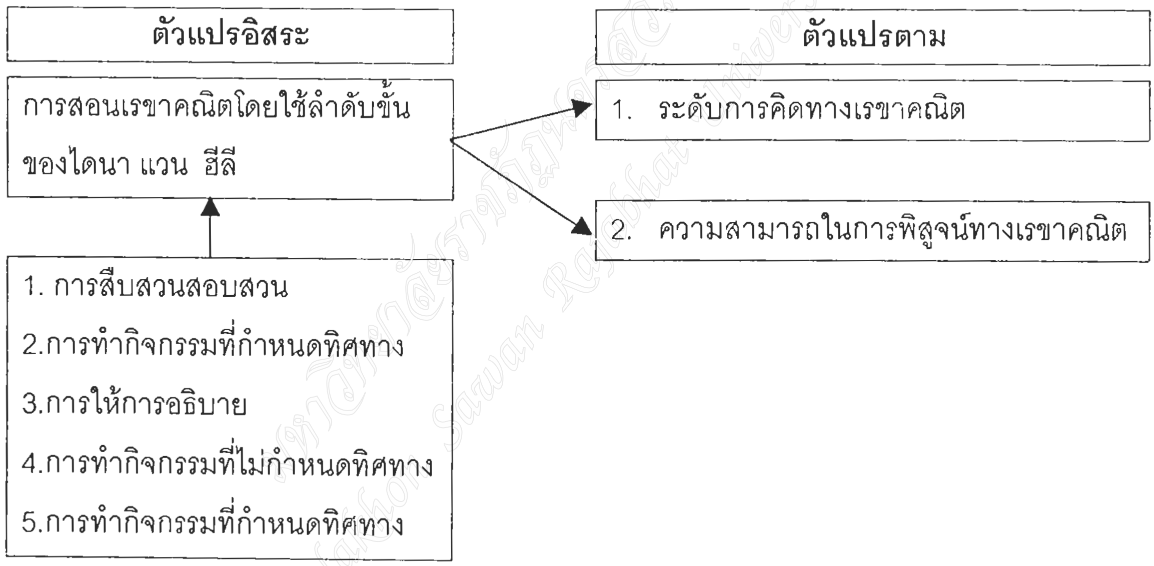
ซูบราเมเนียน (Subramanian. 2005) ได้ทำวิจัยเรื่อง " An Investigation of Geometry Students' Proving and Logical Thinking Abilities and The Impact of Dynamic Geometry Software on Student Performance" มีจุดมุ่งหมายเพื่อสำรวจ (1) บทบาทของเรขาคณิตที่จัดไว้ตลอดปีที่มีต่อความสามารถในการคิดเชิงตรรกะ และความสามารถในการพิสูจน์ (2) ความเชื่อมโยงระหว่างความสามารถในการคิดเชิงตรรกะกับความสามารถในการพิสูจน์ (3) ผลกระทบของการใช้ซอร์ฟแวร์ที่เป็นพลวัตรที่มีต่อการแสดงออกในทางเรขาคณิต และ (4) ประเภทของเนื้อหาเรขาคณิตที่มีผลกระทบต่อสามารถในการคิดเชิงตรรกะและผลสัมฤทธิ์ในการพิสูจน์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจำนวน 1325 คน ที่ลงทะเบียนเรียนเรขาคณิต ซึ่งสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 กลุ่ม คือ หลักสูตรปกติ Regular Course หลักสูตร Honor Course และหลักสูตร Mastery Course นักเรียนกลุ่มตัวอย่างมาจากโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายจำนวน 4 โรงเรียนในระหว่างปี 2004-2005 ในการสอนแบ่งเป็น 2 วิธีคือ ใช้โปรแกรมสำเร็จรูป The Geometers' Sketchpad(GSP)กับไม่ใช้โปรแกรมประกอบการสอน ก่อนสอนทดสอบก่อนเรียนด้วยแบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์และความสามารถในการคิดเชิงตรรกะ เมื่อสิ้นสุดการทดลองสอนทดสอบหลังเรียนโดยใช้แบบทดสอบชุดเดิม

ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่ม Honor Course มีความสามารถในการคิดเชิงตรรกะสูงกว่าอีกสองกลุ่ม และยังพบอีกว่า การใช้ GSP ในการสอนเรขาคณิตส่งผลต่อความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนกลุ่มทดลอง และการฝึกปฏิบัติของนักเรียนมีความสัมพันธ์ทางบวกกับความสามารถในการพิสูจน์และความสามารถในการคิดเชิงตรรกะ

กรอบแนวคิดและสมมุติฐานของการวิจัย

ในการสอนเรขาคณิตต้องคำนึงถึงระดับการคิดตามตัวแบบของแวน ฮีลี ระดับการคิดของแวน ฮีลี มีลักษณะเฉพาะ การจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตจึงต้องคำนึงถึงคุณลักษณะเหล่านี้ได้แก่ เป็นไปตามลำดับขั้น ความก้าวหน้า ความชัดแจ้ง ภาษา การไม่เข้ากัน ถ้าผู้สอนจัดการเรียนการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี ซึ่งมีอยู่ 5 ขั้นได้แก่ การสืบสวนสอบสวน การกำหนดกิจกรรมที่กำหนดทิศทาง การให้การอธิบาย การทำกิจกรรมที่ไม่กำหนดทิศทาง และการบูรณาการ จะช่วยให้ระดับการคิดของผู้เรียนสามารถเลื่อนไปสู่ระดับที่อยู่ถัดไปได้(Crowley. 1987: 4)

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยใช้ตัวแปรอิสระที่เป็นตัวแปรจัดกระทำ ได้แก่ การสอนโดยใช้ลำดับขั้นของแวน ฮีลี และตัวแปรตาม คือ ระดับการคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ดังแสดงในภาพประกอบ 2.1



ภาพประกอบ 2.1 แสดงกรอบความคิดในการวิจัย

จากการศึกษางานวิจัยพบว่าการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี ช่วยให้นักเรียนมีระดับการคิดสูงขึ้น ดังงานวิจัยของ กุลยา เหมวัสดุกิจ(2545) เบญจพร สว่างศรี(2545) โบแบงโก (Bobango. 1987) แมททิวส์ (Mathews. 2004) และทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต /ผลสัมฤทธิ์ในการเขียนการพิสูจน์/ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตสูงขึ้น ดังงานวิจัยของ เยาวเรศ สิงหนันท์ (2533) เบญจพร สว่างศรี (2545) นาตยา น้ำจิตตรง(2546) ฮัน (Han. 1986) โบแบงโก (Bobango. 1987) บุญเสริม ยุพจันทร์ นอกจากนี้ยังพบว่า ระดับการคิด

มีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์(เรขาคณิต)/ผลสัมฤทธิ์ในการเขียนการพิสูจน์/ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ดังงานวิจัยของ พนิดา กองเกตุใหญ่ (2542) สตอเฟอร์ (Stovor. 1989) บอนนี (Bonnie. 1994) แม็คไบรด์ (McBride, 1996) ลี (Lee. 1999) ผู้วิจัยจึงตั้งสมมุติฐานดังนี้

1. นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี แวน ฮีลี จะมีระดับการคิดทางเรขาคณิตที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน

2. นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิต ตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป จะมีจำนวนไม่น้อยกว่าร้อยละ 80 ของนักศึกษาครูทั้งหมด

3. นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี จะมีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน

4. นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม จะมีจำนวนไม่น้อยกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักศึกษาครูทั้งหมด

5. ระดับการคิดทางเรขาคณิตกับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี มีความสัมพันธ์กันทางบวก

บทที่ 3

การดำเนินงานวิจัย

การวิจัยเรื่อง ผลการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีต่อระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบของแวน ฮีลี และความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ เป็นการวิจัยเชิงทดลองเบื้องต้น (Pre - experimental Research) โดยใช้แผนแบบการวิจัยแบบกลุ่มตัวอย่างเดียวทดสอบก่อน-หลัง (One Samples Pretest-Posttest Research Design) ขอนำเสนอวิธีดำเนินการดังต่อไปนี้

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. การเก็บรวบรวมข้อมูล
4. การวิเคราะห์ข้อมูล
5. สถิติที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

1. ประชากร

ประชากรในการวิจัย ได้แก่ นักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2550 จำนวน 58 คน

2. กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 1-2 ภาคเรียนที่ 1ปีการศึกษา 2550 มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ รวมทั้งสิ้น 28 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มอย่างเจาะจง (Purposive Random Sampling)

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยมีดังนี้

1. แบบทดสอบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตที่พัฒนาโดย ยูซิสกิน
2. แผนการสอนโดยใช้ลำดับขั้นการสอนของ ไดนา แวน ฮีลี
3. แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

ซึ่งมีรายละเอียดของเครื่องมือแต่ละฉบับดังนี้

1. **แบบทดสอบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตที่พัฒนาโดย ยูซิสกิน**

แบบทดสอบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตฉบับนี้พัฒนาโดยยูซิสกินเป็นแบบทดสอบแบบปรนัย ชนิดเลือกตอบ 5 ตัวเลือก จำนวน 25 ข้อ ใช้เวลาทดสอบ 35 นาที ซึ่งเป็นแบบทดสอบมาตรฐาน โดยมีเกณฑ์ในการให้คะแนนกำหนดช่วงต่าง ๆ ดังนี้

สำหรับข้อ 1-5 คะแนน 3-5 คะแนน จัดอยู่ในระดับ 1 หรือ 0

สำหรับข้อ 6-10 คะแนน 6-10 คะแนน จัดอยู่ในระดับ 2 หรือ 1

สำหรับข้อ 11-15 คะแนน 9-15 คะแนน จัดอยู่ในระดับ 3 หรือ 2

สำหรับข้อ 16-20 คะแนน 16-20 คะแนน จัดอยู่ในระดับ 4 หรือ 3

สำหรับข้อ 21-25 คะแนน 21-25 คะแนน จัดอยู่ในระดับ 5 หรือ 4

เกณฑ์การให้คะแนนสำหรับแบบทดสอบวัดระดับการคิดที่พัฒนาโดยยูซิสกินจะมีวิธีคิดคะแนนเป็นช่วง ๆ ดังนี้ สำหรับคะแนนข้อ 1 ถึง 5 ถ้าได้คะแนน 0 หรือ 1 หรือ 2 แสดงว่ามีระดับการคิดอยู่ในระดับ 0 แต่ถ้าได้คะแนนตั้งแต่ 3 ขึ้นไปแสดงว่ากำลังก้าวไปสู่ระดับ 1 ให้พิจารณา ข้อที่ 6-10 ถ้าได้คะแนนตั้งแต่ 3 คะแนนขึ้นไปแสดงว่านักเรียนจะมีระดับการคิดอยู่ที่ระดับ 1 แต่ถ้าได้คะแนนน้อยกว่า 3 คะแนน แสดงว่ายังคงมีระดับการคิดอยู่ที่ระดับ 0 และใช้หลักการเดียวกันนี้ในการจัดระดับการคิดในทุกระดับ

ผู้วิจัยได้นำแบบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตของยูซิสกินไปทดลองใช้กับนักศึกษาครูชั้น ปีที่ 3-4 จำนวน 30 คน แล้วนำผลที่ได้มาหาค่าความเที่ยง KR-20 ของคูเดอร์ ริชาร์ดสัน (Kuder Richardson-20) ได้ค่าความเที่ยงเท่ากับ 0.70 แสดงว่าแบบทดสอบฉบับนี้มีความเที่ยงในการวัดระดับการคิดทางเรขาคณิต จึงใช้เป็นแบบวัดระดับการคิดของนักศึกษาครูชั้นปีที่ 1-2 ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่าง (รายละเอียดการคำนวณแสดงในภาคผนวก ก หน้า 98)

2. **แผนการสอนเรขาคณิตโดยใช้ลำดับขั้นการสอนของ ไดนา แวน ฮีลี**

2.1 ลักษณะของแผนการสอน

แผนการสอนเรขาคณิตมีทั้งหมด 2 ชุด คือ แผนการสอนเพื่อเลื่อนระดับการคิด และแผนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

2.1.1 แผนการสอนเรขาคณิตเพื่อเลื่อนระดับการคิด

แผนการสอนเรขาคณิตเพื่อยกระดับการคิด เป็นแผนการสอนเรขาคณิต โดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี เรื่อง รูปเรขาคณิต เพื่อเลื่อนระดับการคิด ซึ่งมีแผนการสอนอยู่ 4 แผน ดังแสดงในตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 แสดงรายละเอียดของแผนการสอนเพื่อเลื่อนระดับการคิด

แผนการสอนที่	เรื่อง	จำนวนคาบ
1	รูปสามเหลี่ยม	3
2	รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน	3
3	รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	3
4	รูปสี่เหลี่ยมคางหมู	3

ในแต่ละแผนการสอนประกอบไปด้วยหัวข้อต่อไปนี้คือ สาระสำคัญ จุดประสงค์การเรียนรู้ เนื้อหา กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการเรียนการสอน และการวัดและประเมินผล

ในส่วนที่เป็นกิจกรรมการเรียนการสอนได้จัดกิจกรรมโดยใช้ลำดับขั้น 5 ขั้น ของ ไดนา แวน ฮีลี ได้แก่ ขั้นที่ 1 ขั้นการสืบสวนสอบสวน ขั้นที่ 2 การทำกิจกรรมที่มีทิศทาง ขั้นที่ 3 การให้การอธิบาย ขั้นที่ 4 การทำกิจกรรมที่ไม่กำหนดทิศทาง ขั้นที่ 5 การบูรณาการ

2.1.2 แผนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

เป็นแผนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ เส้นขนานและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งมีแผนการสอนทั้งหมด 8 แผน รายละเอียดแสดงในตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.2 แสดงรายละเอียดของแผนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

เรื่อง	แผนการสอนที่	เรื่อง	จำนวนคาบ
ความเท่ากันทุกประการ	1	รูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ	3
	2	รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	3
เส้นขนาน	3	เส้นขนาน	3
	4	เส้นขนาน(ต่อ)	3
	5	ผลบวกมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม	3
รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน	6	รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน	3
	7	รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	3
	8	รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน	3

ในแต่ละแผนการสอนประกอบไปด้วยหัวข้อต่อไปนี้คือ สาระสำคัญ จุดประสงค์การเรียนรู้ เนื้อหา กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการเรียนการสอน และการวัดและประเมินผล

ในส่วนที่เป็นกิจกรรมการเรียนการสอนได้จัดกิจกรรมโดยใช้ลำดับขั้น 5 ขั้น ของ ไดนา แวน ฮีลี ได้แก่ ขั้นที่ 1 การสืบสวนสอบสวน ขั้นที่ 2 การทำกิจกรรมที่มีทิศทาง ขั้นที่ 3 การให้การอธิบาย ขั้นที่ 4 การทำกิจกรรมที่ไม่กำหนดทิศทาง ขั้นที่ 5 การบูรณาการ

2.2 การสร้างและพัฒนาแผนการสอน

ในการพัฒนาแผนการสอนทั้ง 2 ชุดผู้วิจัยดำเนินการตามขั้นตอนต่อไปนี้คือ

1) ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี หลักการ เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอน โดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี

2) ศึกษาหลักสูตรเรขาคณิตเบื้องต้น ตามหลักสูตรมหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ พุทธศักราช 2549 ศึกษาค้นคว้าเอกสาร ตำรา และหนังสือเรียนเรขาคณิต ในระดับมัธยมศึกษาและระดับอุดมศึกษา วิทยานิพนธ์ และงานวิจัย เกี่ยวกับระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮีลี และลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี และเนื้อหาเรขาคณิตเรื่อง ความเท่ากันทุกประการ เส้นขนานและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เพื่อนำมาวิเคราะห์จัดหน่วยการเรียนรู้ และจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อนระดับการคิดและการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ให้เป็นไปตามลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี

3) วิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้และเนื้อหาเรื่อง รูปเรขาคณิต ความเท่ากันทุกประการ เส้นขนานและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน นำมาจัดหน่วยการเรียนรู้ โดยแบ่งออกเป็น 2 ชุด คือเนื้อหา เรื่อง รูปเรขาคณิตใช้สำหรับจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อเลื่อนระดับการคิด และเนื้อหา ความเท่ากันทุกประการ เส้นขนานและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ใช้สำหรับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

4) เขียนกำหนดการสอน ต่อจากนั้นนำกำหนดการสอนมาเขียน แผนการสอนโดยจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี ซึ่งมี 5 ขั้น ดังนี้คือ

ขั้นที่ 1 การสืบสวนสอบสวน

ขั้นที่ 2 การทำกิจกรรมที่มีทิศทาง

ขั้นที่ 3 การให้การอธิบาย

ขั้นที่ 4 การทำกิจกรรมที่ไม่กำหนดทิศทาง

ขั้นที่ 5 การบูรณาการ

6) เมื่อผู้วิจัยเขียนแผนการสอนและผลิตสื่อการสอนเสร็จแล้ว จึงตรวจสอบคุณภาพของแผนการสอนด้วยตนเองอีกครั้งแล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข

7) เมื่อปรับปรุงแก้ไขแผนการสอนเสร็จแล้วนำไปทดลองสอนนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 3-4 มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ จำนวน 2 คน เพื่อหาข้อบกพร่องและนำมาปรับปรุงแก้ไขให้เหมาะสมทั้งทางด้านภาษาและเวลาที่ใช้ ก่อนนำไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

2. **แบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต**

2.1 ลักษณะของแบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

แบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเป็นแบบทดสอบแบบความเรียง ในเนื้อหา เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ เส้นขนานและรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จำนวน 7 ข้อ โดยปรับปรุงมาจากแบบทดสอบวัดการพิสูจน์ของ ยูซิสกิน (Usiskin.1982) เยาวเรศ สิงหนันท์ (2533) บุญเสริม ยุพจันทร์ (2547) และแบบฝึกหัดการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของ กุสตาร์ฟและฟริสค์ (Gustafson & Frisk. 1991)

2.2 การสร้างแบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

ในการสร้างข้อสอบดำเนินการสร้างตามลำดับดังนี้

1) ศึกษาวิธีสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต การเขียนข้อสอบและการวัดผล จากเอกสารและตำราต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง

2) วิเคราะห์หลักสูตรและสร้างตารางวิเคราะห์หลักสูตร เพื่อวิเคราะห์เนื้อหาสาระและพฤติกรรมที่ต้องการวัด

3) กำหนดชนิดของแบบทดสอบ โดยผู้วิจัยเลือกใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเป็นแบบทดสอบอัตนัยชนิดเขียนตอบเพื่อให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้และวัยของผู้เรียน โดยเลือกใช้แบบทดสอบแบบความเรียง จำนวน 7 ข้อ

4) เขียนข้อสอบตามรายละเอียดที่กำหนดไว้ในตารางวิเคราะห์หลักสูตร และให้สอดคล้องกับพฤติกรรมการเรียนรู้ โดยเขียนข้อสอบแบบความเรียง จำนวน 7 ข้อ แบ่งเป็น 2 ตอน คือตอนที่ 1ให้เติมข้อความลงในช่องว่างในตารางการพิสูจน์ทางเรขาคณิตจำนวน 4 ข้อ และตอนที่ 2 ให้เขียนแสดงการพิสูจน์ด้วยตนเองจำนวน 5 ข้อ

5) ตรวจทานความสมบูรณ์ ครบถ้วนของข้อสอบตามตารางวิเคราะห์หลักสูตร

6) จัดพิมพ์ข้อสอบฉบับสมบูรณ์

2.3 การหาคุณภาพของแบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

ในการหาคุณภาพของแบบทดสอบ ผู้วิจัยดำเนินการตามลำดับขั้นดังต่อไปนี้

1) ตรวจสอบความตรงเชิงเนื้อหาโดยพิจารณาความสอดคล้องระหว่างเนื้อหา พฤติกรรมการเรียนรู้ และข้อคำถาม โดยผู้วิจัยตรวจสอบด้วยตนเอง

2) แก้ไขปรับปรุงแบบทดสอบให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

3) นำข้อสอบไปทดลองใช้กับนักศึกษาโปรแกรมคณิตศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ (ค.บ. 5 ปี) ชั้นปีที่ 3-4 ที่เรียนอยู่ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2549 จำนวน 2 คน เพื่อหาข้อบกพร่องทางด้านภาษาและเวลาที่ใช้ แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

4) นำแบบทดสอบที่ปรับปรุงแล้วไปทดลองใช้โดยทดสอบนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 2-3 ที่เรียนอยู่ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2549 จำนวน 30 คน

5) นำผลการทดสอบมาหาค่าความยากง่าย และอำนาจจำแนก โดยใช้เทคนิค 25 % โดยใช้สูตรของวิทนีย์และเซเบอร์ (Whitney and Sabers. 1970; อ้างถึงใน พิชิต ฤทธิ์จรูญ. 2545: 149) ได้ค่าความยากง่าย อยู่ระหว่าง 0.64-0.75 และค่าอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.43-0.64 แสดงว่าข้อสอบทุกข้อเป็นไปตามเกณฑ์ สามารถวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้ (รายละเอียดการคำนวณแสดงในภาคผนวก ข หน้า 110)

6) นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไปทดสอบนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 2-3 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2549 อีกครั้ง โดยทิ้งช่วงไปประมาณ 2 เดือน เพื่อหาค่าความเที่ยง(reliability) นำมาหาค่าความเที่ยงโดยวิธีสัมประสิทธิ์แอลฟาของครอนบาค (Cronbach's alpha coefficient; อ้างถึงใน มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช. 2537: 601) ได้ค่าความเที่ยงประมาณ 1.00 แสดงว่าแบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์มีความเที่ยงสูง (รายละเอียดการคำนวณแสดงในภาคผนวก ข หน้า 112)

การเก็บรวบรวมข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล โดยแบ่งเป็น 2 ระยะ ดังนี้

ระยะที่ 1 การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อเลื่อนระดับการคิด ให้แก่นักศึกษาครูที่มีระดับการคิด 0 และ 1

(1) ทดสอบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตเบื้องต้นของนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 1-2 ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่างจำนวน 28 คน โดยใช้แบบทดสอบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตฉบับของยูซิสกิน แบบปรนัยเลือกตอบ 5 ตัวเลือก จำนวน 25 ข้อ จากนั้นนำมาตรวจให้คะแนน โดยตอบถูกได้ 1 ตอบผิดได้ 0 จากนั้นนำคะแนนมาจำแนกระดับการคิด ตามเกณฑ์ดังนี้

ระดับการคิด	คะแนนข้อ 1-5	คะแนนข้อ 6-10	คะแนนข้อ 11-15	คะแนนข้อ 16-20	คะแนนข้อ 21-25
0	ได้ 0-2 คะแนน	ไม่พิจารณา	ไม่พิจารณา	ไม่พิจารณา	ไม่พิจารณา
1	ได้ 3 คะแนนขึ้นไป	ได้ 3 คะแนนขึ้นไป	ไม่พิจารณา	ไม่พิจารณา	ไม่พิจารณา
2	ได้ 3 คะแนนขึ้นไป	ได้ 3 คะแนนขึ้นไป	ได้ 3 คะแนนขึ้นไป	ไม่พิจารณา	ไม่พิจารณา
3	ได้ 3 คะแนนขึ้นไป	ได้ 3 คะแนนขึ้นไป	ได้ 3 คะแนนขึ้นไป	ได้ 3 คะแนนขึ้นไป	ไม่พิจารณา
4	ได้ 3 คะแนนขึ้นไป	ได้ 3 คะแนนขึ้นไป	ได้ 3 คะแนนขึ้นไป	ได้ 3 คะแนนขึ้นไป	ได้ 3 คะแนนขึ้นไป

ผลปรากฏว่านักศึกษาครูมีระดับการคิด อยู่ในระดับ 0 จำนวน 0 คน อยู่ในระดับ 1 จำนวน 19 คน อยู่ในระดับ 2 จำนวน 9 คน

(2) จัดการเรียนการสอนเรขาคณิตตามแผนการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ในเนื้อหาเรื่อง รูปเรขาคณิต ซึ่งแบ่งเป็นเนื้อหาย่อย 4 เรื่อง ได้แก่ รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ใช้เวลาสอน 4 สัปดาห์ ระหว่างวันที่ 13 - 27 มิถุนายน 2550 รวม 12 คาบ

(3) ทดสอบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 1-2 ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่างจำนวน 28 คน ภายหลังจากสิ้นสุดการสอนรูปเรขาคณิต โดยใช้แบบทดสอบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตฉบับของยูซิสกิน (ฉบับเดิม) จากนั้นนำมาตรวจให้คะแนน โดยตอบถูกได้ 1 คะแนน ตอบผิดได้ 0 คะแนน จากนั้นนำคะแนนมาจำแนกระดับการคิดโดยใช้เกณฑ์เดียวกับข้อ (1) ปรากฏว่า นักศึกษามีระดับการคิดในระดับ 3 จำนวน 2 คน ระดับ 2 จำนวน 21 คน อยู่ในระดับ 1 จำนวน 5 คน ส่วนระดับการคิดอยู่ในระดับ 0 ไม่มี ซึ่งข้อมูลนี้ก็คือระดับการคิดทางเรขาคณิตก่อนเรียนของนักศึกษาครูในการวิจัยครั้งนี้

ระยะที่ 2 การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

(1) ทดสอบก่อนเรียนด้วยแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น จากนั้นตรวจให้คะแนนโดยใช้เกณฑ์ในการให้คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ของ มาโลน(Malone. 1980 ; อ้างถึงใน เยาวเรศ สิงหนันท์. 2533: 56) แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 4 คะแนน ดังเกณฑ์ที่แสดงใน ตารางที่ 3.3

ตารางที่ 3.3 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนการพิสูจน์ตามเกณฑ์ของ มาโลน

คะแนน	การเขียนการพิสูจน์
0	1. เขียนเฉพาะสิ่งกำหนดให้หรือสิ่งต้องพิสูจน์อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว 2. ไม่เขียนแผนผังแสดงเหตุผลและไม่เขียนการพิสูจน์เลย 3. เขียนสิ่งที่ไม่เกี่ยวข้อง
1	1. เขียนสิ่งกำหนดให้และสิ่งต้องพิสูจน์ถูกต้อง เขียนแผนผังแสดงเหตุผลหรือเขียนการพิสูจน์อย่างสมเหตุสมผลอย่างน้อย 1 ข้อ
2	1. เขียนสิ่งกำหนดให้และสิ่งต้องพิสูจน์ถูกต้อง 2. เขียนแผนผังแสดงเหตุผลหรือเขียนการพิสูจน์และให้เหตุผลถูกต้องครึ่งหนึ่งของการพิสูจน์ในข้อนั้น 3. เขียนข้อความพิสูจน์ถูกหมดแต่ให้เหตุผลในแต่ละขั้นตอนผิด

คะแนน	การเขียนการพิสูจน์
3	1. เขียนสิ่งกำหนดให้และสิ่งต้องพิสูจน์ถูกต้อง 2. เขียนแผนผังแสดงเหตุผลหรือเขียนการพิสูจน์ผิดเพียงขั้นตอนเดียว 3. เขียนแผนผังแสดงเหตุผลหรือเขียนการพิสูจน์ถูกต้องหมดแต่มีข้อบกพร่องในการใช้สัญลักษณ์ ศัพท์ หรือข้อความของทฤษฎีที่ใช้อ้าง
4	1. เขียนสิ่งกำหนดให้และสิ่งต้องพิสูจน์ถูกต้อง 2. เขียนแผนผังแสดงเหตุผลหรือเขียนการพิสูจน์ถูกต้องทั้งหมดอาจมีข้อบกพร่องในการใช้สัญลักษณ์เพียง 1 แห่ง 3. เขียนการพิสูจน์ถูกต้องทั้งหมดไม่มีข้อผิดพลาดเลย

ที่มา: มาโลน(Malone. 1980; อ้างถึงใน เยาวเรศ สิงหนันท์. 2533: 56)

(2) จัดการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ให้แก่นักศึกษาที่มีระดับการคิดตั้งแต่ระดับ 1 ขึ้นไป ในเนื้อหาเรื่อง 1) ความเท่ากันทุกประการ ซึ่งมีเนื้อหาย่อยคือ รูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการและรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 2) เส้นขนาน แบ่งเนื้อหาย่อยออกเป็น 2 เรื่อง คือ เส้นขนานและผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม 3) รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งแบ่งเป็น 3 เนื้อหาย่อย คือ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ตามแผนการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น จำนวน 8 แผน 24 คาบ ตั้งแต่ 4 กรกฎาคม – 19 ตุลาคม 2550 เป็นเวลา 8 สัปดาห์

(3) เมื่อสิ้นสุดการทดลองสอนทดสอบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูโดยใช้แบบวัดระดับการคิดทางเรขาคณิตฉบับเดียวกับก่อนเรียน ตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ (รายละเอียดของคะแนนอยู่ในภาคผนวกค.) ผลปรากฏว่า นักศึกษามีระดับการคิดอยู่ในระดับ 4 จำนวน 3 คน อยู่ในระดับ 3 จำนวน 5 คน อยู่ในระดับ 2 จำนวน 18 คน อยู่ในระดับ 1 จำนวน 2 คน ส่วนระดับการคิดอยู่ในระดับ 0 ไม่มี ซึ่งข้อมูลนี้ก็คือระดับการคิดทางเรขาคณิตหลังเรียนของนักศึกษาครูใน การวิจัยครั้งนี้

(4) ทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครู โดยใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ฉบับเดียวกับก่อนเรียน ตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ (รายละเอียดของคะแนนอยู่ในภาคผนวก ง หน้า 128)

การวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยได้นำข้อมูลมาวิเคราะห์ ตามวัตถุประสงค์ของการวิจัยดังนี้

1. เปรียบเทียบระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักศึกษาก่อนเรียนและหลังเรียน ใช้วิธีการทดสอบโดยใช้อันดับที่และเครื่องหมายของวิลคอกสัน (Wilcoxon Matched-Paired Signed-Ranks Test) โดยดำเนินการตามลำดับดังนี้

(1) นำผลการทดสอบวัดระดับการคิดหลังการทดลองในระยะที่ 1 มาแปลงเป็นระดับระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮี ลี 5 ระดับ คือ 0 1 2 3 4 โดยถือว่าระดับการคิดทางเรขาคณิตที่แปลงแล้วนี้อยู่ในมาตราการวัดแบบเรียงลำดับ (Ordinal Scale) และผลการจัดระดับนี้มาใช้เป็นระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูก่อนเรียน

(2) นำผลการทดสอบวัดระดับการคิดหลังการทดลองในระยะที่ 2 มาแปลงเป็นระดับระดับการคิดทางเรขาคณิต โดยใช้เกณฑ์และข้อตกลงเดียวกับในข้อ (1) และนำระดับการคิดนี้ไปใช้เป็นระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูหลัง และนำผลการจัดระดับนี้มาใช้เป็นระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูหลังเรียน

(3) ทดสอบความแตกต่างระหว่างระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูก่อนเรียนและหลังเรียน ด้วยวิธีการทดสอบโดยใช้อันดับที่และเครื่องหมายของวิลคอกสัน โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (SPSS for Windows)

2. เปรียบเทียบจำนวนนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีระดับการคิดตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไปไปกับเกณฑ์ร้อยละ 80 ของจำนวนนักศึกษาทั้งหมดโดยใช้การทดสอบไคสแควร์ (Chi-square test) โดยดำเนินการตามลำดับดังนี้

(1) นำผลการวัดระดับการคิดหลังการทดลองในระยะที่ 2 มาจำแนกนักศึกษาครูเป็น 2 กลุ่ม โดยกำหนดตัวแปรขึ้นมาใหม่ คือ กลุ่มที่มีระดับการคิดต่ำกว่า 2 เป็นกลุ่มที่ 1 ใช้ค่าตัวแปรเป็น 0 และกลุ่มที่มีระดับการคิดตั้งแต่ 2 ขึ้นไปเป็นกลุ่มที่ 2 ใช้ค่าตัวแปรเป็น 1

(2) ตั้งเกณฑ์ที่คาดหวังของตัวแปร 1 (ระดับการคิดทางเรขาคณิตตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป) มีค่าเท่ากับ 0.8 และ ตัวแปร 0 (ระดับการคิดทางเรขาคณิตต่ำกว่าระดับ 2) เป็น 0.2

(3) เปรียบเทียบสัดส่วนของนักศึกษาครูที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไปกับเกณฑ์ที่คาดหวัง 0.8 ด้วยวิธีการทดสอบไคสแควร์ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (SPSS for Windows)

3. เปรียบเทียบจำนวนนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็มขึ้นไปกับเกณฑ์ร้อยละ 50 ของนักศึกษาทั้งหมดโดยใช้การทดสอบไคสแควร์ (Chi-square test) โดยดำเนินการตามลำดับดังนี้

(1) นำผลการวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังการทดลองในระยะที่ 2 มาจำแนกนักศึกษาครูเป็น 2 กลุ่ม โดยกำหนดตัวแปรขึ้นมาใหม่เป็นมาตรานามบัญญัติ (Nominal Scale) คือ กลุ่มที่ 1มีคะแนนต่ำกว่า 15 ใช้ค่าตัวแปรเป็น 1 และกลุ่มที่ 2 มีคะแนนตั้งแต่ 15 คะแนนขึ้นไป ใช้ค่าตัวแปรเป็น 2 ตั้งเกณฑ์ที่คาดหวังของตัวแปร 2 (คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็มขึ้นไป) เป็น 0.5 และตัวแปร 1 2 (คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ต่ำกว่าร้อยละ 60) เป็น 0.5

(2) เปรียบเทียบสัดส่วนของนักศึกษาครูที่มีความสามารถในการพิสูจน์ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็มขึ้นไป กับเกณฑ์ที่คาดหวัง 0.5 ด้วยวิธีการทดสอบไคสแควร์ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (SPSS for Windows)

4. เปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อนเรียนและหลังเรียนของนักศึกษาครู โดยนำผลการทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูก่อนเรียนและหลังเรียนมาทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ย ด้วยวิธีการทดสอบทีกรณีกลุ่มตัวอย่างไม่เป็นอิสระต่อกัน(t-test for Dependent Samples) โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (SPSS for Windows)

5. วิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างระดับการคิดทางเรขาคณิตกับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (SPSS for Windows) ด้วยการคำนวณเป็น 3 วิธี ดังนี้

5.1 วิธีสหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน (Pearson Moment Product Correlation) โดยถือว่าระดับการคิดทางเรขาคณิตเป็นตัวแปรที่มีระดับการวัดอยู่ในมาตราอันตรภาค (Interval Scale) เนื่องจากแบ่งระดับคะแนนเป็น 5 ระดับ คือ 0 1 2 3 4 ส่วนคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก็เป็นตัวแปรที่มีระดับการวัดอยู่ในมาตราอันตรภาค (Interval Scale) เช่นเดียวกัน

5.2 วิธีสหสัมพันธ์แบบสเปียร์แมน (Spearman Rank Correlation) โดยถือว่าระดับการคิดทางเรขาคณิตเป็นตัวแปรที่มีระดับการวัดอยู่ในมาตราเรียงลำดับ (Ordinal Scale) เรียงลำดับคะแนนเป็น 5 ลำดับ คือ 0 1 2 3 4 ส่วนคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตนำมาแปลงเป็นมาตราเรียงลำดับ (รายละเอียดการแปลงคะแนนอยู่ในภาคผนวก หน้า ฉ หน้า 135) จากคะแนนความสามารถในการพิสูจน์มีคะแนนเต็ม 25 คะแนน จึงกำหนดเกณฑ์ในการจัดลำดับคะแนนดังนี้

20.00-25.00 คะแนน คิดเป็น 4

17.50-19.75 คะแนน คิดเป็น 3

15.00-17.25 คะแนน คิดเป็น 2

12.50-14.75 คะแนน คิดเป็น 1

0.00-12.25 คะแนน คิดเป็น 0

5.3 วิธีสหสัมพันธ์แบบเอตา (Eta Correlation) โดยถือว่าระดับการคิดทางเรขาคณิตเป็นตัวแปรที่มีระดับการวัดอยู่ในมาตรานามบัญญัติ (Nominal Scale) เนื่องจากนักศึกษาครูเข้ากลุ่มตามระดับคะแนนเป็น 5 กลุ่ม คือ 0 1 2 3 4 ส่วนคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก็ถือว่าเป็นตัวแปรที่มีระดับการวัดอยู่ในมาตราอันตรภาค (Interval Scale) เนื่องจากใช้คะแนนดิบในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์

สถิติที่ใช้ในการวิจัย

1. **สถิติพื้นฐาน** มี 2 ค่า ได้แก่

   1) ค่าเฉลี่ย

   2) ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

2. **สถิติที่ใช้ในการหาคุณภาพของเครื่องมือ**

   1) ค่าความยากง่ายและค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของวิทนีย์ และ เซเบอร์ (Whitney and Saber; อ้างถึงใน พิชิต ฤทธิ์จรูญ. 2545: 149) คำนวณจากสูตร

(1) ดัชนีค่าความยากง่ายใช้สูตร $$P_D = \frac{S_U + S_L - (2NX_{min})}{2N(X_{max} - X_{min})}$$

(2) ดัชนีค่าอำนาจจำแนกใช้สูตร $$D = \frac{S_U + S_L}{N(X_{max} - X_{min})}$$

เมื่อ P_D แทน ดัชนีค่าความยากง่าย

D แทน ดัชนีค่าอำนาจจำแนก

S_U แทน ผลรวมของคะแนนกลุ่มเก่ง

S_L แทน ผลรวมของคะแนนกลุ่มอ่อน

N แทน จำนวนผู้เข้าสอบกลุ่มเก่งหรือกลุ่มอ่อน

X_{max} แทน คะแนนที่ผู้สอบทำได้สูงสุด

X_{min} แทน คะแนนที่ผู้สอบทำได้ต่ำสุด

(3) ค่าความเที่ยงของแบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยการหาสัมประสิทธิ์แอลฟา(α-Coefficient)ของครอนบาค(Cronbach; อ้างถึงใน พิชิต ฤทธิ์จรูญ. 2545: 158) จากสูตร

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left[1-\frac{\sum s_i^2}{s_t^2}\right]$$

เมื่อ α หมายถึง สัมประสิทธิ์ความเที่ยง(สัมประสิทธิ์แอลฟา)

n หมายถึง จำนวนข้อสอบ

s_i^2 หมายถึง ความแปรปรวนของคะแนนในแต่ละข้อ

s_t^2 หมายถึง ความแปรปรวนของคะแนนรวมทั้งฉบับ

3. สถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมุติฐาน

1) การเปรียบเทียบระดับการคิดทางเรขาคณิตก่อนและหลังเรียนของนักศึกษาครูใช้วิธีการทดสอบโดยใช้อันดับที่และเครื่องหมายของ วิลคอกสัน (Wilcoxon Matched-Paired Signed-Ranks Test)

2) การเปรียบเทียบจำนวนนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮีลี ตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป กับเกณฑ์จำนวนร้อยละ 80 โดยใช้การทดสอบไคสแควร์ (Chi-square Test)

3) การเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อนและหลังเรียนของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ใช้การทดสอบทีกรณีกลุ่มตัวอย่างไม่เป็นอิสระแก่กัน (t-test for dependent samples)

4) การเปรียบเทียบจำนวนนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ของนักศึกษาครูที่มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม กับเกณฑ์จำนวนร้อยละ 50 โดยใช้การทดสอบไคสแควร์ (Chi-square Test)

5) การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างระดับการคิดทางเรขาคณิตกับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยใช้สัมประสิทธ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน (Pearson Moment Product Correlation) สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบสเปียร์แมน (Spearman Rank Correlation) และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเอตา (Eta Correlation)

ในการวิเคราะห์ข้อมูลทั้ง 5 ข้อ ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (Statistical Package for Social Science Research for Windows)

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยเรื่อง ผลการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีต่อระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบของแวน ฮีลี และความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ มีวัตถุประสงค์การวิจัย 5 ข้อ ซึ่งผู้วิจัยขอนำเสนอผลการวิจัยตามวัตถุประสงค์ของการวิจัย โดยแบ่งออกเป็น 5 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการเปรียบเทียบระดับการคิดทางเรขาคณิตก่อนเรียนกับหลังเรียนของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี

ตอนที่ 2 ผลการศึกษาจำนวนนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป

ตอนที่ 3 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อนเรียนกับหลังเรียนของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี

ตอนที่ 4 ผลการศึกษาจำนวนนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็มขึ้นไป

ตอนที่ 5 ผลการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับการคิดทางเรขาคณิตกับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอน โดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี

ตอนที่ 1 ผลการเปรียบเทียบระดับการคิดทางเรขาคณิตก่อนเรียนกับหลังเรียนของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี

ผู้วิจัยวิเคราะห์ข้อมูลเป็น 2 ส่วน ส่วนที่ 1 เป็นการแจกแจงความถี่ของนักศึกษาครูตามระดับการคิดทางเรขาคณิตในแต่ละขั้นตอนของการวิจัย แสดงดังตารางที่ 4.1 ส่วนที่ 2 เป็นการเปรียบเทียบระดับการคิดก่อนเรียนและหลังเรียนของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี โดยนำระดับการคิดทางเรขาคณิตก่อนเรียน (ทดสอบหลังจากการสอนรูปเรขาคณิตในระยะที่ 1) และระดับการคิดทางเรขาคณิตหลังเรียน (ทดสอบหลังจากการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต) มาเปรียบเทียบกัน โดยใช้วิธีการทดสอบโดยใช้อันดับที่และเครื่องหมายของวิลคอกสัน โดยถือว่าตัวแปรระดับการคิดทางเรขาคณิตเป็นตัวแปรเรียงลำดับ และกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มไม่เป็นอิสระจากกัน (ดูรายละเอียดในภาคผนวก ค หน้า 125) แสดงดังตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.1 แสดงผลการจำแนกระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักศึกษาครู

ระดับการคิดทางเรขาคณิต	จำนวนเดิม	จำนวนก่อนเรียน	จำนวนหลังเรียน
ระดับ 0	-	-	-
ระดับ 1	19	5	2
ระดับ 2	9	21	18
ระดับ 3	-	2	5
ระดับ 4	-	-	3
รวม	28	28	28

จากตารางที่ 4.1 พบว่า ก่อนการทดลองนักศึกษาครูมีระดับการคิดทางเรขาคณิตเดิมอยู่ในระดับ 1 จำนวน 19 คน และอยู่ในระดับ 2 จำนวน 9 คน ภายหลังการสอนรูปเรขาคณิตโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี นักศึกษาครูมีระดับการคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 ลดลงเหลือจำนวนเพียง 5 คน อยู่ในระดับ 2 จำนวน 21 คน เพิ่มขึ้นจากเดิม 12 คน และอยู่ในระดับ 3 จำนวน 3 คน ซึ่งเป็นจำนวนที่เพิ่มขึ้นจากเดิมทั้ง 3 คน ภายหลังจากการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี นักศึกษาครูที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 มีจำนวนลดลงเหลือเพียง 2 คน อยู่ในระดับ 2 จำนวน 18 คน อยู่ในระดับ 3 จำนวน 5 คน และอยู่ในระดับ 4 จำนวน 3 คน ในจำนวนนี้พบว่ามีนักศึกษาครูที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงขึ้นกว่าก่อนเรียน จำนวน 9 คน พิจารณาได้จากผลการวิเคราะห์ข้อมูลในตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 แสดงผลการเปรียบเทียบระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ก่อนเรียนและหลังเรียน

ระดับการคิดทางเรขาคณิต	จำนวนรวมทั้งหมด	จำนวนรวมตามเครื่องหมาย			Z	Sig.
		บวก	ลบ	ไม่เปลี่ยนแปลง		
ก่อน - หลัง	28	-	9	19	2.762	.003*

* $p < .05$

จากตารางที่ 4.2 พบว่า นักศึกษาครูที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงขึ้นกว่าก่อนเรียน มีจำนวน 9 คน ระดับการคิดทางเรขาคณิตหลังเรียนเท่ากับก่อนเรียน มีจำนวน 19 คน ผลการทดสอบได้ค่า Z = 2.762 และ Sig. = .003 ซึ่งน้อยกว่า .05 แสดงว่านักศึกษาครูมีระดับการคิดทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตอนที่ 2 ผลการศึกษาจำนวนนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิต ตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป

จากผลการวิจัยพบว่าจำนวนนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิต ตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป มีจำนวน 26 คน คิดเป็นร้อยละ 92.9 ของจำนวนนักศึกษาทั้งหมด นำไปเปรียบเทียบกับเกณฑ์จำนวนที่คาดว่า นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นการสอนของ แวน ฮีลี ที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิต ตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป จะมีจำนวนไม่น้อยกว่าร้อยละ 80 ของนักศึกษาทั้งหมด โดยใช้การทดสอบไคสแควร์ (ดูรายละเอียดในภาคผนวก ง หน้า 128) ผลการวิเคราะห์ข้อมูลแสดงในตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 แสดงผลการเปรียบเทียบจำนวนนักศึกษาที่มีระดับการคิดตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไปกับเกณฑ์จำนวนร้อยละ 80

ระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบของแวน ฮี ลี	**จำนวนนักศึกษาตามสังเกต**	**จำนวนนักศึกษาตามคาดหวัง**	χ^2	Sig.
ตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป	26 (92.9 %)	22.40 (80%)	2.89*	.045*
ต่ำกว่าระดับ 2	2 (7.1 %)	5.6 (20%)		

* $p < .05$

จากตารางที่ 4.3 พบว่า นักศึกษาที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลีที่มีระดับการคิด ตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป มีจำนวน 26 คน คิดเป็นร้อยละ 92.9 ของนักศึกษาทั้งหมด ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ นั่นคือไม่น้อยกว่าเกณฑ์จำนวนร้อยละ 80 เป็นไปตามสมมุติฐานข้อ 2

ตอนที่ 3 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนกับก่อนเรียน ของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี

ผู้วิจัยได้วัดความสามารถในการพิสูจน์ของนักศึกษาครูก่อนเรียนเนื้อหาการพิสูจน์ทางเรขาคณิต หลังจากนั้นทดลองสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ในเนื้อหาการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เมื่อสิ้นสุดการสอนวัดความสามารถในการพิสูจน์อีกครั้ง โดยใช้แบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตฉบับเดียวกัน นำผลที่ได้มาเปรียบเทียบความแตกต่างโดยใช้การทดสอบแบบที กรณีกลุ่มตัวอย่างไม่เป็นอิสระต่อกัน (ดูรายละเอียดในภาคผนวก จ หน้า 133) ผลการวิเคราะห์ข้อมูลแสดงในตาราง ที่ 4.4

ตารางที่ 4.4 แสดงผลการเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ก่อนเรียนและหลังเรียน

ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต	จำนวน(N)	ค่าเฉลี่ย($\bar{X}$)	S.D.	t	Sig.
ก่อนเรียน	28	1.96	1.732	3.286	.0015*
หลังเรียน	28	16.57	5.238		

*$p < .05$

จากตารางที่ 4.4 พบว่า ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อนเรียนและหลังเรียนของนักศึกษาครู มีคะแนนเฉลี่ย 1.96 คะแนน และ 16.57 คะแนน ตามลำดับ ได้ค่าสถิติทดสอบทีเท่ากับ 3.286 ที่ระดับนัยสำคัญ .0015 แสดงว่านักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 เป็นไปตามสมมุติฐานข้อ 3

ตอนที่ 4 ผลการศึกษาจำนวนนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็มขึ้นไป

จากผลการวิจัยพบว่านักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม (15 คะแนนขึ้นไป) มีจำนวน 16 คน คิดเป็นร้อยละ 57.1 ของนักศึกษาทั้งหมด จากนั้นนำไปทดสอบว่า จำนวนร้อยละ 57.1 เท่ากับหรือมากกว่าร้อยละ 50 ของนักศึกษาทั้งหมดหรือไม่ โดยใช้การทดสอบไคสแควร์ (ดูรายละเอียดในภาคผนวก ง หน้า 130) ผลการศึกษาแสดงในตารางที่ 4.5

ตารางที่ 4.5 แสดงผลการเปรียบเทียบนักศึกษาที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไป กับเกณฑ์จำนวนร้อยละ 50

ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต	จำนวนนักศึกษาตามที่สังเกตได้	จำนวนนักศึกษาตามที่คาดหวัง	χ^2	Sig.
คะแนนไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 (15 คะแนน ขึ้นไป)	15 (53.57 %)	14 (50 %)	0.58	.35
คะแนนต่ำกว่าร้อยละ 60 (ต่ำกว่า 15 คะแนน)	13 (46.43 %)	14 (50 %)		

จากตารางที่ 4.5 พบว่า นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวน 15 คน คิดเป็นร้อยละ 53.57 ซึ่งไม่แตกต่างกับเกณฑ์ที่คาดหวังไว้ร้อยละ 50 หรือเท่ากับร้อยละ 50 ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานข้อ 4

ตอนที่ 5 ผลการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับการคิดทางเรขาคณิตกับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี

ผู้วิจัยนำคะแนนระดับการคิดทางเรขาคณิตและคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูมาหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ 3 วิธี คือ

(1) ใช้วิธีสหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน (Pearson Moment Product Correlation) โดยถือว่าคะแนนระดับการคิดทางเรขาคณิตเป็นมาตราอันตรภาค (Interval Scale) และคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเป็นมาตราอันตรภาค (ใช้คะแนนดิบ)

(2) ใช้วิธีสหสัมพันธ์แบบสเปียร์แมน (Spearman Rank Correlation) โดยถือว่าคะแนนระดับการคิดทางเรขาคณิตเป็นมาตราเรียงลำดับ (Ordinal Scale) และนำคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตมาแปลงเป็นมาตราเรียงลำดับ 5 ลำดับ คือ 0 1 2 3 4

(3) ใช้วิธีสหสัมพันธ์แบบเอตา (Eta Correlation Coefficient)) โดยถือว่าคะแนนระดับการคิดทางเรขาคณิตเป็นมาตรานามบัญญัติ (Nominal Scale) และคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเป็นมาตราอันตรภาค (ใช้คะแนนดิบ)

(รายละเอียดวิเคราะห์ความสัมพันธ์อยู่ในภาคผนวก ฉ หน้า 136) ผลการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ แสดงในตารางที่ 4.6

ตารางที่ 4.6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระดับการคิดทางเรขาคณิตกับความสามารถในการพิสูจน์ของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี

แบบของสหสัมพันธ์	ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์	ระดับนัยสำคัญ (Sig.)
1. **เพียร์สัน** (r)	.401	.034*
2. **สเปียร์แมน** (ρ)	.476	.010*
3. **เอตา** (Eta)	.443	

* $p < .05$

จากตารางที่ 4.5 พบว่า ระดับการคิดทางเรขาคณิตกับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตมีความสัมพันธ์กันทางบวกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 โดยมีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน เท่ากับ .401 สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบของสเปียร์แมนเท่ากับ .476 และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเอตา เท่ากับ .443

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

ในการวิจัยเรื่อง ผลการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีต่อ ระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบแวน ฮีลีและความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ ในครั้งนี้ ผู้วิจัยขอสังเขปงานวิจัยและนำเสนอสรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ ดังนี้

ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ ได้แก่ นักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 1-4 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2550 จำนวน 58 คน

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองนครั้งนี้ ได้แก่ นักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 1-2 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2550 จำนวน 28 คน

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ดังต่อไปนี้คือ

1. เพื่อเปรียบเทียบระดับการคิดทางเรขาคณิตก่อนเรียนกับหลังเรียนของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี
2. เพื่อศึกษาจำนวนนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี ที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี อยู่ในระดับ ตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป
3. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อนเรียนกับหลังเรียนของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี
4. เพื่อศึกษาจำนวนนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็มขึ้นไป
5. เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับการคิดทางเรขาคณิตกับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี

สมมุติฐานในการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้มีสมมุติฐานการวิจัยดังนี้

1. นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี แวน ฮีลี จะมีระดับการคิดทางเรขาคณิตที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน

2. นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิต ตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป จะมีจำนวนไม่น้อยกว่าร้อยละ 80 ของนักศึกษาครูทั้งหมด

3. นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี จะมีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน

4. นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม จะมีจำนวนไม่น้อยกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักศึกษาครูทั้งหมด

5. ระดับการคิดทางเรขาคณิตกับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี มีความสัมพันธ์กันทางบวก

การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้

ผู้วิจัยได้นำข้อมูลมาวิเคราะห์ ตามวัตถุประสงค์ของการวิจัยดังนี้

1. เปรียบเทียบระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักศึกษาก่อนเรียนและหลังเรียน ใช้วิธีการทดสอบโดยใช้อันดับที่และเครื่องหมายของวิลคอกสัน (Wilcoxon Matched-Paired Signed-Ranks Test) โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (SPSS for Windows)

2. เปรียบเทียบจำนวนนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีระดับการคิดตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไปไปกับเกณฑ์ร้อยละ 80 ของจำนวนนักศึกษาทั้งหมดโดยใช้การทดสอบไคสแควร์ (Chi-square test) โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (SPSS for Windows)

3. เปรียบเทียบจำนวนนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็มขึ้นไปกับเกณฑ์ร้อยละ 50 ของนักศึกษาทั้งหมดโดยใช้การทดสอบไคสแควร์ (Chi-square test) โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (SPSS for Windows)

4. เปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อนเรียนและหลังเรียนของนักศึกษาครู โดยนำคะแนนเฉลี่ยของผลการสอบก่อนเรียนและหลังเรียนมาทดสอบ โดยใช้การทดสอบทีกรณีกลุ่มตัวอย่างไม่เป็นอิสระต่อกัน(t-test for Dependent Samples) ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (SPSS for Windows)

5. วิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างระดับการคิดทางเรขาคณิตกับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (SPSS for Windows) ด้วยการคำนวณเป็น 3 วิธี คือ วิธีสหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน (Pearson Moment Product Correlation) วิธีสหสัมพันธ์แบบสเปียร์แมน (Spearman Rank Correlation) และวิธีสหสัมพันธ์แบบเอตา (Eta Correlation)

สรุปผลการวิจัย

ผลการวิจัยครั้งนี้สรุปได้ดังนี้

1. นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี มีระดับการคิดทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานข้อที่ 1

2. นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป มีจำนวนร้อยละ 92.9 ของนักศึกษาทั้งหมด นั่นคือมีจำนวนไม่น้อยกว่าร้อยละ 80 ของนักศึกษาครูทั้งหมด ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานข้อ 2

3. นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 เป็นไปตามสมมุติฐานข้อ 3

4. นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไป มีจำนวนร้อยละ 53.57 ไม่น้อยกว่าเกณฑ์จำนวนร้อยละ 50 เป็นไปตามสมมุติฐานข้อ 4

5. ระดับการคิดทางเรขาคณิตกับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี มีความสัมพันธ์กันทางบวกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ โดยมีค่าสัมประสิทธิ์ สหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน เท่ากับ .401 สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบของสเปียร์แมนเท่ากับ .476 และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเอตา เท่ากับ .443

อภิปรายผลการวิจัย

จากผลการวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยขออภิปรายผลตามผลการวิจัยดังต่อไปนี้

1. จากผลการวิจัยข้อ 1 ที่พบว่านักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี มีระดับการคิดทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานข้อที่ 1 ทั้งนี้อาจเป็นเพราะว่าในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของแวน ฮีลี เป็นไปตามลำดับขั้นการเรียนรู้คือนักศึกษามีโอกาสได้ทำกิจกรรมที่หลากหลายเช่น

การตัดรูป การพับรูป การสร้างรูป การค้นหาสมบัติของรูปต่าง ๆ ด้วยตนเอง ทำให้มีความเข้าใจสมบัติของรูป มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างรูป นอกจากนี้ยังมีโอกาสได้แสดงการพิสูจน์สมบัติของรูปอย่างไม่เป็นทางการอีกด้วย ซึ่งกิจกรรมเหล่านี้จะช่วยให้นักศึกษามีระดับการคิดอยู่ในระดับ 1-2 นอกจากนี้ในการทำกิจกรรมนักศึกษายังได้มีโอกาสร่วมกันแลกเปลี่ยนความคิดเห็นภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่มอีกด้วย กิจกรรมกลุ่มทำให้นักศึกษาเรียนอย่างมีความสุข ไม่ต้องวิตกกังวลว่าจะทำกิจกรรมไม่ได้เพราะได้ช่วยกันทำกิจกรรม และยังทำให้มีความกระตือรือร้นในการเรียน สิ่งเหล่านี้จะช่วยให้นักศึกษามีระดับการคิดทางเรขาคณิตสูงขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดและงานวิจัยของ ไดนา แวน ฮีลี (Din van Hiele. Cited by Crowley. 1987: 5) ที่กล่าวไว้ว่า ระดับการคิดทางเรขาคณิตขึ้นอยู่กับการเรียนการสอนมากกว่าวุฒิภาวะและอายุ การจัดการเรียนการสอนโดยใช้ลำดับขั้น 5 ขั้นของไดนา แวน ฮีลี จะสามารถเลื่อนระดับ การคิดทางเรขาคณิตของผู้เรียนได้

2. จากผลการวิจัยข้อ 2 ที่พบว่านักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป มีจำนวนไม่น้อยกว่าร้อยละ 80 ของนักศึกษาครูทั้งหมด ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานข้อ 2 สามารถอภิปรายผลได้ดังนี้

การที่นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี มากกว่าร้อยละ 80 ของนักศึกษาครูทั้งหมดมีระดับการคิดตามตัวแบบ แวน ฮีลี ตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป อาจเป็นเพราะว่าก่อนที่ผู้วิจัยจะจัดกิจกรรมการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ผู้วิจัยได้จัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี มาก่อนแล้ว จนนักศึกษาส่วนมากมีระดับการคิดอยู่ในระดับ 2 (85.7 %) เมื่อนักศึกษาได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี อีกครั้ง จึงทำให้ระดับการคิดสูงขึ้นหรืออยู่ในระดับ 2 สอดคล้องกับงานวิจัยของ บุญเสริม ยุพจันทร์ (2545) ที่พบว่าการจัดการเรียนการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี จะทำให้นักเรียนที่มีระดับการคิดอยู่ในระดับ 2 มีระดับการคิดหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน จากเหตุผลที่กล่าวมาจึงทำให้นักศึกษามากกว่าร้อยละ80 ของนักศึกษาครูทั้งหมดมีระดับการคิดตามตัวแบบ แวน ฮีลี ตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป

3. จากผลการวิจัยข้อ 3 ที่พบว่านักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 เป็นไปตามสมมุติฐานข้อ 3 สามารถอภิปรายผลได้ดังนี้

การที่นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ ไดนา แวน ฮีลี มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน ทั้งนี้เป็นเพราะนักศึกษาได้ทำกิจกรรมเป็นกลุ่ม เริ่มด้วยกิจกรรมที่เป็นการค้นพบมโนทัศน์ สมบัติ หลักการ ทฤษฎีบทต่าง ๆ จากง่ายไปยาก มีผู้สอนชี้แนะแนวทาง ทำให้มองเห็นแนวทางในการพิสูจน์ ทำให้สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทได้ด้วยตนเองโดยไม่ต้องมีการชี้แนะ เมื่อได้ทำกิจกรรมเช่นนี้ทุกครั้งจะทำให้เกิดการเรียนรู้ ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิด

ของ กันเตอร์และชวาร์บ(Gunter & Schwab. 1995: 367; อ้างถึงใน นวลศรี ชำนาญกิจ . 2544:101) ที่ว่า การเรียนรู้จะเกิดขึ้นได้เมื่อผู้เรียนได้รับความรู้และมีโอกาสฝึกปฏิบัติในการนำความรู้ไปใช้ และนอกจากนี้การเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ทำให้ระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูสูงขึ้น จึงทำให้ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตสูงขึ้นไปด้วย เพราะว่าระดับการคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตมีความสัมพันธ์กันทางบวกดังงานวิจัยของ ยูซิสกิน (Usiskin.1982) สตอเฟอร์ (Stovor,1989) บอนนี (Bonnie, 1994) แม็คไบรด์ (McBride, 1996) ลี (Lee, 1999) และพนิดา กองเกตุใหญ่ (2542) ที่พบว่า ระดับการคิดมีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์(เรขาคณิต)/ผลสัมฤทธิ์ในการเขียนการพิสูจน์/ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

4. จากผลการวิจัยข้อ 4 ที่พบว่านักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตตั้งแต่ร้อยละ 60 มีจำนวนไม่น้อยกว่าเกณฑ์จำนวนร้อยละ 50 ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานข้อ 4 สามารถอภิปรายผลได้ดังนี้

การที่นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ร้อยละ 50 มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม ทั้งนี้อาจเป็นเพราะว่า นักศึกษาครูส่วนมากมีระดับการคิดอยู่ในระดับ 2 มากกว่าร้อยละ 80 ของนักศึกษาทั้งหมดก็จริง แต่ในการวัดระดับการคิดก่อนเรียน พบว่า จำนวนข้อสอบ 5 ข้อนักศึกษาส่วนมากจะทำข้อสอบได้เพียง 3 ข้อเท่านั้น ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักศึกษาส่วนมากมีระดับการคิดอยู่ในระดับ 2 ตอนต้น ๆ ซึ่งนักศึกษาทีมีระดับการคิดอยู่ในระดับ 2 จะมีความเข้าใจการพิสูจน์อย่างไม่เป็นทางการ โอกาสที่จะเลื่อนระดับการคิดไปอยู่ในระดับ 3 ซึ่งเป็นการพิสูจน์ทางเป็นทางการจึงเป็นไปได้ยาก แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์จะเป็นการพิสูจน์อย่างเป็นทางการ ทำให้มีนักศึกษาครูเพียงร้อยละ 50 เท่านั้นที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของไชยสังข์ (Chaiyasang. 1987) ที่พบว่า นักเรียนที่มีระดับการคิดอยู่ในระดับ 3 จะพิสูจน์ได้สมบูรณ์มากกว่านักเรียนที่มีระดับการคิดอยู่ในระดับ 2 และ เซ็งค์ (Senk. 1989) ที่พบว่า นักเรียนที่มีระดับการคิดอยู่ในระดับสูงจะพิสูจน์ได้ดีกว่านักเรียที่มีระดับการคิดในระดับต่ำ

5. จากผลการวิจัยข้อ 5 ที่พบว่าระดับการคิดทางเรขาคณิตกับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี มีความสัมพันธ์กันทางบวกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ สามารถนำมาอภิปรายผลได้ดังนี้

การที่ระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ แวน ฮีลี กับความสามารถในการพิสูจน์ของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี มีความสัมพันธ์กันทางบวก ทั้งนี้อาจเป็นเพราะ นักศึกษาที่มีระดับการคิดทางเรขาคณิตในระดับตั้งแต่ 2 ขึ้นไป จะสามารถเรียนรู้

เกี่ยวกับการให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นทางการและเป็นทางการ ส่งผลให้สามารถแสดงการพิสูจน์ทางเรขาคณิตอย่างไม่เป็นทางการและเป็นทางการได้ ส่วนนักศึกษาที่มีระดับการคิดต่ำกว่าระดับ 2 จะมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับรูป สมบัติของรูป ความสัมพันธ์ระหว่างรูปแต่ยังไม่สามารถให้เหตุผลได้ จึงทำให้ไม่สามารถแสดงการพิสูจน์อย่างไม่เป็นทางการและเป็นทางการได้ จึงทำให้ระดับการคิดทางเรขาคณิตมีความพันธ์ทางบวกกับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สอดคล้องกับงานวิจัยของ บุญเสริม ยุพจันทร์ (2547) พนิดา กองเกตุใหญ่ (2542) ไชยสังข์ (Chaiyasang. 1987) ที่พบว่าระดับการคิดทางเรขาคณิตกับความสามารถในการพิสูจน์มีความสัมพันธ์กัน และงานวิจัยของเซ็งค์ (Seng. 1989) ที่พบว่า นักเรียนที่มีระดับการคิดอยู่ในระดับสูงจะพิสูจน์ได้ดีกว่า นักเรียนที่มีระดับการคิดในระดับต่ำ

ข้อเสนอแนะ

จากการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะเกี่ยวกับงานวิจัยดังนี้

1. **ข้อเสนอแนะทั่วไป**

(1) ในการจัดการเรียนการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี นั้นถึงแม้ว่าจะมีการให้ผู้เรียนทำกิจกรรมเป็นกลุ่ม ผู้สอนก็ต้องให้ผู้เรียนทุกคนได้มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรม จึงจะสามารถเลื่อนระดับการคิดทางเรขาคณิตของผู้เรียนทุกคนได้ ส่วนการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตควรเน้นการทำกิจกรรมกลุ่มให้มากเพื่อไม่ให้ผู้เรียนรู้สึกท้อแท้เวลาทำกิจกรรมไม่ได้

(2) สำหรับการพิสูจน์ทางเรขาคณิตมี่มีการพิสูจน์ได้หลายแบบ ควรให้มีการนำเสนอแนวการพิสูจน์แต่ละแบบที่ผู้เรียนใช้ เพื่อให้คนอื่น ๆ ได้เห็นแนวทางการพิสูจน์ที่หลากหลาย

2. **ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยครั้งต่อไป**

(1) ควรมีการทำวิจัยโดยการนำลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ไปใช้สอนเนื้อหาเรขาคณิต อื่น ๆ เพื่อเลื่อนระดับการคิดและพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหรือความเข้าใจมโนทัศน์ทางเรขาคณิตสำหรับผู้เรียนที่มีระดับการคิดอยู่ในระดับน้อยกว่าหรือเท่ากับระดับ 2

(2) ควรมีการทำวิจัยเพื่อตรวจสอบว่าการสอนเรขาคณิตโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี สามารถเลื่อนระดับการคิดทางเรขาคณิตจากระดับ 3 ไปสู่ระดับ 4 ได้หรือไม่

(3) ควรมีการวิจัยเพื่อตรวจสอบว่าลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี สามารถนำไปใช้สอนเนื้อหาอื่น ๆ เช่น แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ได้หรือไม่ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของผู้เรียนเป็นอย่างไรเมื่อเปรียบเทียบกับการใช้ลำดับขั้นตามปกติ

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กัลยา วานิชย์บัญชา. (มปป.). **การใช้ SPSS for Windows ในการวิเคราะห์ข้อมูล**. พิมพ์ครั้งที่ 6. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

-------. (2549). **สถิติสำหรับงานวิจัย**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

กุลยา เหมวัสดุกิจ. (2545). **ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลี ที่มีต่อระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2**. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ชูศรี วงศ์รัตนะ. (2541). **เทคนิคการใช้สถิติเพื่อการวิจัย**. พิมพ์ครั้งที่ 7. กรุงเทพฯ: เทพเนรมิตการพิมพ์.

นาตยา น้ำจิตตรง. (2546). **การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนระหว่างการสอนที่เน้นลำดับขั้นการเรียนรู้เรขาคณิตของแวนฮีลีโมเดลกับการสอนแบบปกติ**. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

นวลศรี ชำนาญกิจ. (2550, มกราคม-เมษายน). “การทดสอบสมมุติฐานสำหรับหนึ่งกลุ่มตัวอย่าง,” **วารสารวิชาการบัณฑิตศึกษา มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์**. 2(3): 17.

บุญเสริม ยุพจันทร์. (2547). **การพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์เรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยการจัดกิจกรรมตามลำดับขั้นของแวน ฮีลี**. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต.กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนคร.

เบญจพร สว่างศรี. (2545). **การศึกษาผลการสอนเรขาคณิตด้วยลำดับขั้นการสอนของไดอานา แวน ฮีลี ที่มีต่อระดับการคิดทางเรขาคณิตและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่1**. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต.นครสวรรค์: สถาบันราชภัฏนครสวรรค์.

พนิดา กองเกตุใหญ่.(2542). **ระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแบบ แวน ฮีลี ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น ในจังหวัดกาญจนบุรี**. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. นนทบุรี: มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.

พรรณี เหมะสถล. (2547). **การสำรวจระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบของแวน ฮีลี ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์**. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. นครสวรรค์: สถาบันราชภัฏนครสวรรค์.

พิชิต ฤทธิ์จรูญ. (2545). **หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ; เฮ้าส์ ออฟ เคอร์มีสท์.

ยุพิน พิพิธกุล. (2530). **การเรียนการสอนคณิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ: เอดิสัน เพรส โพรดักส์.

ยุพิน พิพิธกุลและปรีชา เนาว์เย็นผล. (2537). **ประมวลสาระชุดวิชาสารัตถะและวิทยวิธีทางวิชาคณิตศาสตร์.** นนทบุรี: มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.

เยาวเรศ สิงหนันท์. (2533). **การเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตระหว่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนรัฐบาลและโรงเรียนเอกชน เขตการศึกษา 6.** วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. (2539). **เทคนิคการวัดผลการเรียนรู้.** กรุงเทพฯ: ภาควิชาการวัดผลและวิจัยการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

วิชาการ, กรม. (2545). **รายงานคุณภาพการศึกษานักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2544.** กรุงเทพฯ: สำนักทดสอบทางการศึกษา กรมวิชาการ.

สุโขทัยธรรมาธิราช, มหาวิทยาลัย. (2537). **เอกสารการสอนชุดวิชา การพัฒนาแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน 24402 หน่วยที่ 8-15.**

สุรินทร์ นิยมางกูร. (2548). **สถิติวิจัย.** กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

ศิริชัย กาญจนวาสี ทวีวัฒน์ ปิตยานนท์ และดิเรก ศรีสุโข. (2540). **การเลือกใช้สถิติที่เหมาะสมสำหรับการวิจัย.** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: พชรกานต์พับลิเคชัน.

Bobango, Janet Christine. (1987). Van Hiele Levels of Geometric Thought and Student Achievement in Standard Content and Proof Writing: The Effect of Phase-Based Instruction. (Online). Available : 2006. http://proquest.umi.com/dissertations/preview all/8727983

Burger, William F. & Michael J. Shaughnessy. (1985, January). "Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry," Journal for Research in Mathematics Education. 17(6): 31-48.

Chaiyasang, Supoth. (1987). "An Investigation into Level of Geometric Thinking and Ability to Construct Proof of Students in Thailand." (Online). Available 2006. http://proquest.umi.com/pqdweb?index=9&did=744231811&SrchMode=1&si

Cook-Bax, Janice Elaine. (1997). "An Investigation of the Differential Effect of Mira Manipulative Use on Secondary Students." Development of Geometric Proof Involving Perpendicular Bisectors in Polygon, Dissertation Abstracts International, 57(12): 5088-A.

Crowley, Mary L. (1987). "The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought." in Learning and Teaching Geometry: K-12. (Yearbook). Edited by Mary Montgomery Linquist & Albert P. Shulie. p. 1-16. Reston, Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics.

Dickinson, G.A. (1967). **Geometry.** London : Whitefriars Press.

Elchuck, Larry M., (1992). **The Effects of Software Type, Mathematics Achievement, Spatial Visualization, Locus of Control, Independent Time of Investigation, and van Hiele on Geometric Conjecturing Ability.** (Online). Available 2006.: http://proquest.umi.com/pqdweb?index=5&did=747179501&SrchMode=1&si

Finnel, Linda. (1993, February). " Metacognition and the van Hiele Model of Thinking in Geometry," Dissertation Abstracts International. 53(8) : 2722 A – 2723 A.

Fuys, David., Geddes, Dorothy. & Tischler, Rosamond. (1988). "The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescent," Journal for Research in Mathematics Education. Monograph Number 3. Reston ,Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics.

Good, Carter V. (1973). **Dictionary of Education.** 3rd (ed.) New York : McGraw-Hill.

Gustafson, David R. & Peter D. Frisk. (1991). **Elementary Geometry.** 3rd (ed.) New York : John Wiley & Son.

Gutierrez, Angel., Adela Jaime & Jose M. Fortuny. (1991, May). "An Alternative Paradigm to Evaluate the Acquisitions of the Van Hiele Levels," Journal for Research in Mathematics Education. 22(3) : 237-251.

Han, Tae-Sik. (1986). The Effects on Achievement and Attitude of a Standard Geometry Textbook and a Textbook Consistent with the Van Hiele Theory. (Online). Available 2006.: http://proquest.umi.com/dissertations/preview all/8628106.

Hatfield, Mary M., Nancy Tanner Edwards. & Gary G. Bitter (1993). Mathematics Methods for the Elementary and Middle School. 2^{nd} (ed.) Needham Heights, Massachusettes : Allyn & Bacon.

Hershkowitz, Rina., Maxim Bruckheimer & Shlomo Vinner (1987). "Activities with Teachers Based on Cognitive Research," in Learning and Teaching Geometry : K-12. (Yearbook). Edited by Mary Montgomery Linquist and Albert P. Shulie. p. 222-235. Reston, Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics.

Jurgensen, Ray C., Richard G. Brown & John W. Jurgensen. (1985). Geometry. Boston : Houghton Mifflin.

Kemp, Vicki. (1990). The van Hiele Levels of Geometric Thought and Achievement in Euclidean Geometry among Deaf Undergraduate Students. (Online). Available 2006: http://proquest.umi.com/pqdweb?index=3&did=746900861&SrchMode=1&sid=...

Kennedy, Leonard M. (1985, September). "Geomerty - More Than a Holiday Prelude," Arithmetic Teacher. 33(1) : 2.

Kerlinger, Fred N. (1981). Foundation of Behavioral Research. 2^{nd} (ed.) Tokyo : Holt-Saunder Japan.

Kipfinger, Mary Elizabeth. (1990). A Comparison of Two Methods of Teaching Geometry at the Middle School Level as Influenced by The van Hiele Model. Dissertation Abstracts International. 28(4): 488-A, 1990.

Lewellen and Hester. (1992). Conceptualizations of Geometric Motions in Elementary School Children: An Extension of the van Hiele Model. (Online). Available 2006: http://proquest.umi.com/pqdweb?index=0&did=744678571&SrchMode=1 &sid=t&Fmt=&...

Mathew, Nancy Frimel. (2004). A Comparison of Mira Phased – Based Instruction, Textbook Instruction, and No Instruction on The van Hiele Levels of Fifth-Grade Students. (Online). Available 2006: http://proquest.umi.com/ pqdweb?index=o&did=790247001&SrchMode=1 &sis=4&Fmt=2.

Mayberry, Joanne. (1983, January). "The Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers," Journal for Research in Mathematics Education. 14(1) : 58-69.

McBride, Bethe Anne. (1996). A Convergent and Discriminant Validity Study of Several Instruments used to Measure and Predict Performance in Formal Geometry. (Online). Available 2006.: http://proquest.umi.com/pqdwebindex=6&did=741874251&SrchMode=6&sid=2&Fmt=2

Moore, R.C. (1990). College Students' Difficulties in Learning to Do Mathematical Proofs.http://proquest.umi.com/pqdweb?index=0&did=790247001&SrchMode 1&sid=...

Morrow, Lorna J. (1993). "Geometry through the Standards." In Implementing the K-8 Curriculum and Evaluation Standards : Readings from the Arithmetic Teachers. Edited by Thomas E. Rowan and Lorna J. Morrow. p. 55-59. Musser, Gary L. & William F. Burger, (1994). Mathematics for Elementary Teacher : A Contemporary Approach. 3 rd (ed.) New York : Macmillan.

Pandiscio, Eric. & Robert E. Orton. (1998, Spring & Summer). "Geometry and Metacognition : An Analysis of Piaget's and van Hiele's Perspectives," Focus on Learning Problems in Mathematics. 20(2&3) : 78–87.

Pimm, David. (1995). Symbols and Meanings in School Mathematics. London : Routledge.

Prevost, Fernand J. (1985, September). "Geometry in the Junior High School," Mathematics Teacher. 78(6): 411-418.

Riding, Richard. & Butterfield, Sue. (1990). **Assessment and Examination in the Secondary School.** New York: Chapman and Hall.

Rowan, Thomas E. (1993). **"Spatial Sense: The Geometry Standards in K-8 Mathematics," in Implementing the K-8 Curriculum and Evaluation Standards** : Readings from the Arithmetic Teachers. Edited by Thomas E. Rowan and Lorna J. Morrow. p. 60-64. Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics.

Senk, Charon Louise. (1983). **Proof-writing Achievement and van Hiele Levels among Secondary School Geometry Students**. (Online). Available: 2006. http://proquest.umi.com/dissertations/preview all/T-28618.

Shaughnessy, Michael J. & William F. Burger. (1985, September). **"Spadework Prior to Deduction in Geometry,"** Journal for Research in Mathematics Education. 78(6): 419-428.

Sherard III, Wade H. (1981, January). **"Why is Geometric a Basic Skill ?,"** Mathematics Teacher. 74(1): 19 – 21.

Smith, Rolland R. (nd.) **"Three Major Difficulties in the Learning of Demonstrative Geometry,"** The Mathematics Teacher. 33(3): 99 –134.

Sonnabend, Thomas. (1993). **Mathematics for Elementary Teachers : an Interactive Approach.** Orlando, Florida: Saunders College.

Stover,Nola Frances. (1989). **An Exploration of Student's Reasoning Ability and van Hiele Levels as Correlates of Proof-Writing Achievement in Geometry.** (Online). Available : 2006. http://proquest.umi.com/pqdweb?index=7&did =7466194&SrchMode=1&sid=2&Fmt=2.

Subramanian, Lalitha. (2005). **An Investigation of Geometry Students' Proving and Logical Thinking Abilities and The Impact of Dynamic Geometry Software on Student Performance.** (Online). Available: 2006. http://proquest.umi.com/pqdweb?index=4&did=982804981&SrchMode=1&sid

Suydam,Marilyn N. (1983). "Logic, Proof, and Problem Solving." in Classroom Ideas from Research on Secondary School Mathematics. Edited by National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Swafford, J. O, G.A Jones and C.A. Thornton. (1997). "Increased Knowledge in Geometry and Instructional Practice." Journal for Research in Mathematics. Education. 28 (July, 1997): 467-483.

Symser, E.M. (1994). **The Effects of the Geometric Supposers: Spatial Ability, van Hiele Levels, and Achievement.** (Online). Available: 2006. http://proquest.umi.com/pqdweb?index=0&did=747268741&SrchMode=1&sid

Taylor, Paul Alan. (1969, September). "Concept Learning Using Positive and Negative Instances in Learning the Classification Scheme of Bloom's Taxonomy," Dissertation Abstracts International. 29(3): 1087- A.

Teppo, Anne. (1991, March). "Van Hiele Levels of Geometric Thought Revisited," Mathematics Teacher. 84(3): 210-217.

The National Council of Supervisors of Mathematics. (1989, September). "Essential Mathematics for the Twenty – First Century : The Position of the National Council of Supervisors of Mathematics," Arithmetic Teacher. 37(1): 44-46.

-------. (1991). **Professional Standards for Teaching Mathematics.** Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics Teppo, Anne. (1991, March). "Van Hiele Levels of Geometric Thought Revisited." Mathematics Teacher. 84(3) : 210-217.

Thomas, David A. (1991). **Children, Teachers and Mathematics.** 2 nd (ed.) Needham Heights, Massachusetts : Allyn and Bacon.

-------. (1992). **Teenagers, Teachers, and Mathematics.** Needham Heights, Massachusettes : Allyn and Bacon.

Thompson, Edward Otis. (1993, February). " Three Methods of Instructional in High School Geometry and the Effects They Have on Achievement, Retention, and Attitude," Dissertation Abstracts International. 53(8) : 2724-A.

Travers, Kenneth J., LeRoy C. Dalton & Katherine P. Layton. (1987). Geometry. River Forest, Illinois: Laidlay Brothers.

Toumasis, Charalampos. (1991, November-December). "Geometry is Motion : A Dynamic Approach to the Teaching of School Euclidean Geometry," The International Journal of Mathematics Education in Science and Technology. 22(2): 229-242.

Usiskin, Zalman. (1987). "Resolving the Continuing Dilemmas in School Geometry." in Learning and Teaching Geometry, K-12. (Yearbook). Edited by Mary Montgomery Linquist & Albert P.Shulie. p. 17-31. Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics.

van Hiele, Pierre M. (1984). "The Problem of Insight in Connection with School Children's Insight into the Subject Matter of Geometry." in English Translation of Selected Writing of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele. Edited by David Fuys, Dorothy Geddes & Rosamond Tischler. Reston, Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics.

van Hiele -Geldof, Dina. (1984). "The Didactics of Geometry in the Lowest Class of Secondary School." in English Translation of Selected Writing of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele. Edited by David Fuys, Dorothy Geddes & Rosamond Tischler. Reston, Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics.

Wells, David W., Leroy C. Dalton & Vincent F. Brunner. (1984). Using Geometry. 2 nd (ed.). River Forest, Illinois : Laidlaw Brothers.

Wheatley, Grayson H. (1998, Spring & Summer). "Imagery and Mathematics Learning," Focus on Learning Problems in Mathematics. 20(2&3) : 65–77.

Wilder, Raymond L. (1963). The Foundation of Mathematics. 7th (ed.) New York: John Wiley & Sons.

Wilson, Patricia S. (1990, April). "Understanding Angles : Wedges to Degree," Mathematics Teacher. 84(4) : 294-296.