



รายงาน

สื่อการเรียนรู้ด้วยตนเองของวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน

Self-Learning Media of Basic Mathematical

โดย

อาจารย์ศศิธร อนันตโสภณ

มหาวิทยาลัยธุรกิจบัณฑิต

ได้รับทุนสนับสนุนจากมหาวิทยาลัยธุรกิจบัณฑิต

คำนำ

เอกสารประกอบการสอนวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานเล่มนี้ จัดทำขึ้นเพื่อให้นักศึกษาใช้ ทบทวนความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ธุรกิจ วิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับธุรกิจ และวิชาแคลคูลัส1 ซึ่งนักศึกษาจะต้องเรียนวิชานี้ในชั้นปีที่หนึ่ง เนื่องจาก มีนักศึกษาลงทะเบียนเรียนเป็นจำนวนมาก และในแต่ละชั้นเรียนมีนักศึกษามากถึง 80 คนต่อกลุ่ม การเรียน ทำให้การดูแลการเรียนการสอนให้ทั่วถึงจึงเป็นไปได้ยาก โดยเฉพาะนักศึกษาที่มี พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ไม่ดีพอ ซึ่งผู้จัดทำได้จัดทำบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน โดยมี เนื้อหาเน้นให้นักศึกษาได้ทบทวนความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ พร้อมกับทำแบบฝึกหัด และ ประเมินผลได้ด้วยตนเอง ซึ่งผู้จัดคิดว่าจะเป็นประโยชน์สำหรับการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ใน ระดับอุดมศึกษาต่อไป

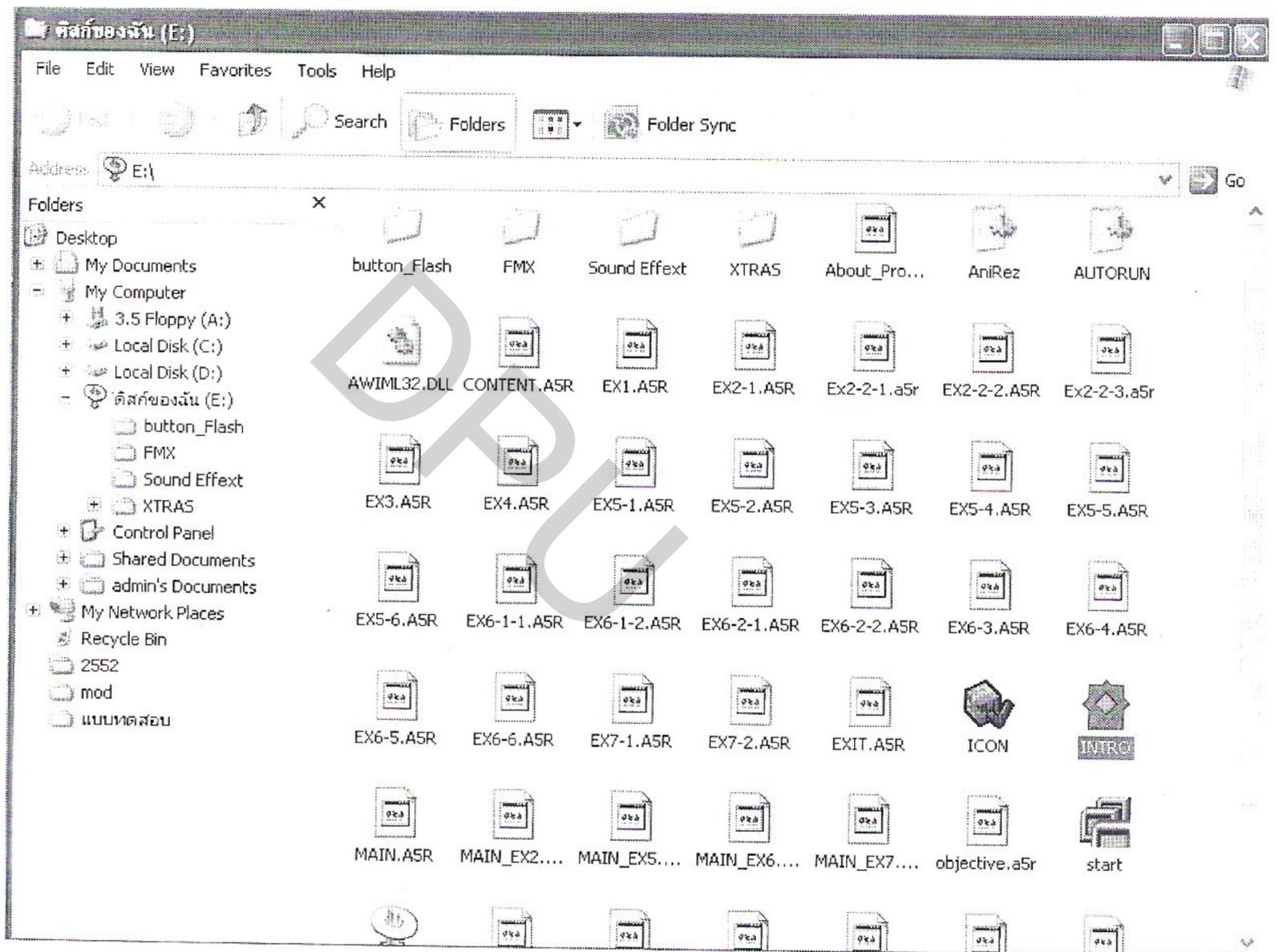
อาจารย์ศศิธร อนันตโสภณ

การใช้โปรแกรมสื่อการเรียน

การใช้โปรแกรมสื่อการเรียนรู้อย่างตนเองของวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน มีขั้นตอนการใช้ที่ไม่ยุ่งยากและมีรายละเอียดในการใช้น้อย ผู้ใช้สามารถเรียนรู้การใช้งานด้วยตนเอง ขั้นตอนเริ่มจาก

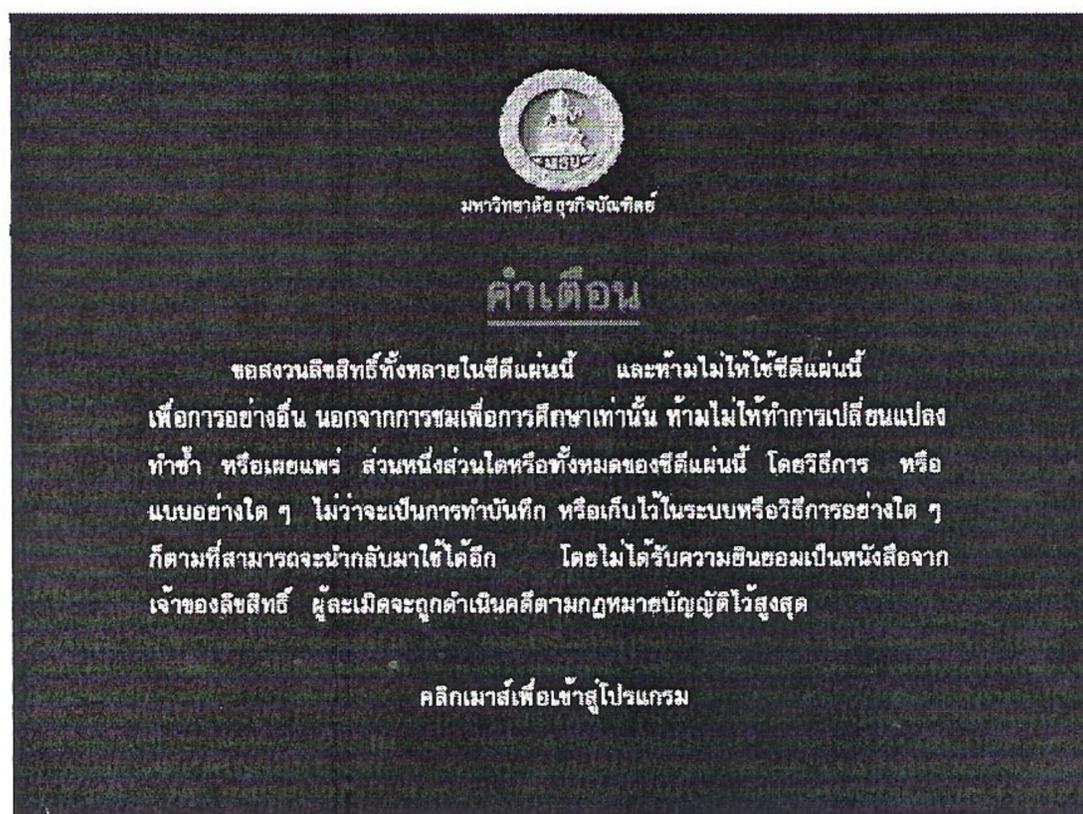
การเข้าสู่โปรแกรม

โปรแกรมจะเข้าสู่หน้าจอแสดงดังรูปที่ 1



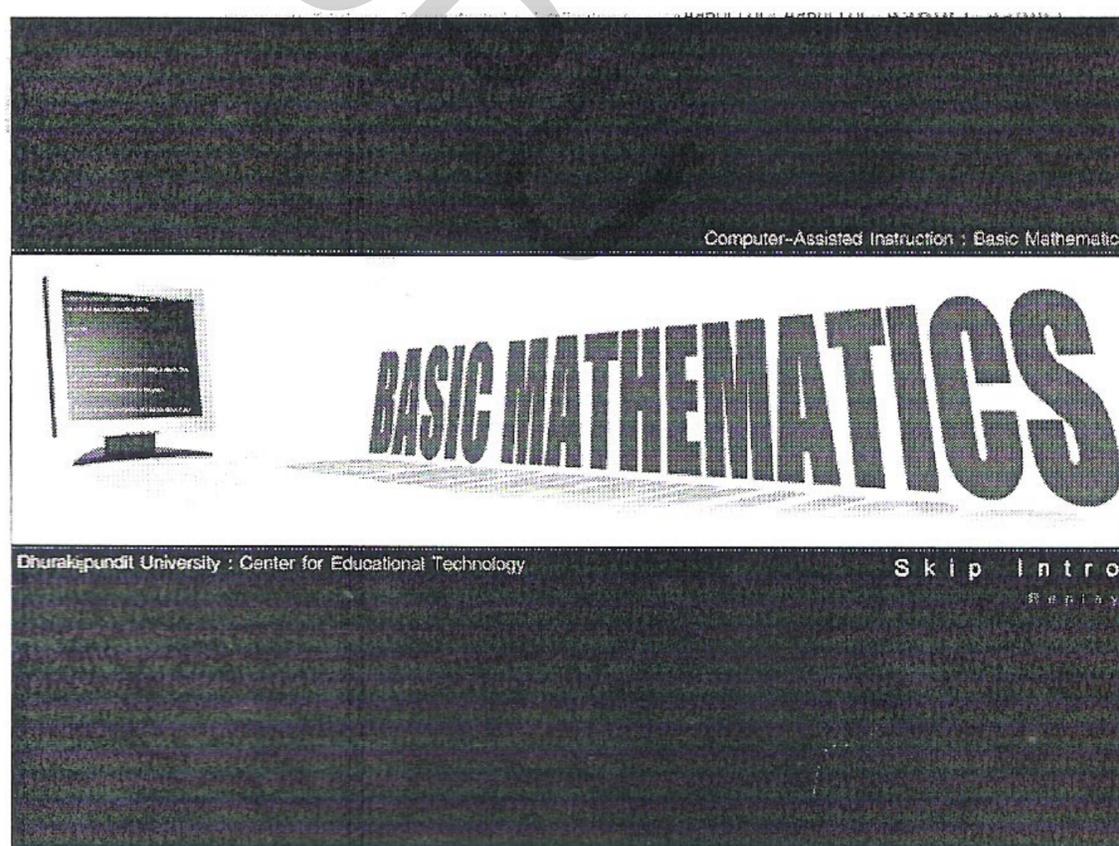
รูปที่ 1

ผู้ใช้นำเมาส์คลิกที่ INTRO จะได้ผลลัพธ์ออกมาดังรูปที่ 2



รูปที่ 2

ผู้ใช้นำเมาส์คลิกที่ “คลิกเมาส์เพื่อเข้าสู่โปรแกรม” จะได้ผลลัพธ์ออกมาดังรูปที่ 3



รูปที่ 3

ผู้ใช้นำเมาส์คลิกที่ " Skip Intro " จะได้ผลลัพธ์ออกมาดังรูปที่ 4



รูปที่ 4

ถ้าผู้ใช้เลือกเข้าสู่บทเรียน ซึ่งก็จะมีรายละเอียดเนื้อหาของเรื่องนั้น ๆ ผู้ใช้สามารถจะเข้าไปที่แบบฝึกหัดได้เลยโดยไม่จำเป็นต้องเข้าไปที่บทเรียนก่อนก็ได้ ในแต่ละแบบฝึกหัดนั้นผู้ใช้สามารถที่จะทราบคะแนนได้เมื่อทำแบบฝึกหัดเสร็จเรียบร้อยแล้ว

วัตถุประสงค์

1. เพื่อให้นักศึกษาได้ทบทวนความรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์
2. เพื่อให้นักศึกษาได้ฝึกทำแบบฝึกหัดและสามารถตรวจคำตอบได้ด้วยตนเอง
3. เพื่อให้นักศึกษาได้เตรียมความพร้อมสำหรับเรียนในวิชาที่ต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐาน

DPU

บทที่ 1

เซต

จุดประสงค์การเรียนรู้ มุ่งให้นักศึกษาสามารถ

1. เขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกหรือแบบบอกเงื่อนไขได้
2. บอกได้ว่าสิ่งที่กำหนดให้เป็นสมาชิกของเซตที่กำหนดให้หรือไม่
3. บอกได้ว่าเซตที่กำหนดให้เป็นเซตว่างหรือไม่
4. บอกได้ว่าเซตที่กำหนดให้เท่ากันหรือไม่
5. เขียนสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์ที่กำหนดให้
6. บอกได้ว่าเซตสองเซตที่กำหนดให้เป็นสับเซตกันหรือไม่
7. แสดงเซตต่างๆ โดยใช้แผนภาพเวเนย์-ออยเลอร์
8. หายูเนียน อินเตอร์เซกชัน คอมพลีเมนต์ ผลต่างระหว่างเซต 2 เซต

DRPU

เซต

1.1 ความหมาย เซต หมายถึง กลุ่ม พวก หมู่ เหล่า ฯลฯ ของชนิดใดชนิดหนึ่งที่มีลักษณะเหมือนกัน เช่น เซต ของนักศึกษามหาวิทยาลัยธุรกิจบัณฑิต

1.2 การเขียนสัญลักษณ์แทนเซต

1.2.1 เขียนโดยการแจกแจงสมาชิก วิธีนี้เขียนสมาชิกทั้งหมดของเซตลงในเครื่องหมายวงเล็บ

ปีกกา และใช้เครื่องหมายจุลภาค “,” คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละสมาชิก เช่น

$$A = \{ \text{วันจันทร์, วันอังคาร, วันพุธ, วันพฤหัสบดี, วันศุกร์, วันเสาร์, วันอาทิตย์} \}$$

อ่านว่าเซต A ประกอบด้วย วันจันทร์ วันอังคาร วันพุธ วันพฤหัสบดี วันศุกร์ วันเสาร์ และ วันอาทิตย์

$$B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

อ่านว่าเซต B ประกอบด้วย 1, 2, 3, 4

ในกรณีที่ไม่สามารถเขียนสมาชิกได้ครบทุกตัวเพราะยาวเกินไป จะใช้จุด สามจุด

“...” แทนสมาชิกส่วนที่เหลือ เช่น

$$A = \{ 1, 2, 3, \dots, 100 \}$$

$$B = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

จากเซต $A = \{1, 2, 3, 4\}$

ในที่นี้ 1 เป็นสมาชิกของเซต A เขียนได้เป็น $1 \in A$

5 ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เขียนได้เป็น $5 \notin A$

การเขียนสมาชิกในเซตโดยวิธีนี้ไม่นับลำดับและไม่เน้นการเขียนซ้ำ

1.2.2 เขียนโดยการบอกเงื่อนไข

$$A = \{x \mid x \text{ เป็นวันในหนึ่งสัปดาห์}\}$$

อ่านว่าเซต A ประกอบด้วยสมาชิกคือ x โดยที่ x เป็นตัวแปรค่าแทนวันต่างๆ ในหนึ่งสัปดาห์

ตัวแปร (Variable) ได้แก่อักษรที่สมมติให้มีค่าต่างๆ ได้หลายค่าในปัญหานั้นๆ

$$A = \{x \mid x \text{ นักศึกษาในคณะบริหารธุรกิจมหาวิทาลัยธุรกิจบัณฑิต}\}$$

อ่านว่า เซต A คือ x โดยที่ x เป็นนักศึกษาในคณะบริหารธุรกิจมหาวิทาลัยธุรกิจบัณฑิต

1.3 เซตว่าง (Empty Set หรือ Null Set) ได้แก่เซตที่ไม่มีสมาชิกอยู่เลยเขียนแทนด้วย \emptyset หรือ $\{ \}$

1.4 การเท่ากันของเซต เซต A เท่ากับเซต B เขียนได้เป็น $A = B$ ถ้าทุกๆ สมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B และทุกๆ สมาชิกของ B เป็นสมาชิกของ A

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{3, 2, 1\}$$

$$C = \{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3\}$$

$$A = B = C$$

$A \neq B$ อ่านว่า เซต A ไม่เท่ากับ เซต B ถ้ามีอย่างน้อยหนึ่งสมาชิกของ A ไม่เป็นสมาชิกของ B หรืออย่างน้อยหนึ่งสมาชิกของ B ไม่เป็นสมาชิกของ A

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{a, 2, 3\}$$

$$A \neq B$$

1.5 เซตย่อย (Subset) เซต A เป็นเซตย่อยของเซต B ถ้าทุกๆ สมาชิกของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B เขียนได้เป็น $A \subset B$ อ่านว่า A เป็นเซตย่อยของ B

ตัวอย่าง $A = \{a, b, c\}$

$$B = \{a, b, c, d\}$$

$$A \subset B$$

$A \not\subset B$ อ่านว่า เซต A ไม่เป็นเซตย่อยของเซต B ถ้ามีอย่างน้อย 1 สมาชิกในเซต A

ไม่

ได้เป็นสมาชิกในเซต B

ตัวอย่าง $A = \{a, b, c\}$

$$B = \{1, 2, 3, b, c\}$$

$$A \not\subset B \text{ และ } B \not\subset A$$

เซตทุกเซตเป็นเซตย่อยของตัวเอง เซตว่างเป็นเซตย่อยของทุกเซต

A เป็นเซตย่อยแท้ของ B ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $A \neq B$

1.6 การดำเนินการระหว่างเซต (Operations with Sets) การดำเนินการระหว่างเซตเป็นการสร้างเซตใหม่จากเซตที่กำหนดให้

1.6.1 ยูเนียน (Union) A ยูเนียน B เขียนแทนด้วย $A \cup B$ ได้แก่เซตที่ทุกๆ สมาชิกอยู่ใน A หรืออยู่ใน B หรืออยู่ทั้งใน A และ B

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$$

ตัวอย่าง $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$B = \{a, b, c\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c\}$$

$$B \cup A = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

ข้อควรจำ สำหรับเซต A และ B ใดๆ

1. $A \cup \phi = A$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $A \subset A \cup B$
4. $B \subset A \cup B$
5. $A \cup A = A$

1.6.2 อินเตอร์เซกชัน (Intersection)

A อินเตอร์เซกชัน B เขียนแทนด้วย $A \cap B$ ได้แก่เซตของสมาชิกที่อยู่ทั้งใน A และ B

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$$

ตัวอย่าง $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$B = \{a, 2, 4, 5\}$$

$$A \cap B = \{2, 4, 5\}, B \cap A = \{2, 4, 5\}$$

ข้อควรจำ สำหรับเซต A และ B ใดๆ

1. $A \cap \phi = \phi$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cap B \subset A$
4. $A \cap B \subset B$
5. $A \cap A = A$

1.6.3 ผลต่าง (Difference) ผลต่างของเซต A และเซต B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นสมาชิกของ A แต่ไม่เป็นสมาชิกของ B เขียนแทนด้วย $A - B$

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \notin B\}$$

ตัวอย่าง $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A - B = \{1, 2\}$$

$$B - A = \{6, 7\}$$

1.7 ดิสจอยน์เซต (Disjoint Set) เซต A และ B เป็นดิสจอยน์เซต ถ้า $A \cap B = \phi$

1.8 เซตกำลัง (Power Set) ได้แก่เซตของเซตย่อยทั้งหมดเมื่อกำหนดเซตใดๆ มาให้

ตัวอย่าง $A = \{a, b\}$

เซตกำลังของ A เขียนได้เป็น $P(A)$

$$P(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \emptyset\}$$

จำนวนสมาชิกของเซตกำลังจะเท่ากับ 2^n เมื่อ n คือจำนวนสมาชิกของเซตที่กำหนดให้

1.9 เอกภพสัมพัทธ์ (Relative Universe) เมื่อเรากล่าวถึงเซตต่างๆ หลายๆ เซต เซตที่ใหญ่ที่สุดที่ทุก ๆ เซตที่เรากล่าวถึงต่างก็เป็นเซตย่อยของเซตนั้น เราเรียกเซตที่ใหญ่ที่สุดนั้นว่า เอกภพสัมพัทธ์ และแทนด้วย U

1.10 ส่วนเพิ่มเติม หรือ คอมพลีเมนต์ (Complement) ถ้า A เป็นเซตย่อยของเอกภพสัมพัทธ์ คอมพลีเมนต์ของ A คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ U ที่ไม่ใช่สมาชิกของ A เขียนแทนคอมพลีเมนต์ของ A ด้วย A' ดังนี้

$$A' = \{x \mid x \in U \text{ และ } x \notin A\}$$

ตัวอย่าง $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\}$$

$$\therefore A' = \{4, 5\}$$

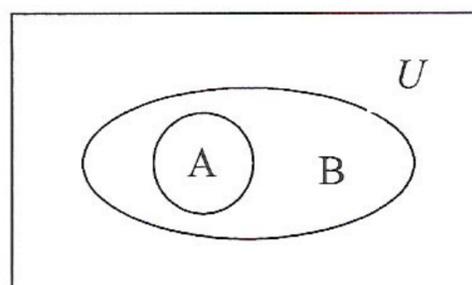
$$\therefore B' = \{1, 2, 5\}$$

1.11 เซตจำกัดและเซตอนันต์ เซตบางตัวเรานับจำนวนสมาชิกในเซตได้ เช่น $A = \{a, b, c\}$ เซต A มีสมาชิก 3 สมาชิก $B = \{5, 6, 7, 8\}$ เซต B มีสมาชิก 4 สมาชิก แต่เซตบางเซตเรานับจำนวนสมาชิกไม่ได้เช่น $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ $B = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$ เซตที่นับจำนวนสมาชิกได้เรียกว่า เซตจำกัด เซตที่นับจำนวนสมาชิกไม่ได้ เรียกว่า เซตอนันต์

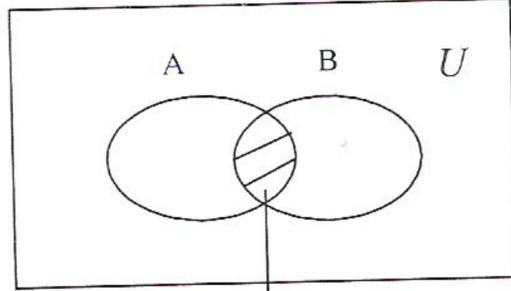
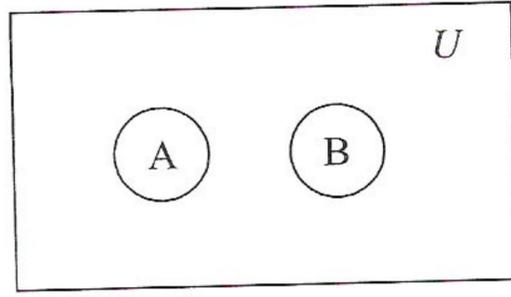
1.12 แผนภาพของเวหน์ – ออยเลอร์ (Venn – Euler's Diagram) John Venn นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ และ Leonard Euler นักคณิตศาสตร์ชาวสวิสเป็นผู้คิดแผนภาพนำมาใช้ในการทำความเข้าใจเกี่ยวกับเซต ใช้สี่เหลี่ยมมุมฉากแทนเอกภพสัมพัทธ์ และใช้วงกลมหรือวงรีแทนเซตต่างๆ แล้วเขียนเซตกำกับไว้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$A \subset B \text{ และ } A \neq B$$

A และ B เป็น ดิสจอยน์เซต

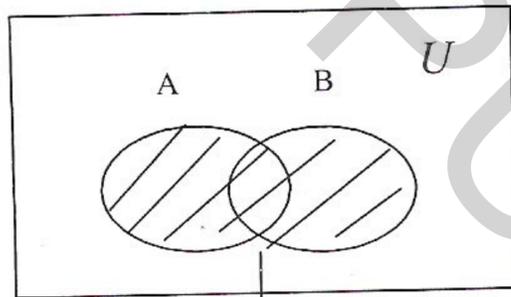


$A \cap B$



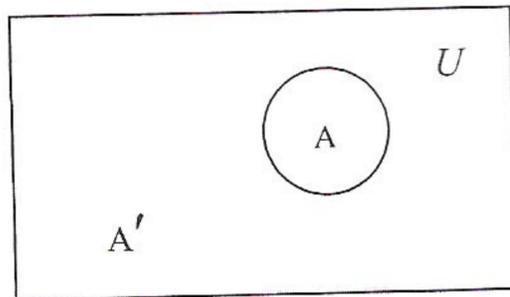
$A \cap B$

$A \cup B$

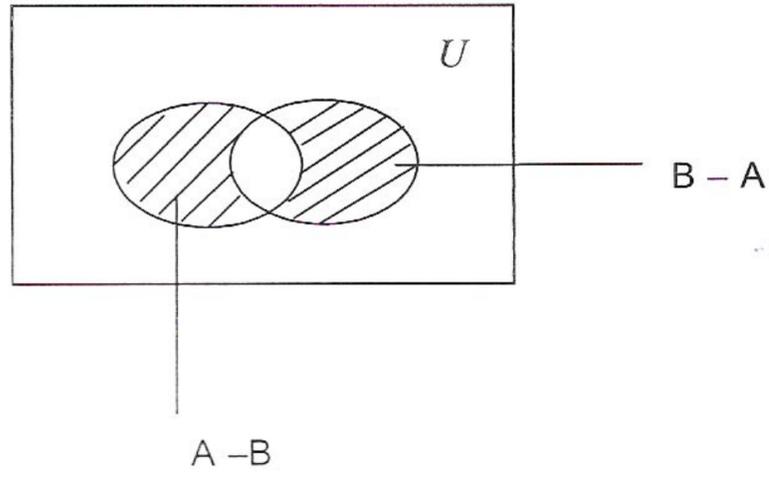


$A \cup B$

A'



A - B และ B - A



DPU

แบบฝึกหัด

จากข้อ 1 – 6 จงเขียน \subset หรือ \in แทนเครื่องหมาย “,” ที่อยู่นอกวงเล็บปีกกาเพื่อให้ข้อความนั้น เป็นจริง

1. $7, \{5, 6, 7\}$
2. $\{5, 6, 7\}, \{5, 6, 7\}$
3. $\{6\}, \{5, 6, 7\}$
4. $\{0\}, \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$
5. $\phi, \{5, 6, 7\}$
6. $0, \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

กำหนดให้ $V = \{d\}$, $W = \{c, d\}$

$X = \{a, b, c\}$, $y = \{a, b\}$ และ $Z = \{a, b, d\}$

จากข้อ 7-16 จงบอกว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือไม่

7. $y \subset x$
8. $v \notin w$
9. $w \neq z$
10. $v \subset z$
11. $v \not\subset y$
12. $x \not\subset z$
13. $v \subset x$
14. $y \not\subset z$
15. $x = w$
16. $w \subset y$

จากข้อ 17-19 กำหนดให้ $E = \{1, 0\}$ จงบอกว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือไม่จริง

17. $\{0\} \in E$
18. $\phi \in E$
19. $\{0\} \subset E$

บทที่ 2

ระบบจำนวนจริง

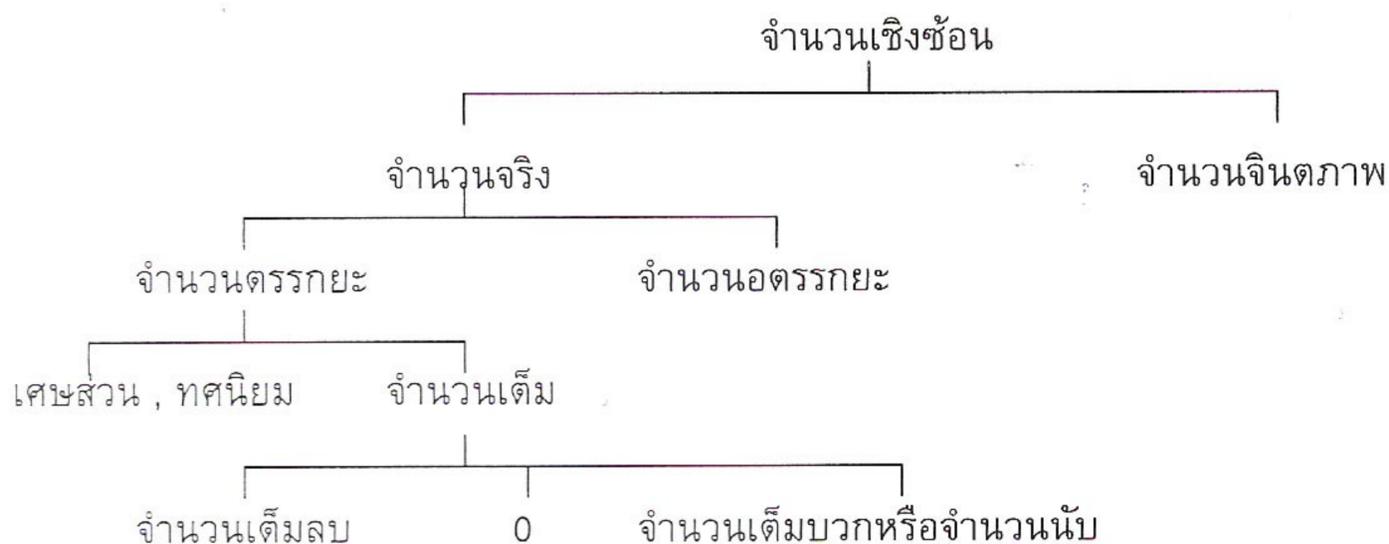
จุดประสงค์การเรียนรู้ มุ่งให้นักศึกษาสามารถ

1. บอกความเกี่ยวข้องของเซตของจำนวนจริง เซตของจำนวนตรรกยะ เซตของจำนวนอตรรกยะ เซตของจำนวนเต็ม เซตจำนวนนับ
2. บอกสมบัติบางประการของค่าสัมบูรณ์
3. บวก ลบ คูณ และหารจำนวนเต็ม
4. หาคิวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.)
5. หาคิวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.)
6. นำ ห.ร.ม. และ ค.ร.น.. มาแก้ปัญหาโจทย์ปัญหา

DRPU

ระบบจำนวนจริง

2.1 ผังระบบจำนวน



2.2 ระบบจำนวนเต็ม เราใช้สัญลักษณ์ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 แทนจำนวน

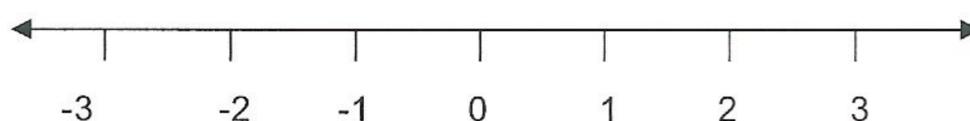
จากผังระบบจำนวน จะเห็นว่า จำนวนเต็มประกอบด้วยจำนวนเต็มบวก 0 (ศูนย์) และจำนวนเต็มลบ

จำนวนเต็มบวก เริ่มตั้งแต่ 1, 2, 3, ... ซึ่งเรียกว่า จำนวนนับ หรือ จำนวนธรรมชาติ เป็นจำนวนชนิดแรกที่มีมนุษย์รู้จัก

0 (ศูนย์) เป็นจำนวนคู่ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนนับ จึงไม่เป็นทั้งจำนวนบวกและจำนวนลบ

จำนวนเต็มลบ คือ จำนวนตรงข้ามกับจำนวนเต็มบวก

เส้นจำนวน เราสามารถกำหนดจำนวนลงไปบนจุดต่างๆ ของเส้นตรงได้แล้วเรียกเส้นตรงนั้นว่าเส้นจำนวน



การเปรียบเทียบจำนวนเต็ม กำหนดให้ a และ b เป็นจุดบนเส้นจำนวน ถ้า b อยู่ทางขวาของ a เราเรียกว่า b โดกว่า a เขียนแทนด้วย $b > a$ หรือ $a < b$ อ่านว่า a เล็กกว่า b

2.3 การบวกจำนวนเต็ม a, b เป็นจำนวนใดๆ ผลบวกของสองจำนวน a และ b เขียนได้เป็น

$a + b$

เอกลักษณ์การบวก 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก

สำหรับจำนวน a ใดๆ $a + 0 = 0 + a = a$

สมบัติการสลับที่ของการบวก

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

$$a + b = b + a$$

สมบัติการจัดหมู่ของการบวก

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

2.3.1 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก

$$14 + 5 = 19$$

$$8 + 5 = 13$$

2.3.2 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ

$$(-4) + 9 = 5$$

$$5 + (-8) = -3$$

2.3.3 การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ

$$(-14) + (-15) = -29$$

$$(-12) + (-7) = -19$$

2.4 การลบจำนวนเต็ม

การลบจำนวนเต็มก็คือการบวกด้วยจำนวนตรงข้าม

$$\begin{aligned} 4 - 7 &= 4 + \text{จำนวนตรงข้ามของ } 7 \\ &= 4 + (-7) = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 - (-12) &= 8 + \text{จำนวนตรงข้ามของ } -12 \\ &= 8 + 12 \\ &= 20 \end{aligned}$$

2.5 การคูณจำนวนเต็ม

a, b เป็นจำนวนใดๆ ผลคูณของสองจำนวน a และ b เขียนได้เป็น $a \times b$ หรือ $a \cdot b$ หรือ ab

$$\begin{aligned} a \times b \text{ มีค่าเท่ากับ } & \underbrace{b + b + b + \dots + b}_a \\ \text{หรือ} & \underbrace{a + a + a + \dots + a}_b \end{aligned}$$

ดังนั้น a และ b ก็คือแฟคเตอร์ของผลคูณ

เอกลักษณ์การคูณ 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ

สำหรับจำนวน a ใดๆ $a \times 1 = 1 \times a = a$

2.6 การหารจำนวนเต็ม

2.6.1 จำนวนเต็มสองจำนวนที่มีเครื่องหมายเหมือนกันหารกัน คำตอบจะเป็นบวกเสมอ

$$\frac{8}{2} = 4$$

$$\frac{-8}{-2} = 4$$

2.6.2 จำนวนเต็มสองจำนวนที่มีเครื่องหมายต่างกันหารกัน คำตอบจะเป็นลบเสมอ

$$\frac{-6}{2} = -3$$

$$\frac{6}{-2} = -3$$

2.7 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็ม

ค่าสัมบูรณ์ คือ ค่าที่เป็นจำนวนบวกเสมอ แทนด้วย สัญลักษณ์ $| \quad |$

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$|-4| = 4$$

$$|-4| = 4$$

$|4|$ หรือ $|-4|$ หมายถึง ระยะห่างจาก 0 ไปทางบวก 4 หน่วย

2.8 สมบัติของ 1

2.8.1 จำนวนใดๆ คูณกับ 1 ได้จำนวนนั้น

$$1 \times (-8) = (-8) \times 1 = -8$$

$$1 \times 45 = 45 \times 1 = 45$$

2.8.2 จำนวนใดๆ หารด้วย 1 ได้จำนวนนั้น

$$\frac{-32}{1} = -32$$

$$\frac{48}{1} = 48$$

2.9 สมบัติของ 0

2.9.1 จำนวนใดบวกกับ 0 ได้จำนวนนั้น

$$4 + 0 = 0 + 4 = 4$$

$$(-8) + 0 = 0 + (-8) = -8$$

2.9.2 จำนวนใดคูณกับ 0 ได้ 0

$$4 \times 0 = 0 \times 4 = 0$$

$$(-8) \times 0 = 0 \times (-8) = 0$$

2.9.3 0 หารด้วยจำนวนใดๆ ที่ไม่ใช่ 0 จะได้

$$\frac{0}{8} = 0$$

$$\frac{0}{-5} = 0$$

2.9.4 ถ้าผลคูณของสองจำนวนใดๆ เท่ากับ 0 จำนวนใดจำนวนหนึ่งต้องเป็น 0 หรือเป็น 0 ทั้งสองจำนวน

$a \times b = 0$ ดังนั้น $a = 0$ หรือ $b = 0$ หรือทั้ง a และ b เป็น 0

เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ

2.9.5 0 เป็นตัวหารไม่ได้

2.10 การบวก ลบ คูณ และหาร ถ้าดำเนินการพร้อมๆ กัน ให้ดำเนินการดังนี้

2.10.1 ถ้ามีวงเล็บให้ทำในวงเล็บก่อน

2.10.2 ถ้าไม่มีวงเล็บทำคูณกับหารก่อน แล้วค่อยทำบวกกับลบ

2.10.3 คูณกับหาร ถ้าไม่มีวงเล็บให้ทำตามลำดับ คู่อื่นมาก่อน ทำคู่นั้นก่อน

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $7 \times 6 \div 2 + 8 \div 4 \times 2 - 9$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} & 7 \times 6 \div 2 + 8 \div 4 \times 2 - 9 \\ & = 42 \div 2 + 8 \div 4 \times 2 - 9 \\ & = 21 + 2 \times 2 - 9 \\ & = 16 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียวในคำถามแต่ละข้อ

1. จงหาค่าของ $[(-4) + 1] + [(-15) - 18]$ ตรงกับข้อใด
 ก. -40 ข. -36 ค. 0 ง. 36 จ. 40
2. จงหาค่าของ $(-213) - [(-139) - (315)]$ ตรงกับข้อใด
 ก. 241 ข. 220 ค. 200 ง. 191 จ. 171
3. จงหาค่าของ $[3 + (-4)] [(-3) + 3]$ ตรงกับข้อใด
 ก. -2 ข. -1 ค. 0 ง. 1 จ. 2
4. จงหาค่าของ $-[-\{5 - (-10)\} - 12]$ ตรงกับข้อใด
 ก. -20 ข. -14 ค. 14 ง. 20 จ. 27
5. จงหาค่าของ $|-5| + |-4 - 5| - |8|$ ตรงกับข้อใด
 ก. 1 ข. 2 ค. 4 ง. 6 จ. 8
6. จงหาค่าของ $|-36| + |-13 - 6| - |50|$ ตรงกับข้อใด
 ก. 1 ข. 2 ค. 4 ง. 6 จ. 8
7. จงหาค่าของ $|-15| + |-2 + 7| - |21|$ ตรงกับข้อใด
 ก. -2 ข. -1 ค. 0 ง. 1 จ. 2
8. จงหาค่าของ $-|-15 + 12| + |12 - 9|$ ตรงกับข้อใด
 ก. -2 ข. -1 ค. 0 ง. 1 จ. 2
9. กำหนด $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$ จงหาค่าของ $\frac{abc - b + c + a}{bc}$ ตรงกับข้อใด
 ก. -2 ข. -1 ค. 0 ง. 1 จ. 2
10. กำหนด $a = 7$, $b = -7$, $c = 14$ จงหาค่าของ $a - (b - c)$ ตรงกับข้อใด
 ก. 25 ข. 28 ค. 31 ง. 34 จ. 37

11. กำหนด $a = -5$, $b = 2$, $c = -3$, $d = 7$ แล้ว $(ab - c) \div d$ มีค่าเท่ากับเท่าใด
 ก. -2 ข. -1 ค. 0 ง. 1 จ. 2
12. จงหาค่าของ $(-27) \times 5$ ตรงกับข้อใด
 ก. -150 ข. -135 ค. -110 ง. 110 จ. 135
13. จงหาค่าของ $[(-6) \times 2] \times (-3)$ ตรงกับข้อใด
 ก. -40 ข. -36 ค. 0 ง. 36 จ. 40
14. จงหาค่าของ $(-2) (-3) \{3 - 2(-3)\}$ ตรงกับข้อใด
 ก. 54 ข. 50 ค. 46 ง. 42 จ. 39
15. จงหาค่าของ $(-2) \times 0 \div (-1)$ ตรงกับข้อใด
 ก. -2 ข. -1 ค. 0 ง. 1 จ. 2
16. จงหาค่าของ $32 \div \{(-8) \div 4\}$ ตรงกับข้อใด
 ก. -2 ข. -1 ค. 0 ง. 1 จ. 2
17. จงหาค่าของ $\{(-26) \times (-2)\} \div (-13)$ ตรงกับข้อใด
 ก. 4 ข. 8 ค. 12 ง. 16 จ. 20
18. จงหาค่าของ $\frac{0}{7} + \frac{7 \times (-7)}{7}$ ตรงกับข้อใด
 ก. -10 ข. -9 ค. -8 ง. -7 จ. -6
19. จงหาค่าของ $[(-51) \div (-3)] \times [(-60) \div (-12)]$ ตรงกับข้อใด
 ก. 82 ข. 83 ค. 84 ง. 85 จ. 86
20. จงหาค่าของ $9[(3-5) - 16 \div (5-13)]$ ตรงกับข้อใด
 ก. -2 ข. -1 ค. 0 ง. 1 จ. 2
21. จงหาค่าของ $8(4-9) - 32 \div (2-10)$ ตรงกับข้อใด
 ก. -40 ข. -36 ค. -30 ง. -25 จ. -20

22. จงหาค่าของ $24(-3) \div 9 - (15-3) \div 4$ ตรงกับข้อใด
ก. -7 ข. -8 ค. -9 ง. -10 จ. -11
23. จงหาค่าของ $36 \div 4(-9) - (4-18) \div 7$ ตรงกับข้อใด
ก. -2 ข. -1 ค. 0 ง. 1 จ. 2
24. จงหาค่าของ $9 \times 4 \div (-12)$ ตรงกับข้อใด
ก. -3 ข. -2 ค. -1 ง. 0 จ. 3
25. จงหาค่าของ $5(-13) - 4(-18) + 12$ ตรงกับข้อใด
ก. 35 ข. 38 ค. 41 ง. 44 จ. 48

DPU

2.11 ตัวประกอบของจำนวนนับ

ตัวประกอบของจำนวนนับใด ๆ คือ จำนวนนับที่หารจำนวนนับที่กำหนดให้ได้ลงตัว เช่น

ตัวประกอบของ 6 คือ 1,2,3,6 เพราะหาร 6 ได้ลงตัว

ตัวประกอบของ 12 คือ 1,2,3,4,6,12 เพราะหาร 12 ได้ลงตัว

จำนวนเฉพาะ คือ จำนวนนับที่ไม่มีตัวอื่นเป็นตัวประกอบ นอกจาก 1 กับตัวมันเอง เช่น

2 , 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนเฉพาะจะได้แก่จำนวนต่อไปนี้

- | | |
|---------------------------------|-------------------------|
| 1. จำนวนคู่ทุกจำนวน (ยกเว้น 2) | เอา 2 หารได้ลงตัว |
| 2. จำนวนที่ลงท้ายด้วย 0 | เอา 2 และ 5 หารได้ลงตัว |
| 3. จำนวนที่ลงท้ายด้วย 5 | เอา 5 หารได้ลงตัว |

ตัวประกอบเฉพาะ คือ ตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะได้แก่ 2 ,3 ,5 ,7 ,11 ,13 ,17 ,19 ,23 ,29 ,31 , ...

ตัวประกอบของ 4 คือ 1 ,2 ,4 เพราะหาร 4 ได้ลงตัว แต่ตัวประกอบเฉพาะของ 4 คือ 2

ตัวประกอบของ 15 คือ 1 ,3 ,5 ,15 เพราะหาร 15 ได้ลงตัว แต่ตัวประกอบเฉพาะของ 15 คือ 3 และ 5

วิธีแยกตัวประกอบ คือหาจำนวนเฉพาะไปหารจนกระทั่งไม่มีจำนวนใดหารได้อีก จำนวนเฉพาะที่หารได้ลงตัวก็คือตัวประกอบของจำนวนนั้น

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบของ 126

วิธีทำ
$$126 = 2 \times 63$$

$$= 2 \times 3 \times 21$$

$$= 2 \times 3 \times 3 \times 7$$
 ดังนั้น
$$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2 \times 3^2 \times 7$$

2.12 ตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม)

ตัวหารร่วมมากของจำนวน 2 จำนวน หรือ มากกว่า คือ จำนวนที่มีค่ามากที่สุดซึ่งนำไปหารจำนวนเหล่านั้นได้ลงตัวทุกจำนวน

วิธีการหา ห.ร.ม

- (1) โดยวิธีแยกตัวประกอบ หาตัวประกอบเฉพาะทั้งหมดของจำนวนที่กำหนดให้
ห.ร.ม. คือตัวประกอบร่วมมาก

ตัวอย่าง จงหา ห.ร.ม ของ 72 กับ 168

วิธีทำ
$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$168 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$$

∴ ห.ร.ม. ของ 72 และ 168 คือ $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

ตัวอย่าง จงหา ห.ร.ม ของ 12 ,16 และ 24

วิธีทำ

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

∴ ห.ร.ม. ของ 12 ,16 และ 24 คือ $2 \times 2 = 4$

(2) โดยวิธีหารสั้น

ตัวอย่าง จงหา ห.ร.ม ของ 72 ,168 และ 210 โดยวิธีหารสั้น

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 72 & 168 & 210 \\ \hline 3 & 36 & 84 & 105 \\ \hline & 12 & 28 & 35 \end{array}$$

หาตัวหารร่วมต่อไม่ได้แล้ว ดังนั้น ห.ร.ม. คือ $2 \times 3 = 6$

ตัวอย่าง จงหา ห.ร.ม ของ 12 ,16 ,24 และ 28 โดยวิธีหารสั้น

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 12 & 16 & 24 & 28 \\ \hline 2 & 6 & 8 & 12 & 14 \\ \hline & 3 & 4 & 6 & 7 \end{array}$$

หาตัวหารร่วมต่อไม่ได้แล้ว ดังนั้น ห.ร.ม. คือ $2 \times 2 = 4$

(3) โดยวิธีตั้งหาร

การหา ห.ร.ม โดยวิธีแยกตัวประกอบเฉพาะ หรือโดยวิธีหารสั้นเหมาะที่จะใช้ในการหา ห.ร.ม เมื่อตัวเลขมีค่าน้อย แต่ถ้าตัวเลขมีค่ามากๆ จะใช้วิธีตั้งหาร

ตัวอย่าง จงหา ห.ร.ม. ของ 210 และ 385

วิธีทำ

$$\begin{array}{r|l|l|l} 1 & 210 & 385 & 1 \\ & 175 & 210 & \\ & \hline & 35 & 175 & \\ & & 175 & 5 \\ & & \hline & & & \end{array}$$

∴ ห.ร.ม. ของ 210 และ 385 คือ 35

ตัวอย่าง จงหา ห.ร.ม. ของ 1995 และ 2261

วิธีทำ	7	1995	2261	1
		1862	1995	
		133	266	
			266	2

∴ ห.ร.ม. ของ 1995 และ 2261 คือ 133

2.13 การนำประโยชน์จาก ห.ร.ม. ไปใช้

โดยทั่วไปจะใช้ทำโจทย์ในเรื่องต่างๆ กัน ให้มากที่สุด ใหญ่ที่สุด ยาวที่สุด สูงที่สุด กว้างที่สุด

ตัวอย่าง เชือก 3 เส้น เส้นที่ 1 ยาว 18 ฟุต เส้นที่ 2 ยาว 21 ฟุต เส้นที่ 3 ยาว 27 ฟุต ถ้าต้องการตัดเชือกทั้ง 3 เส้นให้ยาวเท่าๆ กัน โดยไม่เหลือเศษ จะได้เชือกแต่ละท่อนจะยาวที่สุดกี่ฟุต

วิธีทำ หา ห.ร.ม. ของเชือกทั้ง 3 เส้น

$$18 = 3 \times 3 \times 2$$

$$21 = 3 \times 7$$

$$27 = 3 \times 3 \times 3$$

ห.ร.ม. 3

∴ ตัดให้ได้เชือกยาวที่สุดท่อนละ 3 ฟุต

ตัวอย่าง ผ้า 3 พับยาวพับละ 33 หลา 72 หลา และ 84 หลา ต้องการตัดออกเป็นผืนยาวเท่าๆ กัน และให้ยาวที่สุดโดยไม่เหลือเศษ จะได้ผ้ายาวกี่ฟุต

วิธีทำ $33 = 3 \times 11$

$$72 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$84 = 3 \times 2 \times 2 \times 7$$

∴ ได้ผ้ายาว 3 หลา = 9 ฟุต

2.14 ตัวคูณร่วมน้อย(ค.ร.น.) ตัวคูณร่วมน้อยของจำนวน 2 จำนวนหรือมากกว่าได้แก่จำนวนที่น้อยที่สุด ที่เอาจำนวนเหล่านั้นไปหารได้ลงตัวทุกจำนวน

วิธีหา ค.ร.น.

(1) วิธีแยกตัวประกอบ

ตัวอย่าง จงหา ค.ร.น. ของ 12 ,16 ,18

วิธีทำ

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

ค.ร.น. คือ $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 144$

ตัวอย่าง จงหา ค.ร.น. ของ 81, 108, 72

วิธีทำ

$$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$108 = 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$$

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

ค.ร.น. คือ $3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 648$

(2) วิธีหารสั้น

ตัวอย่าง จงหา ค.ร.น. ของ 81 ,108 ,72

วิธีทำ

3	72	81	108
3	24	27	36
2	8	9	12
2	4	9	6
2	2	9	3
3	1	9	3
3	3	1	
	1		

ค.ร.น. คือ $3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 648$

2.15 การนำประโยชน์จาก ค.ร.น. ไปใช้

ใช้แก้ปัญหาโจทย์ เมื่อกำหนดสิ่งต่างๆมาให้แต่ละอย่างไม่เท่ากัน แล้วถามว่าสิ่งต่างๆ ที่กำหนดมาให้ นั้นจะกลับมาพร้อมกันอีกเมื่อไร

ตัวอย่าง นักกีฬา 3 คน วิ่งรอบสนามแห่งนี้ คนที่ 1 วิ่งรอบสนามใช้เวลา 20 วินาที คนที่ 2 วิ่งรอบสนามใช้เวลา 24 วินาที คนที่ 3 วิ่งรอบสนามใช้เวลา 32 วินาที ถ้าทั้ง 3 คน ออกวิ่งพร้อมกัน ณ ที่เดียวกันไปในทิศทางเดียวกัน ในการวิ่งทุกรอบด้วยอัตราความเร็วคงที่ จงหา

- ก. คนทั้งสามจะวิ่งทันกันครั้งแรกเมื่อวิ่งไปแล้วกี่นาที
- ข. เมื่อคนทั้งสามวิ่งมาทันกันนั้น คนที่ 1 วิ่งได้กี่รอบ

(ก) วิธีทำ หา ค.ร.น. ของ 20 ,24 ,32

$$20 = 2 \times 2 \times 5$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$\text{ค.ร.น.} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$= 480 \text{ วินาที}$$

$$= 8 \text{ นาที}$$

(ข) คนที่ 1 เวลา 20 วินาที วิ่งได้ 1 รอบ

$$\text{เวลา 480 วินาที วิ่งได้ } \frac{480}{20} = 24 \text{ รอบ}$$

2.16 จำนวนตรรกยะ (Rational Number) จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่เขียนให้อยู่ในรูปของ $\frac{P}{q}$

ได้ เมื่อ $q \neq 0$

กำหนดให้ $a, b \in I$ ($I =$ จำนวนเต็ม)

และ $b \neq 0$ ดังนั้น $\frac{a}{b}$ ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็ม เช่น $a = 3$ $b = 5$

$\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม และเรียกจำนวนเช่นนี้ว่า เศษส่วน โดยเรียก 3 ว่าเศษ และเรียก 5

ซึ่งเป็นตัวหารว่า ส่วน

การเท่ากันของเศษส่วน $\frac{P}{q} = \frac{KP}{Kq}$ เรียกว่าเศษส่วนที่เท่ากัน แล้วเรียก $\frac{P}{q}$ ว่าเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16}$$

$$-\frac{1}{4} = -\frac{2}{8} = -\frac{3}{12}$$

2.16.1 การเปรียบเทียบเศษส่วน เราสามารถเปรียบเทียบเศษส่วนว่าจำนวนใดมากกว่ากัน

โดยใช้สมบัติของความเท่ากันของเศษส่วน

กำหนดให้ $a, b, c, d \in I$ และ $b, d \neq 0$ จะได้ว่า

(1) ถ้า $ad = bc$ แล้ว $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

(2) ถ้า $ad \neq bc$ แล้ว $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$

(3) ถ้า $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ แล้ว $ad = bc$

(4) ถ้า $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ แล้ว $ad \neq bc$

นอกจากจะพิจารณาจากสมบัติทั้ง 4 ข้อดังกล่าวแล้ว วิธีที่ง่ายที่สุดในการเปรียบเทียบก็คือ ทำส่วนให้เท่ากัน

1. $\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$ จริงหรือไม่

พิจารณา $\frac{3}{8} < \frac{1}{2} \times \frac{4}{4} < \frac{4}{8}$ เป็นจริง

2. $-\frac{8}{3} > -\frac{7}{4}$ จริงหรือไม่ หา ค.ร.น. ของ 3 และ 4 ซึ่งคือ 12 แล้วทำส่วนของทั้งสองจำนวนให้

เท่ากับ 12

$$-\frac{8}{3} \times \frac{4}{4} > -\frac{7}{4} \times \frac{3}{3}$$

$$-\frac{32}{12} > -\frac{21}{12} \quad \text{ไม่จริง}$$

ในกรณีที่เป็นค่าลบ ค่าลบยิ่งมากค่ายิ่งน้อย

2.16.2 การบวกและการลบเศษส่วน

$$\frac{P}{q} + \frac{r}{q} = \frac{P+r}{q}, \quad \frac{P}{q} - \frac{r}{q} = \frac{P-r}{q}$$

นั่นคือ หา ค.ร.น. ของส่วนแล้วทำส่วนให้เท่ากัน จากนั้นจึงเอาเศษบวกเศษ หรือ เศษลบเศษตามเครื่องหมาย

ตัวอย่าง จงหาผลบวกของ $-\frac{4}{15}$ กับ $\frac{7}{12}$

วิธีทำ หา ค.ร.น. ของ 15 และ 12 คือ 60

$$\begin{aligned} \frac{-4}{15} + \frac{7}{12} &= \frac{-4}{15} \times \frac{4}{4} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{5} \\ &= \frac{-16}{60} + \frac{35}{60} = \frac{19}{60} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\left(\frac{-2}{7}\right) - \left(\frac{-3}{8}\right)$

วิธีทำ หา ค.ร.น. ของ 7 และ 8 คือ 56

$$\begin{aligned} \frac{-2}{7} \times \frac{8}{8} - \left(\frac{-3}{8} \times \frac{7}{7}\right) \\ = \frac{-16}{56} + \frac{21}{56} = \frac{5}{56} \end{aligned}$$

2.16.3 การคูณเศษส่วน

(1) กรณีที่เป็นจำนวนคละให้ทำเป็นเศษส่วนเกินก่อน

(2) หากทำเป็นเศษส่วนอย่างต่ำได้ก็ทำก่อน

(3) นำเศษคูณเศษ และส่วนคูณส่วน

(4) ผลคูณที่ได้นำมาทอนเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ หรือทำเป็นจำนวนคละถ้าทำได้

ตัวอย่าง จงหาค่าของ ก. $4 \times \left(\frac{-3}{2}\right)$

ข. $\left(\frac{-4}{7}\right) \times \left(\frac{-3}{8}\right)$

ค. $\left(\frac{-5}{9}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right)$

วิธีทำ ก. $4 \times \left(\frac{-3}{2}\right) = -6$

ข. $\left(\frac{-4}{7}\right) \times \left(\frac{-3}{8}\right) = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$

ค. $\left(\frac{-5}{9}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{36}$

2.16.4 การหารเศษส่วน ใช้กฎ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

เมื่อ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็ม และ b, c, d ไม่เท่ากับ 0

ตัวอย่าง จงหาค่าของ ก. $\frac{3}{5} \div \frac{4}{7}$

ข. $-\frac{7}{8} \div \frac{3}{4}$

วิธีทำ ก. $\frac{3}{5} \div \frac{4}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{21}{20}$

$= 1\frac{1}{20}$

ข. $-\frac{7}{8} \div \frac{3}{4} = -\frac{7}{8} \times \frac{4}{3} = -\frac{7}{6}$

$= -1\frac{1}{6}$

2.17 จำนวนที่อยู่ในรูปทศนิยม

ใช้เครื่องหมาย “.” แสดงความไม่เป็นจำนวนเต็มของตัวเลขที่ตามหลังจุดทศนิยมนั้น เรา

เขียนเศษส่วนให้อยู่ในรูปทศนิยมได้ เช่น

$$\frac{3}{10} = 0.3 \quad \text{หรือ} \quad \frac{45}{100} = 0.45$$

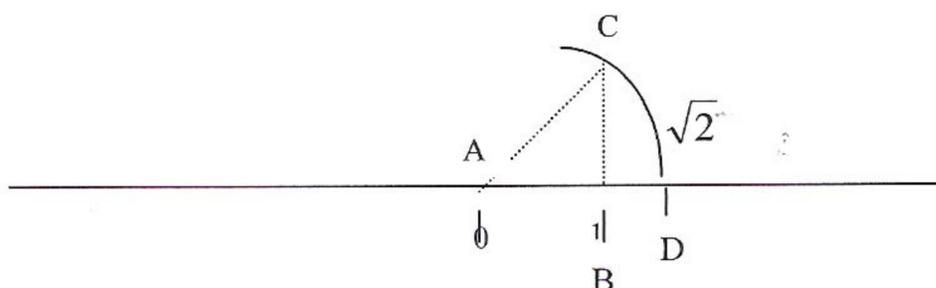
ทำนองเดียวกันเราสามารถเขียนทศนิยมให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้ เช่น

$$0.5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$0.017 = \frac{17}{1000}$$

2.18 จำนวนอตรรกยะ

ยังมีจำนวนอีกกลุ่มหนึ่งที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $\frac{p}{q}$ ได้เมื่อ $q \neq 0$ และเขียนให้อยู่ในรูปทศนิยมก็ไม่ได้ พิจารณาจากเส้นจำนวน



จาก 0 ถึง 1 ซึ่งยาว 1 หน่วย ทำมุมฉากที่ 1 แล้วลากเส้นขึ้นไปยาว 1 หน่วยเช่นกัน ความยาว $AC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ซึ่งเอาค่ามาเขียนบนเส้นจำนวนได้ ดังนั้นระยะจาก A ถึง D ก็ยาว $\sqrt{2}$ หน่วย

จำนวนประเภทนี้เรียกว่า จำนวนอตรรกยะ

เซตของจำนวนอตรรกยะยูเนียนกับเซตของจำนวนอตรรกยะได้เซตของจำนวนจริง

แบบฝึกหัด

ตอนที่ 1

1. จงเติมตัวประกอบของจำนวนนับลงในตารางต่อไปนี้

จำนวนนับ	ตัวประกอบ
8	
16	
48	

2. จงเติมช่องว่างต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

- 1 _____ ตัวประกอบของจำนวนนับใด ๆ
(เป็น/ไม่เป็น)
- 3 _____ ตัวประกอบของ 27
(เป็น/ไม่เป็น)
- 13 _____ ตัวประกอบของ 65
(เป็น/ไม่เป็น)
- 24 _____ ตัวประกอบของ 124
(เป็น/ไม่เป็น)

3. จงเติมเครื่องหมาย \surd ลงในช่องที่นักศึกษาเห็นว่าตัวประกอบนั้นเป็นหรือไม่เป็นตัวประกอบเฉพาะ

จำนวนนับ	ตัวประกอบ	ตัวประกอบเฉพาะ	
		เป็น	ไม่เป็น
72	1		
	2		
	3		
	4		
	6		
	8		
	9		
	12		
	18		
	24		
	72		

ตอนที่ 2

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียวในคำถามแต่ละข้อ

1. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบที่ถูกต้อง

ก. $12 = 2 \times 6$

ข. $36 = 1 \times 3 \times 12$

ค. $45 = 3 \times 3 \times 5$

ง. $80 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

จ. $150 = 3 \times 5 \times 10$

2. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ 972

ก. $2^2 \times 3^5$

ข. $2^3 \times 3^5$

ค. $2^2 \times 3^4$

ง. $2^3 \times 3^4$

จ. $2^3 \times 3^6$

3. ตัวประกอบร่วมที่มากที่สุดของ 36 และ 72 คือข้อใด

ก. 6

ข. 12

ค. 18

ง. 24

จ. 36

10. จงหาค่าของ $\frac{7}{12} - \frac{11}{16}$ ตรงกับข้อใด

ก. $-\frac{1}{48}$

ข. $-\frac{3}{48}$

ค. $-\frac{5}{48}$

ง. $-\frac{7}{48}$

จ. $-\frac{9}{48}$

11. จงหาค่าของ $\frac{1}{12} + \frac{5}{18} + \frac{3}{28}$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{31}{126}$

ข. $\frac{59}{126}$

ค. $\frac{61}{126}$

ง. $\frac{71}{126}$

จ. $\frac{91}{126}$

12. จงหาค่าของ $\frac{5}{2} - \frac{3}{5} - \frac{7}{6}$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{7}{11}$

ข. $\frac{9}{11}$

ค. $\frac{11}{15}$

ง. $\frac{13}{15}$

จ. $\frac{14}{15}$

13. จงหาค่าของ $\frac{21}{44} \div \left(\frac{27}{33} \times \frac{14}{4} \right)$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{1}{2}$

ข. $\frac{1}{3}$

ค. $\frac{1}{4}$

ง. $\frac{1}{5}$

จ. $\frac{1}{6}$

14. จงหาค่าของ $\frac{49}{36} \div \left(\frac{28}{24} + \frac{21}{32} \right)$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{56}{75}$

ข. $\frac{57}{75}$

ค. $\frac{58}{75}$

ง. $\frac{59}{75}$

จ. $\frac{71}{75}$

15. จงหาค่าของ $\left(\frac{7}{6} - \frac{74}{63} \right) \div \left(\frac{7}{3} - \frac{4}{7} \right)$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{1}{111}$

ข. $\frac{1}{222}$

ค. $\frac{3}{111}$

ง. $\frac{3}{222}$

จ. $\frac{5}{222}$

16. จงหาค่าของ $\frac{4}{3} \times \frac{5}{12} + \frac{2}{3}$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{3}{9}$

ข. $\frac{4}{9}$

ค. $\frac{5}{9}$

ง. $\frac{7}{9}$

จ. $\frac{11}{9}$

17. จงหาค่าของ $\frac{11}{12} \div \frac{8}{21} \times \frac{33}{40}$ ตรงกับข้อใด

ก. $1\frac{11}{12}$

ข. $1\frac{7}{12}$

ค. $2\frac{11}{12}$

ง. $2\frac{7}{12}$

จ. $3\frac{1}{12}$

18. จงหาค่าของ $\left\{ \frac{5}{9} \div \left(-\frac{7}{8} \right) \right\} \times \left(\frac{3}{5} \div \frac{2}{5} \right)$ ตรงกับข้อใด

ก. $-\frac{13}{21}$

ข. $-\frac{17}{21}$

ค. $-\frac{19}{21}$

ง. $-\frac{20}{21}$

จ. -1

19. จงหาค่าของ $\left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{9} \right) + \left(-\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{5}{6} \div 1\frac{1}{5} \right)$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{1}{5}$

ข. $\frac{1}{6}$

ค. $\frac{1}{7}$

ง. $\frac{1}{8}$

จ. $\frac{1}{9}$

20. จงหาค่าของ $\frac{3}{4} \times \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{3} \right) \div 3\frac{1}{2}$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{1}{4}$

ข. $\frac{1}{5}$

ค. $\frac{1}{6}$

ง. $\frac{1}{7}$

จ. $\frac{1}{8}$

21. จงหาค่าของ $\frac{5\frac{1}{5} - 3\frac{2}{3}}{1\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{1}{4}$

ข. $\frac{21}{20}$

ค. $\frac{22}{25}$

ง. $\frac{23}{25}$

จ. 1

22. จงหาค่าของ $3 + \frac{3}{2 + \frac{1}{3 + \left(-1\frac{1}{2}\right)}}$ ตรงกับข้อใด

ก. $1\frac{1}{8}$

ข. $2\frac{1}{8}$

ค. $3\frac{1}{8}$

ง. $4\frac{1}{8}$

จ. $5\frac{1}{8}$

ตอนที่ 3

จงเติมช่องว่างต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

1. จงแปลงทศนิยมต่อไปนี้ให้เป็นเศษส่วนและทำเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

1. $0.4 =$

2. $0.08 =$

3. $0.036 =$

4. $4.5 =$

5. $1.005 =$

2. จงแปลงเศษส่วนต่อไปนี้ให้เป็นทศนิยม

1. $\frac{1}{2} =$

2. $\frac{2}{5} =$

บทที่ 3
เลขยกกำลัง

จุดประสงค์การเรียนรู้ มุ่งให้นักศึกษาสามารถ

1. บอกความหมายของเลขยกกำลัง
2. บอกสมบัติของเลขยกกำลัง
3. เขียนเลขยกกำลังอยู่ในรูปอย่างง่ายได้
4. หาผลลัพธ์ทางพีชคณิตของเลขยกกำลังได้

DPU

เลขยกกำลัง

3.1 ความหมายของเลขยกกำลัง

นิยาม

ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 และ n เป็นจำนวนบวก “ a ยกกำลัง n ” หรือ “ a กำลัง n ” เขียนแทนด้วย a^n มีความหมายดังนี้ $\underbrace{a \times a \times a \times a \times a \dots \times a}_{n \text{ ตัว}}$

เรียก a^n ว่า เลขยกกำลัง n

เรียก a ว่า ฐาน

เรียก n ว่า เลขชี้กำลัง

เช่น $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ฐานคือ 2 เลขชี้กำลังคือ 6

$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3)$ ฐานคือ (-3) เลขชี้กำลังคือ 4

3.2 สมบัติของเลขยกกำลัง

กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก $a^m \times a^n = a^{m+n}$

1. ฐานเหมือนกันคูณกัน นำเลขชี้กำลังมาบวกกัน

เช่น $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

$$5^{n+3} \times 5^{-n+3} = 5^{n+3+(-n+3)} = 5^6 = 625$$

$$2. \frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{เมื่อ } m > n \text{ และ } a \neq 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } m = n \text{ และ } a \neq 0 \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{เมื่อ } m < n \text{ และ } a \neq 0 \end{cases}$$

ฐานเหมือนกันหารกัน นำเลขชี้กำลังมาลบกัน

เช่น $\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3 = 27$

$$\frac{m^2}{m^5} = \frac{1}{m^{5-2}} = \frac{1}{m^3}$$

3. $a^0 = 1$ เมื่อ $a \neq 0$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็น 0 ย่อมมีค่าเท่ากับ 1 เสมอ

เช่น $37^0 = 1$

$$\left[(3x - 5y) + \frac{2}{3}(x^2 - 3y) \right]^0 = 1$$

$$(5^2 + 2^3 + 3^4)^0 = 1$$

0^0 ไม่มีความหมาย

$$4. a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนลบ สามารถทำให้มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนบวกได้โดยเปลี่ยนเศษให้เป็นส่วนและเปลี่ยนส่วนให้เป็นเศษ เปลี่ยนเครื่องหมายเป็นตรงกันข้าม

$$\text{เช่น } (-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{y}{x}$$

$$5. (a^m)^n = a^{m \times n}$$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังซ้อนกัน ให้นำเลขชี้กำลังคูณกันฐานเท่าเดิม

$$\text{เช่น } (3^2)^5 = 3^{2 \times 5} = 3^{10}$$

$$(2^3)^{x+1} = 2^{3(x+1)} = 2^{3x+3}$$

$$6. (ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$$

$$\text{เช่น } (2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$$

$$(2^3 x^2 n)^4 = (2^3)^4 (x^2)^4 n^4 = 2^{12} x^8 n^4$$

ข้อสังเกต

$$\text{ก. } (a + b)^n \neq a^n + b^n$$

$$\text{ข. } (-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2)$$

$$-2^4 = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16$$

$$7. \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และหา $\sqrt[n]{a}$ ได้

$$\text{เช่น } \sqrt{3} = \sqrt[2]{3} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}}$$

$$\sqrt[3]{27x^{-2}} = \sqrt[3]{3^3 x^{-2}} = 3^{\frac{3}{3}} x^{\frac{-2}{3}} = 3x^{\frac{-2}{3}}$$

ข้อสังเกต

1. เลขยกกำลังสองจำนวนเท่ากัน ถ้าฐานเท่ากัน เลขชี้กำลังย่อมเท่ากัน (ฐาน $\neq 0, 1$)

$$\text{ถ้า } a^x = a^m \text{ แล้ว } x = m \text{ โดยที่ } a \neq 0, 1$$

2. เลขยกกำลังสองจำนวนเท่ากัน ถ้าฐานไม่เท่ากัน แต่เลขชี้กำลังเท่ากันแล้ว เลขชี้กำลังย่อมเป็นศูนย์

$$\text{ถ้า } a^x = b^x \text{ และ } a \neq b \text{ แล้ว } x = 0$$

$$\text{เช่น } 2^x = 5^x \quad \text{ดังนั้น } x = 0$$

$$7^{x+1} = 10^{x+1} \quad \text{ดังนั้น } x+1 = 0 \text{ และ } x = -1$$

3. เลขยกกำลังสองจำนวนเท่ากัน ถ้าเลขชี้กำลังเท่ากันไม่เท่ากับ 0 แล้วฐานย่อมเท่ากัน

$$\text{ถ้า } a^x = b^x \text{ และ } x \neq 0 \text{ แล้ว } a = b$$

$$\text{เช่น } m^5 = 12^5 \quad \text{ดังนั้น } m = 12$$

DPU

8. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} (0.5)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5$ มีคำตอบเท่ากับข้อใด
 ก. $\left(\frac{1}{2}\right)$ ข. $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ค. $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ ง. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ จ. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
9. $\frac{3^{-4} \cdot 3^2 \cdot 3^{-5}}{3^{-8}}$ มีคำตอบเท่ากับข้อใด
 ก. 3^4 ข. 3^3 ค. 3^2 ง. 3 จ. 1
10. $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ มีคำตอบเท่ากับข้อใด
 ก. $2^{\frac{1}{3}}$ ข. $2^{\frac{1}{5}}$ ค. $2^{\frac{1}{8}}$ ง. $2^{\frac{1}{15}}$ จ. $2^{\frac{1}{53}}$
11. $(3^{-2})^{-4} \div 9^4$ มีคำตอบเท่ากับข้อใด
 ก. 3^{-2} ข. 3^{-1} ค. 3 ง. 0 จ. 1
12. $(3^{-2} x^2 t z^4)^3$ มีคำตอบเท่ากับข้อใด
 ก. $\frac{x^6 t^3 z^{12}}{36}$ ข. $\frac{3^6}{x^6 t^3 z^{12}}$
 ค. $\frac{3^6 x^6}{t^3 z^{12}}$ ง. $\frac{z^{12}}{3^6 x^6 t^3}$
 จ. $\frac{t^3}{3^6 x^6 z^{12}}$
13. $\left(8^{\frac{2}{3}} \times 16^{\frac{1}{4}} \div 2^2\right)$ มีคำตอบเท่ากับข้อใด
 ก. 4 ข. 3 ค. 2 ง. 1 จ. 0
14. $\frac{a^2 b^2 c}{a^2 b^4 c^5}$ มีคำตอบเท่ากับข้อใด
 ก. $\frac{1}{b^2 c^4}$ ข. $b^2 c^4$
 ค. $\frac{b^2}{c^4}$ ง. $\frac{c^4}{b^2}$
 จ. b^{-2}

15. $2\sqrt{8} \times \sqrt{40} \times \sqrt{125}$ มีคำตอบเท่ากับข้อใด

ก. $5 \cdot 2^{\frac{31}{10}}$

ข. $10 \cdot 2^{\frac{31}{10}}$

ค. $15 \cdot 2^{\frac{31}{10}}$

ง. $20 \cdot 2^{\frac{31}{10}}$

จ. $25 \cdot 2^{\frac{31}{10}}$

16. $\left(3x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{4}}\right)\left(2x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{4}}\right)$ มีคำตอบเท่ากับข้อใด

ก. $3x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{2}}$

ข. $6x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{2}}$

ค. $9x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{2}}$

ง. $12x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{2}}$

จ. $15x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{2}}$

17. $\left(\frac{a^{-3}b^2c^5}{a^{-5}b^{-3}c^2}\right)^{-2}$ มีคำตอบเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{1}{a^4b^{10}c^6}$

ข. $a^4b^{10}c^6$

ค. $\frac{a^4}{b^{10}c^6}$

ง. $\frac{a^4b^{10}}{c^6}$

จ. $\frac{a^4c^6}{b^{10}}$

18. ข้อความในข้อใดผิด

ก. $(-2x)^{-3} = \frac{1}{8x^3}$

ข. $(3x^{-1})^{-1} = \frac{x}{3}$

ค. $(9^4)^0 = 9^{40}$

ง. $a^x \cdot a^{5x} = a^{6x}$

จ. $7x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = 7x$

19. ค่าของ $y^{\frac{3}{2}} + 9y^{-1} - 7y^0$ จะมีค่าเป็นเท่าไร เมื่อ $x = 9$

ก. 15

ข. 17

ค. 19

ง. 21

จ. 23

บทที่ 4

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จุดประสงค์การเรียนรู้ มุ่งให้นักศึกษาสามารถ

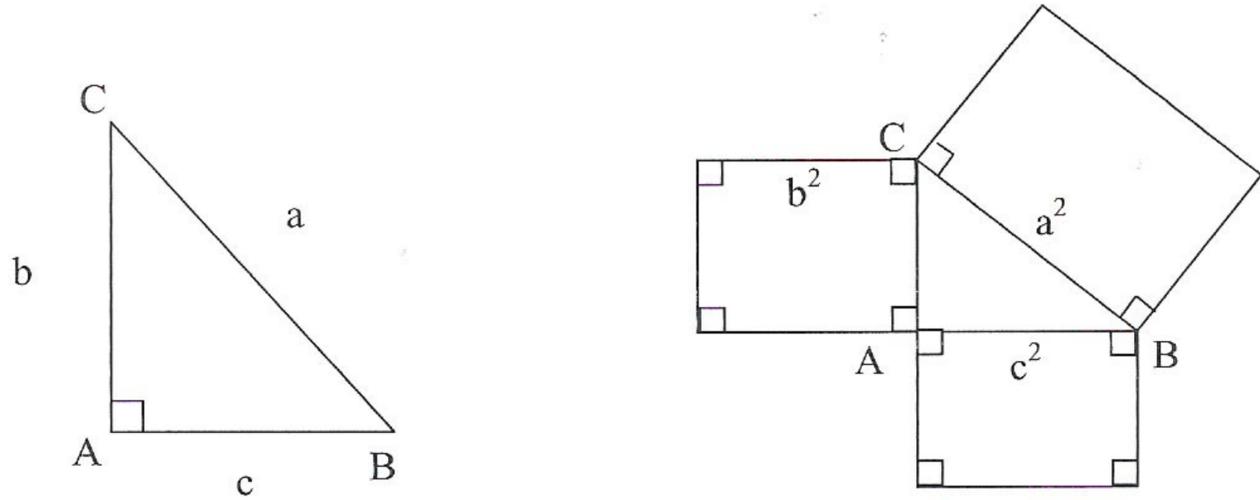
1. ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้
2. นำทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้

DPU

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

4.1 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

“พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากของสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ ย่อมเท่ากับผลบวกของพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก ”



จากรูป $\triangle ABC$ มีมุม $BAC = 90^\circ$

$$\text{จะได้ } a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

4.2 บทกลับทฤษฎีบทพีทาโกรัส

“ในสามเหลี่ยมใดๆ รูปหนึ่ง เมื่อพื้นที่สามเหลี่ยมจัตุรัสบนด้านยาวที่สุดเท่ากับผลบวกของพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนอีกสองด้านที่เหลือแล้วสามเหลี่ยมนั้นจะเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมีด้านยาวที่สุดเป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก ”

เช่น $a^2 = b^2 + c^2$ แสดงว่า $\triangle ABC$ มี A เป็นมุมฉาก

$c^2 = a^2 + b^2$ แสดงว่า $\triangle ABC$ มี C เป็นมุมฉาก

ความยาวด้านสามเหลี่ยมมุมฉากที่ใช้อยู่ๆ

3	4	5	9	40	41
5	12	13	11	60	61
6	8	10	12	35	37
7	24	25	20	21	29
8	15	17	28	45	53

4.3 สูตรของ Plato

ความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะเป็นไปตามสูตรดังนี้

$2n, n^2 - 1, n^2 + 1$ เนื่องจากเป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 2 ขึ้นไป

ถ้า $n = 2$ Δ มุมฉากจะมีความยาวด้าน $2(2) = 4, 2^2 - 1 = 3, 2^2 + 1 = 5$

ถ้า $n = 3$ Δ มุมฉากจะมีความยาวด้าน $2(3) = 6, 3^2 - 1 = 8, 3^2 + 1 = 10$

ถ้า $n = 4$ Δ มุมฉากจะมีความยาวด้าน $2(4) = 8, 4^2 - 1 = 15, 4^2 + 1 = 17$

4.4 สูตรของ Pythagorus

ความยาวด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม จะเป็นไปตามสูตรดังนี้

$n, \frac{n^2 - 1}{2}, \frac{n^2 + 1}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ตั้งแต่ 3 ขึ้นไป

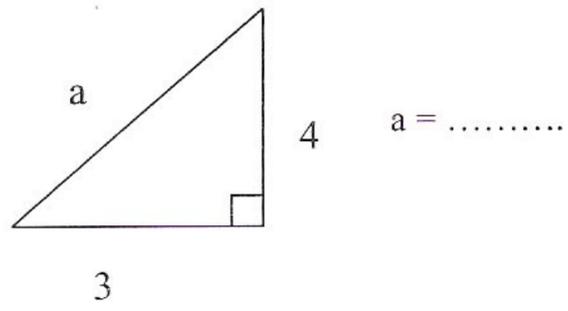
ถ้า $n = 3$ Δ มุมฉากจะมีความยาวด้าน $3, \frac{3^2 - 1}{2} = 4, \frac{3^2 + 1}{2} = 5$

ถ้า $n = 5$ Δ มุมฉากจะมีความยาวด้าน $5, \frac{5^2 - 1}{2} = 12, \frac{5^2 + 1}{2} = 13$

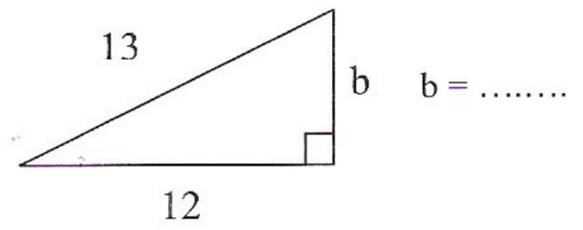
แบบฝึกหัด

จงหาความยาวของด้านที่เหลือ

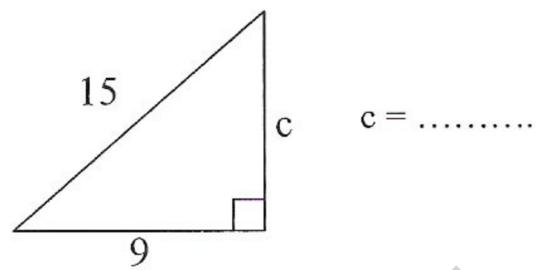
1.



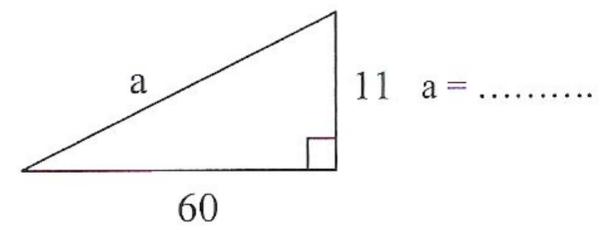
2.



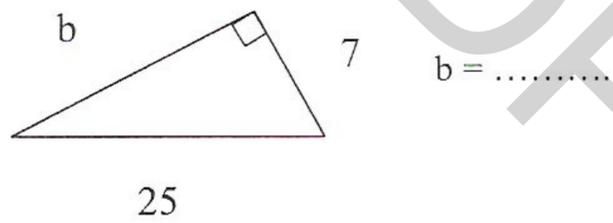
3.



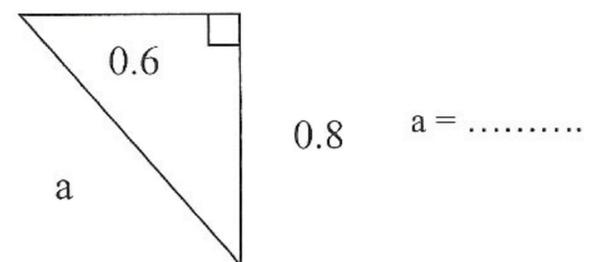
4.



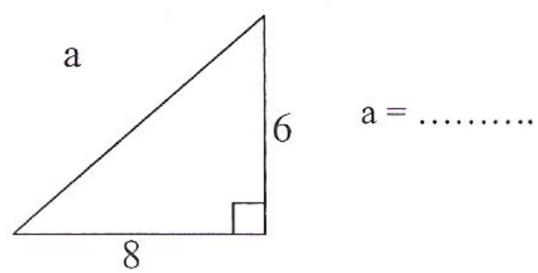
5.



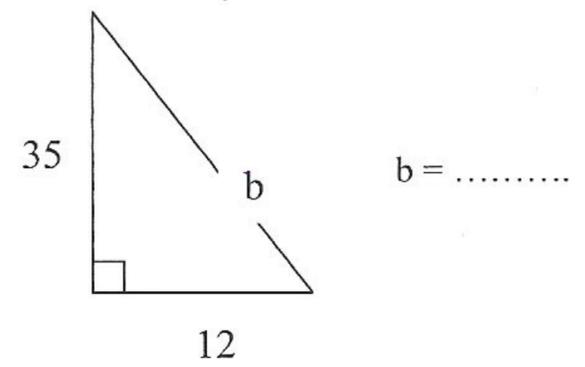
6.



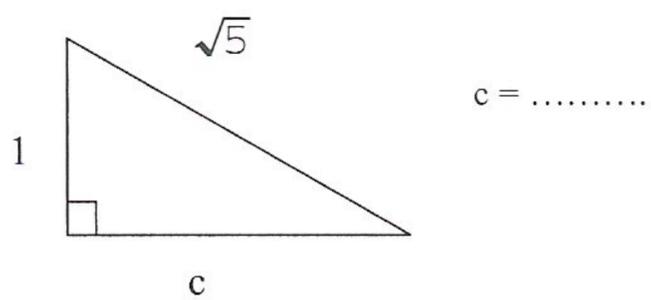
7.



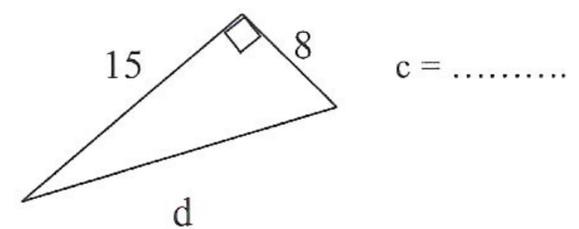
8.

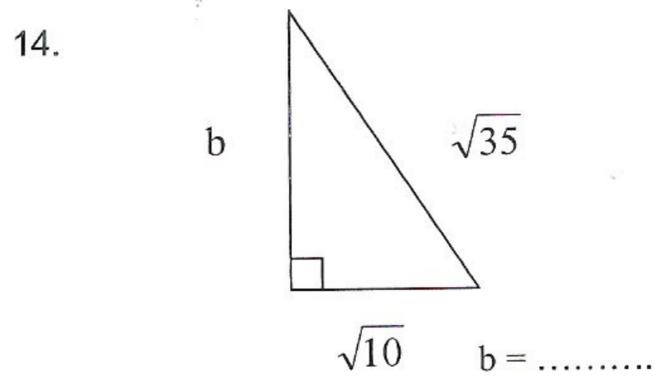
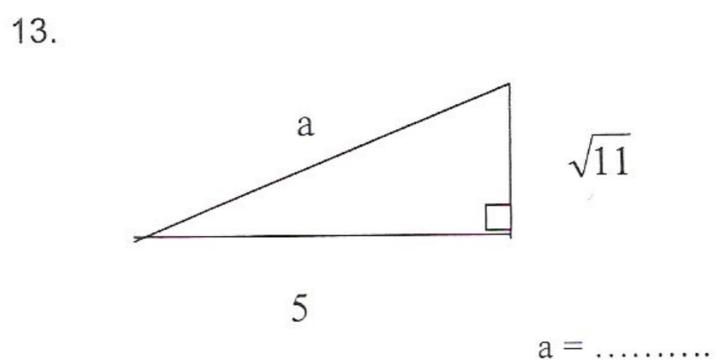
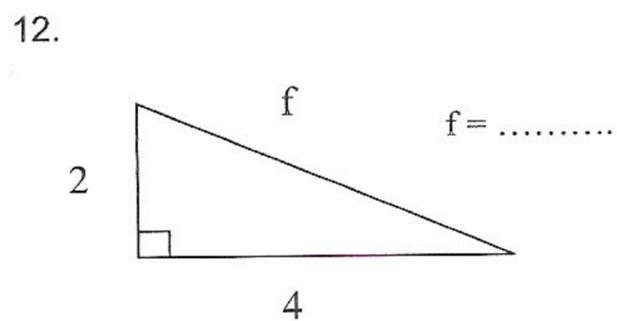
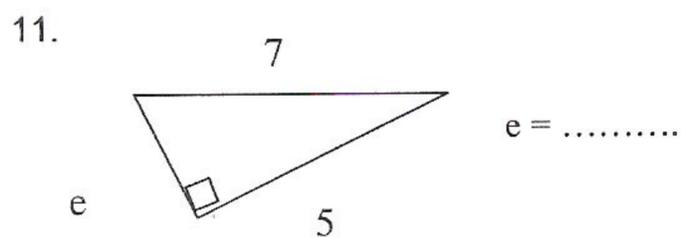


9.

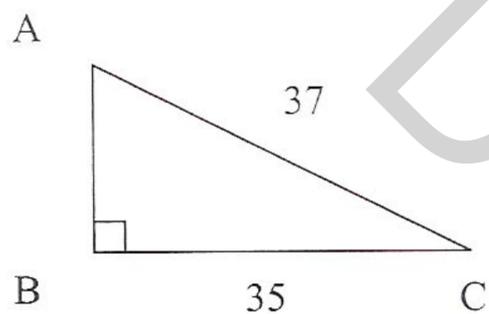


10.

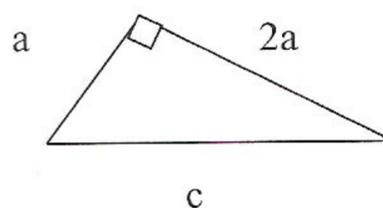




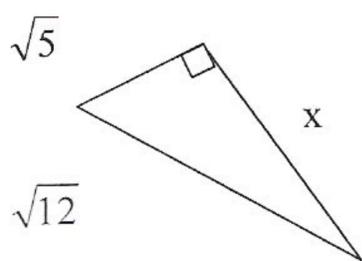
15. จากรูป $\triangle ABC$ มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย



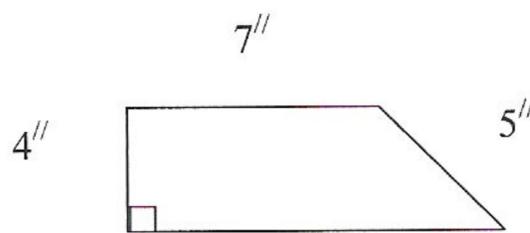
16. จากรูปจงหาความยาวของ c



17. จงหาความยาวของด้านที่เหลือ



18. จงหาความยาวของเส้นรอบรูป



บทที่ 5

เอกนามและพหุนาม

จุดประสงค์การเรียนรู้ มุ่งให้นักศึกษา

1. บอกความหมายของเอกนามได้
2. บอกความหมายของพหุนามได้
3. เขียนพหุนามให้อยู่ในรูปผลสำเร็จได้

DPU

เอกนามและพหุนาม

5.1 เอกนาม เอกนามคือนิพจน์ที่เขียนอยู่ในรูปการคูณของค่าคงที่กับตัวแปร ตั้งแต่ 1 ตัวขึ้นไป

เช่น $-5x^2y^3, \frac{1}{2}a^3b^2c^4, -9m, \sqrt{7}$

5.1.1 สัมประสิทธิ์ของเอกนาม คือค่าคงที่ที่คูณอยู่กับตัวแปร

5.1.2 กำลังของเอกนาม คือผลบวกของเลขชี้กำลังของแต่ละตัวแปรที่ประกอบเป็นเอกนาม

เช่น $-\sqrt{3}$ สัมประสิทธิ์ของเอกนามคือ $-\sqrt{3}$ กำลังคือ 0

$\frac{1}{2}x$ สัมประสิทธิ์ของเอกนามคือ $\frac{1}{2}$ กำลังคือ 1

$9x^2y^3z$ สัมประสิทธิ์ของเอกนามคือ 9 กำลังคือ 6

5.1.3 เอกนามคล้าย เอกนามใดๆ จะคล้ายกันก็ต่อเมื่อ

1. เอกนามเหล่านั้นมีตัวแปรชุดเดียวกัน
2. แต่ละตัวแปรที่เหมือนกันต้องมีเลขชี้กำลังเท่ากัน

$6x^2y^3z^4, -3x^2y^3z^4, \frac{3}{4}x^2y^3z^4$ เป็นเอกนามคล้าย

x^3y^4, x^4y^3 ไม่เป็นเอกนามคล้าย

5.2 การบวกและการลบเอกนาม การบวกและการลบเอกนามมีหลักดังนี้

1. เอกนามที่สามารถบวกและลบกันได้ต้องเป็นเอกนามที่คล้ายกัน
2. หาผลลัพธ์ได้จากการนำสัมประสิทธิ์มาบวกลบกัน ส่วนตัวแปรยังเป็นชุดเดิม

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $9xy - 3xy + 8xy$

วิธีทำ $9xy - 3xy + 8xy = (9 - 3 + 8)xy = 14xy$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $2x^3y + 5x^3y - 4x^3y$

วิธีทำ $2x^3y + 5x^3y - 4x^3y = (2 + 5 - 4)x^3y = 3x^3y$

5.3 การคูณและการหารเอกนาม การคูณและการหารเอกนามมีวิธีการทำดังนี้

1. นำสัมประสิทธิ์ของแต่ละเอกนามมาคูณหรือหารกัน
2. นำส่วนที่เป็นตัวแปรมาคูณหรือหารกันโดยใช้สมบัติของเลขยกกำลัง

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\left(\frac{1}{2}a^5b^3c\right)(6a^4b^7c^3)$

วิธีทำ $\left(\frac{1}{2}a^5b^3c\right)(6a^4b^7c^3) = \frac{1}{2} \times 6a^5 \cdot a^4b^3b^7c \cdot c^3 = 3a^9b^{10}c^4$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $(3xy^2)(-2x^2y^4)$

วิธีทำ $(3xy^2)(-2x^2y^4) = (3)(-2)(x \cdot x^2)(y^2 \cdot y^4)(z) = -6x^3y^6z$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $(-3a^2b^2)(-2a^3b)(-bc^8)$

วิธีทำ $(-3a^2b^2)(-2a^3b)(-bc^8) = (-3)(-2)(-1)(a^2 \cdot a^3)(b^2 \cdot b \cdot b)(c^8) = -6a^5b^4c^8$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $(18x^6y^3z^2) \div (9x^4y^3z)$

วิธีทำ $\frac{18x^6y^3z^2}{9x^4y^3z} = \frac{18}{9} \cdot \frac{x^6}{x^4} \cdot \frac{y^3}{y^3} \cdot \frac{z^2}{z} = 2x^2z$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าของ $\frac{(a^3b^2c)^3}{(3ab^3c)^4}$

วิธีทำ $\frac{(a^3b^2c)^3}{(3ab^3c)^4} = \frac{a^9b^6c^3}{3^4a^4b^{12}c^4} = \frac{a^5}{81b^6c}$

แบบฝึกหัดที่ 1

จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

1. $2^3 \cdot 3^4$

2. $2^3 + 3^2$

3. $(3 - 7)^3$

4. $-(-2)^4$

5. $(-2)^2(-3)^3$

6. $(-3)^2(-4)^2$

7. $-2^3 xy^2(3x^3 y^2)$

8. $-2^2 ab^3(3a^2 b)(-a^4)$

9. $5a^2 b(-3a^3 b^2)(-2^2 b^4 c^2)$

10. $a^4 b(-2^3 b^3 c)(-3ab^2 c^3)$

11. $(-2^2 ab^3)^3 (-2^3 a^3 c)^2 (bc^2)^4$

12. $(2x^3 y)^3 (3xy^2)^2$

13. $(-3a^2 b^2)^2 (-2a^3 b)^3 (-bc^2)^4$

14. $(3ab)^3 (-ab^2)^2 + a^2 b(-2ab^2)^3$

5.4 พหุนาม พหุนามคือนิพจน์ที่สามารถเขียนในรูปเอกนามหรือการบวกของเอกนามตั้งแต่สองเอกนามขึ้นไป เช่น $-\sqrt{5}, \frac{3}{4}a, 4x+12y, 2x^3y^4z-3x^2y+4y^2z^3$

5.4.1 กำลังของพหุนาม คือกำลังสูงสุดของเอกนามในพหุนามนั้น
เช่น

$$2x^3y^4z-3x^2y+4y^2z^3 \quad \text{เป็นพหุนามกำลัง } 8$$

5.4.2 พหุนามในรูปสำเร็จ คือพหุนามที่ไม่มีเอกนามคล้ายกันประกอบอยู่

5.5 การบวกและการลบพหุนาม การบวกและการลบพหุนามใช้หลักการเกี่ยวกับการบวกและการลบเอกนาม คือนำสัมประสิทธิ์ของเอกนามที่คล้ายกันมาบวกลบกัน

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $(4a-7a+13)+(6a^2+2a-9)$
 $(4a^2-7a+13)+(6a^2+2a-9)=4a^2+6a^2-7a+2a+13-9=10a^2-5a+4$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $(2x^3-3x^2y-5xy^2+y^3)-(x^3-6x^2y)+4xy^2-6y^3$
 วิธีทำ $=2x^3-x^3-3x^2y+6x^2y-5xy^2-4xy^2+y^3+6y^3$
 $=x^3+3x^2y-9xy^2+7y^3$

ตัวอย่างที่ 3 จงลบ $4a-3b+c$ จาก $5a+2b-3c$
 วิธีทำ $=(5a+2b-3c)-(4a-3b+c)$
 $=(5a-4a)+(2b+3b)+(-3c-c)$
 $=a+5b-4c$

5.6 การคูณเอกนามกับพหุนาม หาผลคูณของเอกนามกับทุกๆ พจน์ของพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง

เช่น $a(b+c)=ab+ac$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $3a^2(4ab+2a^2b^2-9a^3b^4)$

วิธีทำ

$$3a^2(4ab+2a^2b^2-9a^3b^4)=(3a^2)(4ab)+(3a^2)(2a^2b^2)+(3a^2)(-9a^3b^4)$$

$$=12a^3b+6a^4b^2-27a^5b^4$$

ตัวอย่างที่ 5 จงคูณ $ab^2 - 2b - 3a^2$ ด้วย $2ab^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 2ab^2(ab^2 - 2b - 3a^2) &= (2ab^2)(ab^2) + (2ab^2)(-2b) + (2ab^2)(-3a^2) \\ &= 2a^2b^4 - 4ab^3 - 6a^3b^2 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6 จงคูณ $x^2 + x - 3$ ด้วย x^{n+1} กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} x^{n+1}(x^2 + x - 3) &= x^{n+1} \cdot x^2 + x^{n+1} \cdot x + x^{n+1}(-3) \\ &= x^{n+3} + x^{n+2} - 3x^{n+1} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7 จงคูณ $-2ab^2 - 5a^2b + 7$ ด้วย $(-3a^2b)^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} (-3a^2b)^2(-2ab^2 - 5a^2b + 7) &= 9a^4b^2(-2ab^2 - 5a^2b + 7) \\ &= (9a^4b^2)(-2ab^2) + (9a^4b^2)(-5a^2b) + (9a^4b^2)(7) \\ &= -18a^5b^4 - 45a^6b^3 + 63a^4b^2 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 8 จงคูณ $2(x+y)^2 - (x+y) + 4$ ด้วย $(x+y)$

วิธีทำ

$$(x+y)\{2(x+y)^2 - (x+y) + 4\} = 2(x+y)^3 - (x+y)^2 \cdot 4(x+y)$$

แบบฝึกหัด 2

จงพิจารณาผลบวกต่อไปนี้

1. $2a^2 + a$ กับ $2a^2 + 4a$
2. $4m^3 + 1$ กับ $2m^3 - 3m + 4$
3. $a^2 + a + 3$ กับ $5a^2 - 3$
4. $4c^3 - 5c^2 + 3c - 4$ กับ $3c^3 + 4c^2 + 2$
5. $x^2 - 3xy + 5y^2$ กับ $4x^2 + 5xy - y^2$
6. $4x^2 - 5xy + 3x^2y - 2x$ กับ $7x^2 - 3xy + 4x^2y$

จงพิจารณาผลลบต่อไปนี้

1. $4m^2 - 2m + 3$ กับ $5m^2 - 4m$
2. $3a^2 - 5b^2 + ab$ กับ $2a^2 - 3b^2 - 4$
3. $4y^2 - 2y + ab$ กับ $3y^2 + 3y + 4$
4. $6x^2 + 3xy - 4$ กับ $3x^2 - 4xy + 10$
5. $6x^2 + 3xy - 4$ กับ $3x^2 - 4xy + 10$
6. $3x^2 - x - 4x^3 - 5$ กับ $4x^3 - 5 + x - 3x^2$

จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

1. $(a^2 - b^2) + (ab^2 - a^2b)$
2. $(3d - 4) + (2d + 3) + (4d + 1)$
3. $(2x^4 - 3x^3 + x^2 + 5) - (x^3 - 2x^2 - 2x + 1)$
4. $(4m - 2n) + (3m - n) - (m + 2n - 1)$
5. $(3t^4 - 3t^3 + 3t - 2) - (-5t^3 + 2t^2 + 5)$
6. $(3a^2 + 2a + 4) + (-3a^2 + 2a - 4) - (5a^2 + 100)$

จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

1. $-7a(a^2 + 3)$
2. $-a(3a^2 - a)$
3. $-2xy(x^2 - y^2 + 5)$
4. $-3xy^2(2x^3 + y^2 - 2xy)$
5. $x^{n+1}(x^{2n} - x^n - 2)$
6. $x^{n+1}(x^{n+2} - x^{n+1} - 2x^n)$
7. $(x+y)[(x+y)^2 - 3(x+y) - 2]$
8. $(x-y)[(x-y)^2 - 3(x-y) - 2]$
9. $3a^3(2a^2 + a - 4) - 3a^2(a^2 - 4a - 1)$

5.7 การคูณพหุนามกับพหุนาม นำแต่ละพจน์ของพหุนามหนึ่งคูณทุกพจน์ของอีกพหุนามหนึ่ง แล้วนำผลคูณมาบวกกลับกันให้เป็นพหุนามในรูปผลสำเร็จ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $(5x + 12y)(8x + 3y)$

$$\begin{array}{r} \text{วิธีทำ} \quad 5x + 12y \\ \quad \quad \quad 8x + 3y \\ \hline 40x^2 + 96xy \\ \quad \quad \quad + 15xy + 36y^2 \\ \hline \underline{40x^2 + 111xy + 36y^2} \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ $(3xy^2 - 4x^2y)$ และ $(x^2 - 7xy + y^2)$

$$\begin{array}{r} \text{วิธีทำ} \quad x^2 - 7xy + y^2 \\ \quad \quad \quad 3xy^2 - 4x^2y \\ \hline 3x^3y^2 - 21x^2y^3 + 3xy^4 \\ \quad \quad \quad 28x^3y^2 - 4x^2y^3 - 4x^4y \\ \hline \underline{31x^3y^2 - 25x^2y^3 + 3xy^4 - 4x^4y} \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $(2x^2 - x + 3)(2x - 5)$

$$\begin{array}{r} \text{วิธีทำ} \quad 2x^2 - x + 3 \\ \quad \quad \quad 2x - 5 \\ \hline 4x^3 - 2x^2 + 6x \\ \quad \quad \quad - 10x^2 + 5x - 1 \\ \hline \underline{4x^3 - 12x^2 + 11x - 5} \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงคูณ $(2x^{n+1} - x^n + 1)$ ด้วย $(3x - 2)$

$$\begin{array}{r} \text{วิธีทำ} \quad 2x^{n+1} - x^n + 1 \\ \quad \quad \quad 3x - 2 \\ \hline 6x^{n+2} - 3x^{n+1} + 3x \\ \quad \quad \quad - 4x^{n+1} + 2x^n - 2 \\ \hline \underline{6x^{n+2} - 7x^{n+1} + 2x^n + 3x - 2} \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $(3x + 2)(x - 2) - (2x - 1)^2$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad &= (3x + 2)(x - 2) - (2x - 1)^2 \\ &= 3x^2 - 4x - 4 - (4x^2 - 4x + 1) \\ &= 3x^2 - 4x - 4 - 4x^2 + 4x + 1 \\ &= -x^2 - 5 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 3

จงหาคำของ

1. $(a + b)(a - b)$

2. $(a + b)(a + b)$

3. $(a - b)(a - b)$

4. $(a + b)^3$

5. $(a - b)^3$

6. $(x - 3)(x + 3)$

7. $(4x - 3)(x - 2)$

8. $(2x + 1)(8 - 3x)$

9. $(2x + 3)(3 - 4x)$

10. $(x + 6)^2$

11. $(3x + y)^2$

12. $(5x - 4y)^2$

13. $(4x - 3y)(2x - 3y)$

14. $(2x^2 + 1)(3x^3 + 2)$

15. $(x^n - 4)(x^n - 2)$

16. $(2x - 3)(x^2 - 4x + 3)$

17. $(x^2 - 3x - 2)(x^2 + 3x + 2)$

18. $(x^2 + 3x - 4)(2x^2 + x + 5)$

19. $(3x^2 - 2x + 3)(2x^2 - 3x - 4)$

20. $(8 - 3y^2)(2xy - 4xy^3)$

ข้อสังเกต

1. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

4. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

5. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

6. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

7. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

8. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

9. $(a - b) = -(b - a)$

10. $(a - b)^2 = [-(b - a)]^2 = (b - a)^2$

11. $(a - b)^3 = [-(b - a)]^3 = -(b - a)^3$

5.8 การหารพหุคูณด้วยเอกนาม นำเอกนามที่เป็นตัวหารไปหารแต่ละพจน์ของพหุคูณที่เป็นตัวตั้ง ถ้าผลหารเป็นพหุคูณแสดงว่าเป็นการหารลงตัว ถ้าผลหารไม่เป็นพหุคูณแสดงว่าเป็นการหารไม่ลงตัว

$$\frac{\text{ตัวตั้ง}}{\text{ตัวหาร}} = \text{ผลหาร} + \frac{\text{เศษ}}{\text{ตัวหาร}}$$

$$\text{ตัวตั้ง} = (\text{ผลหาร} \times \text{ตัวหาร}) + \text{เศษ}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $(6x^4 - 3x^3 + 10x^2) \div (2x^2)$

วิธีทำ
$$\frac{(6x^4 - 3x^3 + 10x^2)}{2x^2} = \frac{6x^4}{2x^2} - \frac{3x^3}{2x^2} + \frac{10x^2}{2x^2}$$

$$= 3x^2 - \frac{3}{2}x + 5$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\frac{4x^2y^3z^4 + 7x^4y^2z^3 - 5x^3yz}{x^2y^2z^2}$

วิธีทำ
$$= \frac{4x^2y^3z^4}{x^2y^2z^2} + \frac{7x^4y^2z^3}{x^2y^2z^2} - \frac{5x^3yz}{x^2y^2z^2}$$

$$= 4yz^2 + 7x^2z - \frac{5x}{yz}$$

$$= 4yz^2 + 7x^2z - 5x(yz)^{-1}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\frac{(x-1)^2}{(1-x)^3}$

วิธีทำ
$$\frac{(x-1)^2}{(1-x)^3} = \frac{(x-1)^2}{-(x-1)^3}$$

$$= \frac{1}{-(x-1)}$$

$$= \frac{1}{1-x}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\left[\frac{3x^5yz}{6x^3y^2}\right]^4$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\left[\frac{3x^5yz}{6x^3y^2}\right]^4 &= \left[\frac{3}{6} \cdot \frac{x^5}{x^3} \cdot \frac{y}{y^2} \cdot \frac{z}{1}\right]^4 \\ &= \left[\frac{x^2z}{2y}\right]^4 \\ &= \frac{x^8z^4}{16y^4}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $\frac{(18)^4}{(24)^3}$

วิธีทำ
$$\frac{(18)^4}{(24)^3} = \frac{(2 \cdot 3^2)^4}{(2^3 \cdot 3)^3} = \frac{2^8 3^8}{2^9 3^3} = \frac{3^5}{2^1} = \frac{243}{2}$$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $\frac{(a^3b^2c)^3}{(3ab^3c)^4}$

วิธีทำ
$$\frac{(a^3b^2c)^3}{(3ab^3c)^4} = \frac{a^9b^6c^3}{3^4a^4b^{12}c^4} = \frac{a^5}{81b^6c}$$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าของ $24a^{14} \div (-2a^2)^3 - a^2(-a^3)^2$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}&= \frac{24a^{14}}{(-2a^2)^3} - a^2(-a^3)^2 \\ &= \frac{24a^{14}}{-2^3a^6} - a^2(a^6) \\ &= -3a^8 - a^8 \\ &= -4a^8\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 4

จงหาค่าของ

1. $\frac{(-5)^6}{54}$

2. $\frac{-3^4}{(-3)^4}$

3. $\frac{a^{10}}{a^6}$

4. $\frac{a^3}{a^9}$

5. $\frac{(x+2y)^2}{(x+2y)^3}$

6. $\frac{(x-y)^2}{y-x}$

7. $\frac{(2x+y)}{(y+2x)^8}$

8. $\frac{(x-y)^4}{(y-x)^5}$

9. $\left(2\frac{2}{3}\right)^2$

10. $\left(3\frac{3}{4}\right)^2$

11. $\left[\frac{22a^2b^3c}{33a^4bc^3}\right]^4$

12. $\left[\frac{16a^3bc^5}{24a^2bc^7}\right]^3$

13. $\left[\frac{a^3b^2(x-y)^2}{ab^3(y-x)^3}\right]^2$

14. $a^7 \div a^3 + a^2(-2a)^2$

15. $6a^8 \div a^3 + 4a^2(-a)^3$

16. $(2a^4b^3)^4 \div (-2a^2b)^3 - (a^3b^2)^5 \div (-a^5b)$

$$17. \frac{a^4 - 3a^3b - a^2b^2}{-ab}$$

$$18. \text{ จงหาร } [6(x-y)^3 - 2(x-y)^2] \text{ ด้วย } 2(y-x)$$

$$19. \text{ จงหาค่าของ } (6x^4 - 3x^3 + 9x^2) \div (3x^2) - (2x+3)(x-4)$$

$$20. \frac{4x+2}{2}$$

$$21. \frac{6x+4x^2}{2x}$$

$$22. \frac{5x-15x^2}{5x}$$

$$23. \frac{9x^2+3x^3}{3x^2}$$

$$24. \frac{7a^2b^3 - 14a^3b^2}{-7a^3b^3}$$

$$25. \frac{6x^2 - 9x + 3}{-3x}$$

$$26. \frac{3a^3b + 6a^2b^2 - 9ab^3}{-3a^3b^3}$$

$$27. \frac{9(a+b)^2 - 3(a+b)}{3(b+a)}$$

$$28. (x^{n+2} - 3x^{n+1} + x^n) \div x^n$$

$$29. (12x^4 - 3x^3 - 9x^2) \div (3x^2) - 2(x+3)(2x-1)$$

5.9 การหารพหุนามด้วยพหุนาม ให้ทำตามลำดับขั้นตอนต่อไปนี้

1. เรียงกำลังของตัวตั้ง และตัวหารจากมากไปน้อย หรือจากน้อยไปมาก กำลังของตัวตั้งตัวใดขาดหายไปให้ใส่ให้ครบโดยพจน์นั้นมีสัมประสิทธิ์เป็น 0
2. นำพจน์แรกของตัวหารไปหารพจน์แรกของตัวตั้ง ผลหารที่ได้เป็นพจน์แรกของผลลัพธ์
3. นำผลลัพธ์ในข้อ 2 คูณตัวหารทุกตัว เอาผลคูณไปลบออกจากตัวตั้ง ผลลบที่ได้จะเป็นตัวตั้งใหม่
4. ทำการหารเช่นเดียวกับ ข้อ 2-3 สำหรับตัวตั้งใหม่
5. การหารจะสิ้นสุดเมื่อตัวตั้งใหม่เป็นศูนย์ (แสดงว่าหารลงตัว) หรือตัวตั้งใหม่เป็นพหุนามที่มีกำลังน้อยกว่าตัวหาร ซึ่งจะเป็นเศษของการหาร (แสดงว่าหารไม่ลงตัว)

ตัวอย่างที่ 1 หาร $8x^3 - 18x^2 + 13x - 6$ ด้วย $2x - 3$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r}
 4x^2 - 3x + 2 \\
 2x - 3 \overline{) 8x^3 - 18x^2 + 13x - 6} \\
 \underline{8x^3 - 12x^2} \\
 -6x^2 + 13x \\
 \underline{-6x^2 + 9x} \\
 4x - 6 \\
 \underline{4x - 6} \\
 0
 \end{array}$$

$$\therefore \frac{8x^3 - 18x^2 + 13x - 6}{2x - 3} = 4x^2 - 3x + 2$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาร $8x^2 - 9x^3 + 2x^5 - 8x + 4$ ด้วย $2x^2 - 3 + 4x$
วิธีทำ

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 2x^2 + x - 1 \\
 2x^2 + 4x - 3 \overline{) 2x^5 + 0x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 8x + 4} \\
 \underline{2x^5 + 4x^4 - 3x^3} \\
 -4x^4 - 6x^3 + 8x^2 \\
 \underline{-4x^4 - 8x^3 + 6x^2} \\
 2x^3 + 2x^2 - 8x \\
 \underline{2x^3 + 4x^2 - 3x} \\
 -2x^2 - 5x + 4 \\
 \underline{-2x^2 - 4x + 3} \\
 -x + 1
 \end{array}$$

$$\therefore \frac{8x^2 - 9x^3 + 2x^5 - 8x + 4}{2x^3 - 3 + 4x} = x^3 - 2x^2 + x - 1 + \frac{-x + 1}{2x^2 + 4x - 3}$$

หรือเศษ $-x + 1$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาร $(x^2y^3 - 7x^4y + 2x^5 + y^5 - 3xy^4)$ ด้วย
 $2x^2 + y^2 - xy$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2y - 2xy^2 + y^3 \\
 2x^2 - xy + y^2 \overline{) 2x^5 - 7x^4y + 0x^3y^2 + x^2y^3 - 3xy^4 + y^5} \\
 \underline{2x^5 - x^4y + x^3y^2} \\
 -6x^4y - x^3y^2 + x^2y^3 \\
 \underline{-6x^4y + 3x^3y^2 - 3x^2y^3} \\
 -4x^3y^2 + 4x^2y^3 - 3xy^4 \\
 \underline{-4x^3y^2 + 2x^2y^3 - 2xy^4} \\
 2x^2y^3 - xy^4 + y^5 \\
 \underline{2x^2y^3 - xy^4 + y^5} \\
 0
 \end{array}$$

$$\therefore \frac{2x^5 - 7x^4y + x^2y^3 - 3xy^4 + y^5}{2x^2 - xy + y^2} = x^3 - 3x^2y - 2xy^2 + y^3$$

แบบฝึกหัด 5

จงหาคำของ

1.
$$\frac{x^2+10x+16}{x+2}$$

2.
$$\frac{16x^2-17x+12}{2x-3}$$

3.
$$\frac{2x^3+x^2-x+3}{x^2-x+1}$$

4.
$$\frac{12x^3+x^2-22x-12}{3x^2-2x-4}$$

5.
$$\frac{2x^5-17x^3+7x^2-10x+3}{2x^2+6x-1}$$

6.
$$\frac{6x^5-7x^4-5x-2}{2x^2-x-2}$$

7.
$$\frac{x^2+x+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}$$

8.
$$\frac{25x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}{5x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}}$$

9.
$$\frac{x^2-y^2}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$$

10.
$$\frac{8x-18x^{\frac{1}{2}}+9}{4x^{\frac{1}{2}}-3}$$

5.10 ทฤษฎีเศษเหลือ

ถ้าหารพหุนาม $P(x)$ ที่มีกำลังตั้งแต่หนึ่งขึ้นไปด้วยพหุนาม $x-r$ เมื่อ r เป็นจำนวนใด ๆ และเศษจะเท่ากับ $P(r)$ และถ้า $P(r) = 0$ แสดงว่าการหารลงตัว

ตัวอย่างที่ 1 จงใช้ทฤษฎีเศษเหลือหาค่าเศษจากการหาร $4x^3 - 5x^2 + 15$ ด้วย $x-2$ ในที่นี้ $r = 2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\therefore p(x) &= 4x^3 - 5x^2 + x + 15 \\ \therefore p(2) &= 4(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 15 \\ &= 32 - 20 + 15 \\ &= 29\end{aligned}$$

ตรวจสอบ

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 3x + 8 \\ x-2 \overline{) 4x^3 - 5x^2 + x + 15} \\ \underline{4x^3 - 8x^2} \\ 3x^2 + x \\ \underline{3x^2 - 6x} \\ 7x + 15 \\ \underline{7x - 14} \\ \underline{ 29} \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงใช้ทฤษฎีเศษเหลือหาค่าเศษจากการหาร $(x^4 - 14x^3 - 6x^2 + 102x + 60)$ ด้วย $(x-3)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\therefore p(x) &= x^4 - 14x^3 - 6x^2 + 102x + 60 \\ \therefore p(3) &= 3^4 - 14(3)^3 - 6(3)^2 + 102(3) + 60 \\ &= 81 - 14(27) - 6(9) + 306 + 60 \\ &= 15\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 6

ในข้อต่อไปนี้จะใช้ทฤษฎีเศษเหลือหาค่าเศษจากการหาร

1. $(x^3 - 9x^2 + 27x - 20) \div (x - 4)$

2. $(2x^3 + x^2 - 9x + 12) \div (x + 3)$

3. $(x^3 - 4x^2 - 26x + 0) \div (x - 7)$

4. $(3x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 5x - 12) \div (x - 2)$

5. $(x^4 - x^3 - x^2 - 1) \div (x + 1)$

6. $(x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 10x - 10) \div (x - 1)$

7. $(4x^3 - 11x^2 - 5x + 8) \div (x - 3)$

8. $(6x^3 + 15x^2 - 8x + 5) \div (x + 3)$

9. $(x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 7x - 6) \div (x + 2)$

10. $(3x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + 3) \div (x + 1)$

บทที่ 6

การแยกตัวประกอบ

จุดประสงค์การเรียนรู้ มุ่งให้นักศึกษาสามารถ

1. แยกตัวประกอบของพหุนามได้
2. เลือกวิธีการแยกตัวประกอบมาใช้ที่เหมาะสม

DRPU

การแยกตัวประกอบ

การแยกตัวประกอบ คือ การเขียนพหุนามที่อยู่ในรูปการบวกและลบให้อยู่ในรูปของการคูณ

6.1 การแยกตัวประกอบโดยการดึงตัวร่วม

โดยทั่วไปจะหาตัวหารร่วมมากของพหุนามเหล่านั้น (ห.ร.ม.) แล้วดึงห.ร.ม. นั้นออกจากพหุนาม

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบของ $18x^5y - 24x^3y^2 + 36x^4y^3$

วิธีทำ

ห.ร.ม. ของพหุนาม คือ $6x^3y$ ก็ดึง $6x^3y$ ออกจากทุก ๆ พจน์ ได้ดังนี้

$$6x^3y \left(\frac{18x^5y}{6x^3y} - \frac{24x^3y^2}{6x^3y} + \frac{36x^4y^3}{6x^3y} \right) = (6x^3y)(3x^2 - 4y) + 6xy^2$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $16x^2(x-2)^2 - 24x(x-2)^3$

วิธีทำ

ห.ร.ม. คือ $8x(x-2)^2$

$$\begin{aligned} \therefore 16x^2(x-2)^2 - 24x(x-2)^3 &= 8x(x-2)^2 \left[\frac{16x^2(x-2)^2}{8x(x-2)^2} - \frac{24x(x-2)^3}{8x(x-2)^2} \right] \\ &= 8x(x-2)^2 [2x - 3(x-2)] \\ &= 8x(x-2)^2 [2x - 3x + 6] \\ &= 8x(x-2)^2 (6-x) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $12x - (x-3)^2 + 8x^2(3-x)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 12x(x-3)^2 + 8x^2(3-x) &= 12x(x-3)^2 - 8x^2(x-3) \\ &= 4x(x-3)[3(x-3) - 2x] \\ &= 4x(x-3)(x-9) \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 1

จงแยกตัวประกอบ

1. $7x+7$
2. $8x+4$
3. $18x+27$
4. $4x-8$
5. $15x-5$
6. $8-16x$
7. $18-12x$
8. $6x^2+3x$
9. $9x-18x^2$
10. $3xy-6y$
11. $xy+x^2$
12. $3x^2-6x^2y$
13. $16xy^2+24y^3$
14. $12x^4-12x^3$
15. $27x^3-18x^2$
16. $12x^5-24x^4$
17. $6x^2-12x+18$
18. x^3-x^2+x
19. $6x^3+9x^2-3x$
20. $5(3x+1)+x(3x+1)$
21. $(x+6)^2+(x+6)$
22. $4(x+1)^2+8(x+1)$
23. $10(x+3)^2+5(x+3)^3$
24. $2(x-4)^2+6(x-4)$
25. $4(x-1)^2+12(x-1)$
26. $x^2(x+2)^2-x^3(x+2)$
27. $3x^2(3x+1)-6x(3x+1)^2$
28. $(x+3)(x-2)-2(x+5)(x-2)$
29. $(x-4)(x-1)-3(x+3)(x-1)$
30. $6x(3x-1)-12x^2(1-3x)$

6.2 การแยกตัวประกอบโดยใช้สูตรยกกำลังสอง

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ

1. $4x^2-25$
2. x^4-16y^2
3. $3x^2y^2-3x^4$
4. $x^2-9(y-2)^2$

วิธีทำ

1. $4x^2-25 = (2x)^2 - (5)^2 = (2x+5)(2x-5)$
2. $x^4-16y^2 = (x^2)^2 - (4y^2)^2$
 $= (x^2+4y^2)(x^2-4y^2)$
 $= (x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)$
3. $3x^2y^2-3x^4 = 3x^2(y^2-x^2)$
 $= 3x^2(y+x)(y-x)$

$$4. x^2 - 9(y-2)^2 = [x+3(y-2)][x-3(y-2)] \\ (x+3y-6)(x-3y+6)$$

6.3 การแยกตัวประกอบโดยใช้สูตรยกกำลังสาม

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ

1. $8x^3 + 1$
2. $64 + b^3$
3. $(a+b)^3 + c^3$
4. $54a^3 + 16b^3$
5. $x^6 + y^6$

วิธีทำ

$$1. 8x^3 + 1 = (2x+1)(4x^2 - 2x + 1)$$

$$2. 64 + b^3 = (4+b)(16 - 4b + b^2)$$

$$3. (a+b)^3 + c^3 = [(a+b)+c][(a+b)^2 - c(a+b) + c^2]$$

$$4. 54a^3 + 16b^3 = 2(27a^3 + 8b^3) \\ = 2(3a+b)(9a^2 - 6ab + 4b^2)$$

$$5. x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$$

6.4 การแยกตัวประกอบโดยใช้สูตรยกกำลังสาม

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ

1. $a^3 - 64$
2. $27x^3 - 1$
3. $16x^3 - 250y^3$
4. $8x^3 - (3y-1)^3$

วิธีทำ

$$1. a^3 - 64 = (a-4)(a^2 + 4a + 16)$$

$$2. 27x^3 - 1 = (3x-1)(9x^2 + 3x + 1)$$

$$3. 16x^3 - 250y^3 = 2(8x^3 - 125y^3) \\ = 2(2x-5y)(4x^2 + 10xy + 25y^2)$$

$$4. 8x^3 - (3y-1)^3 = [2x - (3y-1)][4x^2 + 2x(3y-1) + (3y-1)^2]$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $x^6 - y^6$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } x^6 - y^6 &= (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) \\ &= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2) \\ &= (x + y)(x - y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2) \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 2

จงแยกตัวประกอบ

- | | | |
|--------------------|-----------------------|-----------------------------|
| 1. $x^2 - 4$ | 14. $9x^2 - 36y^2$ | 27. $(x - 3y)^3 + (3y - x)$ |
| 2. $x^2 - 81$ | 15. $x^3 - x$ | 28. $x^3 + 27$ |
| 3. $x^2 - 144$ | 16. $4 - x^4$ | 29. $x^3 - 8$ |
| 4. $x^2 + 16$ | 17. $x^4 - x^2$ | 30. $3x^3y^6 + 81$ |
| 5. $1 - x^2$ | 18. $2x^4 - 18x^2y^2$ | 31. $x^4 + 8x$ |
| 6. $169 - x^2$ | 19. $x^4 - 81y^4$ | 32. $64 - x^6$ |
| 7. $9x^2 - 4$ | 20. $81x^4 - 16y^4$ | 33. $(x + 1)^3 + y^3$ |
| 8. $4x^2 - 121$ | 21. $x^8 - 256y^4$ | 34. $(x - 1)^3 - 8y^3$ |
| 9. $4 - x^2y^2$ | 22. $64 - 4x^4$ | 35. $x^3 + (y + 2)^3$ |
| 10. $25 - 16x^2$ | 23. $162x^4 - 32$ | |
| 11. $4x^2 - 9y^2$ | 24. $(2x - y)^2 - 9$ | |
| 12. $3x^2 - 12y^2$ | 25. $(x - 2y)^2 - 36$ | |
| 13. $36x^2 - 4y^2$ | 26. $5(x - y)^2 - 45$ | |

6.5 การแยกตัวประกอบโดยการเดาพจน์ท้ายและพจน์กลาง

พหุนามที่อยู่ในรูป $x^2 + bx + c$ เมื่อ $b, c \in I$ จะแยกตัวประกอบได้โดยพิจารณา

$$\begin{aligned} x^2 + (m + n)x + mn &= (x + m)(x + n) \\ x^2 + (-m - n)x + mn &= (x - m)(x - n) \\ x^2 + (m - n)x - mn &= (x + m)(x - n) \\ x^2 + (-m + n)x - mn &= (x - m)(x + n) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ

- $x^2 + 6x + 8$
- $x^2 - 11x + 24$
- $x^2 + 16x - 36$
- $x^2 - 4x - 12$

วิธีทำ

$$1. x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$$

$$2. x^2 - 11x + 24 = (x-3)(x-8)$$

$$3. x^2 + 16x - 36 = (x+18)(x-2)$$

$$4. x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2)$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $y^4 - 3y^2 - 10$

$$\text{วิธีทำ } y^4 - 3y^2 - 10 = (y^2 - 5)(y^2 + 2)$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $y^4 - 29y^2 + 100$

$$\text{วิธีทำ } y^4 - 29y^2 + 100 = (y^2 - 4)(y^2 - 25) = (y+2)(y-2)(y+5)(y-5)$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $4x^2 + 28xy - 32y^2$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } 4x^2 + 28xy - 32y^2 &= 4(x^2 + 7xy - 8y^2) \\ &= 4(x+8y)(x-y) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $(a-2b)^2 + (a-2b) - 12$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } (a-2b)^2 + (a-2b) - 12 &= [(a-2b)-3][(a-2b)+4] \\ &= (a-2b-3)(a-2b+4) \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 3

จงแยกตัวประกอบ

$$1. x^2 + 5x + 6$$

$$2. x^2 + 4x + 4$$

$$3. x^2 + 9x + 18$$

$$4. x^2 + 9x - 36$$

$$5. x^2 + 3x - 54$$

$$6. x^2 + x - 72$$

$$7. x^2 - 50 + 5x$$

$$8. x^2 - 80 - 2x$$

$$9. x^2 - 11xy + 18y^2$$

$$10. x^2y^2 - 17xy + 72$$

$$11. x^4y^2 - x^2y - 42$$

$$12. x^4 - 10x^2 + 9$$

$$13. x^6 - 5x^3 + 4$$

$$14. (x-y)^2 - 3(x-y) + 2$$

6.6 การแยกตัวประกอบที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 1, a, b, c \in I$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $6x^2 - 5x - 6$

วิธีทำ ในที่นี้ลองแยกตัวประกอบของ ax^2 ในที่นี้คือ $6x^2$ ซึ่งจะแยกได้เป็น

$$\begin{array}{cc} 6x & \swarrow \searrow \\ & x \end{array} \quad \text{หรือ} \quad \begin{array}{cc} 2x & \swarrow \searrow \\ & 3x \end{array}$$

ทำนองเดียวกัน แยกตัวประกอบของ c ในที่นี้คือ 6 จะแยกได้เป็น 6×1 หรือ 3×2 ดังนั้นทางที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{cc} 6x & \rightarrow 6 \\ x & \rightarrow 1 \end{array} & \begin{array}{cc} 6x & \rightarrow 1 \\ x & \rightarrow 6 \end{array} & \begin{array}{cc} 6x & \rightarrow 2 \\ x & \rightarrow 3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 6x & \rightarrow 3 \\ x & \rightarrow 2 \end{array} & \begin{array}{cc} 2x & \rightarrow 6 \\ 3x & \rightarrow 1 \end{array} & \begin{array}{cc} 2x & \rightarrow 1 \\ 3x & \rightarrow 6 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 2x & \rightarrow 2 \\ 3x & \rightarrow 3 \end{array} & \begin{array}{cc} 2x & \rightarrow 3 \\ 3x & \rightarrow 2 \end{array} & \end{array}$$

ลองพิจารณาผลที่ได้จากการคูณแล้วบวกกลับกันเพื่อให้ได้ผลลัพธ์เท่ากับ b ในที่นี้คือ -5 จะเห็นว่าคู่ที่ใช้ได้คือ

$$\begin{array}{cc} 2x & \rightarrow 2 \\ 3x & \rightarrow 3 \end{array} \quad \text{ใส่เครื่องหมายจะได้} \quad \begin{array}{cc} 2x & \rightarrow -3 \\ 3x & \rightarrow +2 \end{array}$$

$$\text{ดังนั้น } 6x^2 - 5x - 6 = (2x - 3)(3x + 2)$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $3x^2 - 4x - 15$

วิธีทำ

$$\begin{array}{cc} 3x & \rightarrow +5 \\ x & \rightarrow -3 \end{array} \quad -9x + 5x = -4x$$

$$\text{ดังนั้น } 3x^2 - 4x - 15 = (3x + 5)(x - 3)$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $18x^2 + 3x - 36$

วิธีทำ $18x^2 + 3x - 36 = 3(6x^2 + x - 12)$

$$\begin{array}{cc} 3x & \rightarrow -4 \\ 2x & \rightarrow +3 \end{array} \quad +9x - 8x = +x$$

$$\text{ดังนั้น } 18x^2 + 3x - 36 = 3(3x - 4)(2x + 3)$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $10 - 7x - 6x^2$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r}
 2 \quad \swarrow \quad \searrow \\
 \quad \quad \quad \rightarrow +x \\
 5 \quad \swarrow \quad \searrow \\
 \quad \quad \quad \rightarrow -6x
 \end{array}
 \qquad -12x + 5x = -7x$$

ดังนั้น $10 - 7x - 6x^2 = (2 + x)(5 - 6x)$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $8x^6 - 19x^3 - 27$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r}
 8x^3 \quad \swarrow \quad \searrow \\
 \quad \quad \quad \rightarrow -27 \\
 x^3 \quad \swarrow \quad \searrow \\
 \quad \quad \quad \rightarrow +3
 \end{array}
 \qquad +8x^3 - 27x^3 = -19x^3$$

ดังนั้น $8x^6 - 19x^3 - 27 = (8x^3 - 27)(x^3 + 1)$
 $= (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)(x + 1)(x^2 - x + 1)$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $20(a - b)^2 - 23(a - b) + 6$

วิธีทำ แทน $a - b$ ด้วย x จะได้ $20x^2 - 23x + 6$

$$\begin{array}{r}
 4x \quad \quad \quad -3 \\
 5x \quad \quad \quad -2 \quad \quad -8x - 15x = -23x
 \end{array}$$

ดังนั้น $20x^2 - 23x + 6 = (4x - 3)(5x - 2)$
 $20(a - b)^2 - 23(a - b) + 6 = [4(a - b) - 3][5(a - b) - 2] = (4a - 4b - 3)(5a - 5b - 2)$

แบบฝึกหัดที่ 4

จงแยกตัวประกอบ

- | | |
|----------------------|-----------------------------------|
| 1. $2x^2 + 5x + 3$ | 6. $8x^4 - 14x^3 + 3x^2$ |
| 2. $6x^2 + 7x + 2$ | 7. $16x^2 - 32x - 20$ |
| 3. $2x^2 + 17x + 8$ | 8. $40x^2 - 50x - 35$ |
| 4. $2x^2 + 15x + 18$ | 9. $6(x - 2y)^2 - 13(x - 2y) + 6$ |
| 5. $12x^2 - 4x - 5$ | 10. $8(x - y)^2 - 22(x - y) + 15$ |

6.7 การแยกตัวประกอบโดยวิธีเติมให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

จาก $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

และ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการแยกตัวประกอบได้ตามตัวอย่าง

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $a^4 + 4$

วิธีทำ เอา $4a^2 - 4a^2$ บวก

$$\begin{aligned} a^4 + 4 &= a^4 + 4 + 4a^2 - 4a^2 \\ &= (a^4 + 4a^2 + 4) - 4a^2 \\ &= (a^2 + 2)^2 - 4a^2 \\ &= [(a^2 + 2) + 2a][(a^2 + 2) - 2a] \\ &= (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $x^4 + 324y^4$

วิธีทำ เอา $36x^2y^2 - 36x^2y^2$ บวก

$$\begin{aligned} x^4 + 324y^4 &= x^4 + 324y^4 + 36x^2y^2 - 36x^2y^2 \\ &= x^4 + 36x^2y^2 + 324y^4 - 36x^2y^2 \\ &= (x^2 + 18y^2)^2 - 36x^2y^2 \\ &= [(x^2 + 18y^2) + 6xy][(x^2 + 18y^2) - 6xy] \\ &= (x^2 + 6xy + 18y^2)(x^2 - 6xy + 18y^2) \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 5

จงแยกตัวประกอบ

1. $4x^4 + 1$

2. $x^4 + 324$

3. $x^8 + 4$

4. $x^4 + 64$

5. $x^4 + 2500$

6.8 การแยกตัวประกอบโดยการจัดกลุ่ม

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $x^2 - y^2 + 4z^2 - 4xz$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } x^2 - y^2 + 4z^2 - 4xz &= (x^2 - 4xz + 4z^2) - y^2 \\ &= (x - 2z)^2 - y^2 \\ &= [(x - 2z) + y][(x - 2z) - y] \\ &= (x - 2z + y)(x - 2z - y) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $9x^2 - y^2 - 25z^2 + 10yz$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } 9x^2 - y^2 - 25z^2 + 10yz &= 9x^2 - (y^2 - 10yz + 25z^2) \\ &= 9x^2 - (y - 5z)^2 \\ &= [3x + (y - 5z)][3x - (y - 5z)] \\ &= (3x + y - 5z)(3x - y + 5z) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $x^2 - y^2 - 9 - 6y$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } x^2 - y^2 - 9 - 6y &= x^2 - (y^2 + 6y + 9) \\ &= x^2 - (y + 3)^2 \\ &= [x + (y + 3)][x - (y + 3)] \\ &= (x + y + 3)(x - y - 3) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $x^3 + x^2 + 2x + 2$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } x^3 + x^2 + 2x + 2 &= (x^3 + x^2) + (2x + 2) \\ &= x^2(x + 1) + 2(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^2 + 2) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $ax + ay + bx + by$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } ax + ay + bx + by &= (ax + ay) + (bx + by) \\ &= a(x + y) + b(x + y) \\ &= (a + b)(x + y) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $12ax - 20bx - 9ay + 15by$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } 12ax - 20bx - 9ay + 15by &= (12ax - 20bx) - (9ay - 15by) \\ &= 4x(3a - 5b) - 3y(3a - 5b) \\ &= (3a - 5b)(4x - 3y) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $x^3 + x^2 - 2x - 8$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } x^3 + x^2 - 2x - 8 &= (x^3 - 8) + (x^2 - 2x) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + x(x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4 + x) \\ &= (x - 2)(x^2 + 3x + 4) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $27x^3 - 9x^2 + y^2 + y^3$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } 27x^3 - 9x^2 + y^2 + y^3 &= (27x^3 + y^3) - (9x^2 - y^2) \\ &= (3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2) - (3x + y)(3x - y) \\ &= (3x + y)[(9x^2 - 3xy + y^2) - (3x - y)] \\ &= (3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2 - 3x + y) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $8x^3 + 2x - y^3 - y$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } 8x^3 + 2x - y^3 - y &= (8x^3 - y^3) + (2x - y) \\
 &= (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) + (2x - y) \\
 &= (2x - y)[(4x^2 + 2xy + y^2) + 1] \\
 &= (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2 + 1)
 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 6

จงแยกตัวประกอบ

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------|
| 1. $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$ | 6. $9x^2 - 4 + 9y^2 - 18xy$ |
| 2. $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$ | 7. $25x^2 - 9y^2 - 9 - 18y$ |
| 3. $x^2 - y^2 + 4x + 4$ | 8. $1 - x^2 - y^2 - 2xy$ |
| 4. $y^2 - 4x^2 + 2y + 1$ | 9. $2x^2 - 2y^2 - 16y - 32$ |
| 5. $4x^2 + 4y^2 + 8xy - 25$ | 10. $16 - 4x^4 - 4y^2 - 8x^2y$ |

บทที่ 7

สมการ

จุดประสงค์การเรียนรู้ มุ่งให้นักศึกษาสามารถ

1. บอกความหมายของสมการได้
2. แก้สมการ และตรวจคำตอบของสมการได้
3. แก้โจทย์ปัญหาได้

DPU

สมการ

7.1 ความหมายของสมการ

7.1.1 ตัวอักษรภาษาไทย ภาษาอังกฤษ หรือสัญลักษณ์อื่น ๆ ที่แทนจำนวนที่ไม่ทราบค่า เช่น ก ข ค a b c x y z Δ \square * เรียกว่า ตัวแปร

7.1.2 ประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงการเท่ากันของจำนวนสองจำนวน โดยใช้เครื่องหมายเท่ากับ (=) คั่นระหว่างจำนวนสองจำนวนที่เท่ากัน เรียกว่า สมการ

7.2 การแทนค่าตัวแปรที่กำหนดให้ในสมการ และคำตอบของสมการ

7.2.1 การแทนค่าตัวแปรในประโยคสัญลักษณ์หรือในสมการ คือ การนำค่าตัวแปรที่กำหนดให้แทนค่าในประโยคสัญลักษณ์หรือในสมการ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $x + 20$ เมื่อกำหนดให้ $x = 20$

วิธีทำ

แทนค่า $x = 2$ ใน $x + 20$

จะได้ $x + 20 = 2 + 20$

$$= 22$$

ดังนั้นค่าของ $x + 20 = 22$ เมื่อ $x = 2$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $7(13x - 2 - 10x + 4)$ เมื่อกำหนดให้ $x = \frac{3}{7}$

วิธีทำ

$$7(13x - 2 - 10x + 4) = 7(3x + 2)$$

$$= 21x + 14$$

แทนค่า $x = \frac{3}{7}$ ใน $21x + 14$

$$\text{จะได้ } 21x + 14 = 21\left(\frac{3}{7}\right) + 14$$

$$= 9 + 14$$

$$= 23$$

ดังนั้นค่าของ $7(13x - 2 - 10x + 4) = 23$ เมื่อ $x = \frac{3}{7}$

สมการที่เป็นจริงหรือเท็จ

เมื่อพิจารณา สมการ $\frac{x}{20} = 2$ จะเห็นว่า x เป็นตัวแปร

ถ้าแทน x ด้วย 20 จะได้สมการที่เป็นเท็จ เพราะ $\frac{20}{20} = 1$ ซึ่งไม่เท่ากับ 2

ถ้าแทน x ด้วย 40 จะได้สมการที่เป็นเท็จ เพราะ $\frac{40}{20} = 2$

เรียกจำนวนใด ๆ ที่แทนตัวแปรในสมการแล้วทำให้สมการนั้นเป็นจริงว่าคำตอบของสมการ

7.3 สมบัติของการเท่ากัน

7.3.1 สมบัติการบวกและการลบ

ให้ a, b และ c แทนจำนวนใด ๆ ถ้า $a = b$

ดังนั้น $a + c = b + c$

หรือ $a - c = b - c$

7.3.2 สมบัติการคูณและการหาร

ให้ a, b และ c แทนจำนวนใด ๆ ถ้า $a = b$

ดังนั้น $a \times c = b \times c$

หรือ $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ เมื่อ $c \neq 0$

7.4 การแก้สมการ

การแก้สมการคือการหาคำตอบของสมการ หรือการหาค่าของตัวแปรที่มีอยู่ในสมการนั้น ๆ โดยใช้สมบัติการเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $m + 4 = 20$

วิธีทำ

นำ 4 มาลบทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $m + 4 - 4 = 20 - 4$

$$m = 16$$

ดังนั้น 16 เป็นคำตอบของสมการ $m + 4 = 20$

ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการ $20 - y = 42$

วิธีทำ

นำ y มาบวกทั้งสองข้างของสมการ
จะได้ $20 - y + y = 42 + y$

$$20 = 42 + y$$

นำ 42 มาลบทั้งสองข้างของสมการ

$$20 - 42 = 42 + y - 42$$

$$-22 = y$$

ดังนั้น -22 เป็นคำตอบของสมการ $20 - y = 42$

ตัวอย่างที่ 6 จงแก้สมการ $\frac{x}{4} = 12$

วิธีทำ

นำ 4 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้ } \frac{x}{4} \times 4 = 12 \times 4$$

$$x = 48$$

ดังนั้น 48 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{x}{4} = 12$

ตัวอย่างที่ 7 จงแก้สมการ $\frac{3}{4}a = 36$

วิธีทำ (วิธีที่ 1)

นำ 4 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้ } \frac{3}{4}a \times 4 = 36 \times 4$$

$$3a = 144$$

นำ 3 มาหารทั้งสองข้างของสมการ

$$\frac{3a}{3} = \frac{144}{3}$$

$$a = 48$$

วิธีทำ (วิธีที่ 2)

นำ $\frac{4}{3}$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้} \quad \frac{3}{4}a \times \frac{4}{3} = 36 \times \frac{4}{3}$$

$$a = 48$$

ดังนั้น 48 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{3}{4}a = 36$

ตัวอย่างที่ 8 จงแก้สมการ $3m+7 = 25$

วิธีทำ

นำ 7 มาลบทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้} \quad 3m+7-7 = 25-7$$

$$3m = 18$$

นำ 3 มาหารทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้} \quad \frac{3m}{3} = \frac{18}{3}$$

$$m = 6$$

ดังนั้น 6 เป็นคำตอบของสมการ $3m+7 = 25$

ตัวอย่างที่ 9 จงแก้สมการ $\frac{a}{3}-9 = 12$

วิธีทำ

นำ 9 มาบวกทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้} \quad \frac{a}{3}-9+9 = 12+9$$

$$\frac{a}{3} = 21$$

นำ 3 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้} \quad \frac{a}{3} \times 3 = 21 \times 3$$

$$a = 63$$

ดังนั้น 63 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{a}{3}-9 = 12$

ตัวอย่างที่ 10 จงแก้สมการ $\frac{5}{9}x + 16 = 41$

วิธีทำ

นำ 16 มาลบทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้ } \frac{5}{9}x + 16 - 16 = 41 - 16$$

$$\frac{5}{9}x = 25$$

นำ $\frac{9}{5}$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้ } \frac{5}{9}x \times \frac{9}{5} = 25 \times \frac{9}{5}$$

$$x = 45$$

ดังนั้น 45 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{5}{9}x + 16 = 41$

ตัวอย่างที่ 11 จงแก้สมการ $6z + 12 = 9(z + 5)$

วิธีทำ

ใช้สมบัติการแจกแจง $a(b + c) = ab + ac$

$$6z + 12 = 9z + 45$$

นำ 6z มาลบทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้ } 6z + 12 - 6z = 9z + 45 - 6z$$

$$12 = 3z + 45$$

นำ 45 มาลบทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้ } 12 - 45 = 3z + 45 - 45$$

$$-33 = 3z$$

$$-11 = z$$

ดังนั้น $\frac{33}{4}$ เป็นคำตอบของสมการ $6z + 12 = 9(z + 5)$

แบบฝึกหัดที่ 1

จงแก้สมการต่อไปนี้ (เติมคำตอบ)

1. $m - 2 = 24$

$\therefore m = \dots\dots\dots$

2. $31 + y = 27$

$\therefore y = \dots\dots\dots$

3. $21 - x = 90$

$\therefore x = \dots\dots\dots$

4. $9z = 90$

$\therefore z = \dots\dots\dots$

5. $\frac{b}{44} = \frac{5}{11}$

$\therefore b = \dots\dots\dots$

6. $\frac{x}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{36}$

$\therefore x = \dots\dots\dots$

7. $\frac{3}{7}m = 30$

$\therefore m = \dots\dots\dots$

8. $\frac{3}{11}a = \frac{12}{55}$

$\therefore a = \dots\dots\dots$

9. $7x + 3 = 52$

$\therefore x = \dots\dots\dots$

$$10. \quad 27 = 5x + 7$$
$$\therefore x = \dots\dots\dots$$

$$11. \quad 10 + 9x = 46$$
$$\therefore x = \dots\dots\dots$$

$$12. \quad \frac{1}{3}a + 10 = 25$$
$$\therefore a = \dots\dots\dots$$

$$13. \quad 3 - \frac{n}{3} = \frac{1}{4}$$
$$\therefore n = \dots\dots\dots$$

$$14. \quad \frac{4}{9}y - 44 = 0$$
$$\therefore y = \dots\dots\dots$$

$$15. \quad \frac{c}{2} + 7 = \frac{11}{3}$$
$$\therefore c = \dots\dots\dots$$

$$16. \quad \frac{4x - 5}{3} = 5$$
$$\therefore x = \dots\dots\dots$$

$$17. \quad \frac{9}{10}(a - 3) = 27$$
$$\therefore a = \dots\dots\dots$$

$$18. \quad 4x - 7 = 9x + 1 - x$$
$$\therefore x = \dots\dots\dots$$

$$19. \quad \frac{31 - x}{12} = \frac{1}{6}$$
$$\therefore x = \dots\dots\dots$$

$$20. \quad 2a - (10 - a) = a + 8$$
$$\therefore a = \dots\dots\dots$$

$$21. \quad 2(a + 3) = 5(a - 3)$$
$$\therefore a = \dots\dots\dots$$

$$22. \quad \frac{1}{6}(5y + 3) = 3(y - 2)$$
$$\therefore y = \dots\dots\dots$$

$$23. \quad \frac{m}{5} - \frac{m}{6} = 1$$
$$\therefore m = \dots\dots\dots$$

$$24. \quad \frac{c}{3} - 2 = c$$
$$\therefore c = \dots\dots\dots$$

$$25. \quad \frac{a}{2} - \frac{3a + 1}{3} = \frac{5a + 2}{6}$$
$$\therefore a = \dots\dots\dots$$

7.5 โจทย์สมการ

ในการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาสมการ มีลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหาดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา
 - โจทย์ถามอะไร (สมมติตัวแปร)
 - โจทย์กำหนดอะไรมาให้
2. วางแผน
 - สร้างสมการจากการเขียนแผนผัง เขียนรูปประกอบ

เขียนไดอะแกรมเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรกับจำนวนอื่น ๆ ที่ทราบค่า

1. ดำเนินการตามแผน
 - แก้สมการ
2. ตรวจสอบ
 - ตรวจดูว่าทำตามที่โจทย์บอกครบหรือไม่
 - คำตอบถูกต้องหรือไม่

ตัวอย่างที่ 1 สี่เท้าของเงินที่ดาวมียู่มากกว่า 70 บาท เป็นจำนวนเงิน 346 บาท ดาวมีเงินเท่าไร

วิธีทำ

1.

สิ่งที่โจทย์ถาม

 ให้ x แทนจำนวนเงินของดาว
2.

สิ่งที่โจทย์กำหนด

 สี่เท้าของเงินที่ดาวมียู่มากกว่าเงิน 70 บาท เป็นจำนวนเงิน 346 บาท
3.

สร้างสมการ

 สี่เท้าของเงินที่ดาวมียู่มากกว่า คือ $4x$
ดังนั้น $4x - 70 = 346$
4.

แก้สมการ

 นำ 70 มาบวกทั้งสองข้างของสมการ
จะได้ $4x - 70 + 70 = 346 + 70$
$$4x = 416$$

นำ 4 มาหารทั้งสองข้างของสมการ
จะได้ $\frac{4x}{4} = \frac{416}{4}$
$$x = 104$$
5.

ตรวจสอบ

 แทน x ด้วย 104 ในสมการ

$$4x - 70 = 346$$

$$\text{จะได้ } 3 \times 104 - 70 = 346$$

เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 104 เป็นคำตอบของสมการ $4x - 70 = 346$

นั่นคือ ดาวมีเงิน 104 บาท

ตัวอย่างที่ 2 ถ้ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีความยาวยาวเป็นสองเท่าของด้านกว้าง และมีความกว้างยาวเท่ากับด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่ารวมกันเท่ากับ 270 นิ้ว พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่ากับกี่ตารางนิ้ว

วิธีทำ

1.

สิ่งที่โจทย์ถาม

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ให้ z แทนความยาวด้านกว้างของ

รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

2.

สิ่งที่โจทย์กำหนด

รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีความยาวยาวเป็นสองเท่าของ

ด้านกว้างและด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

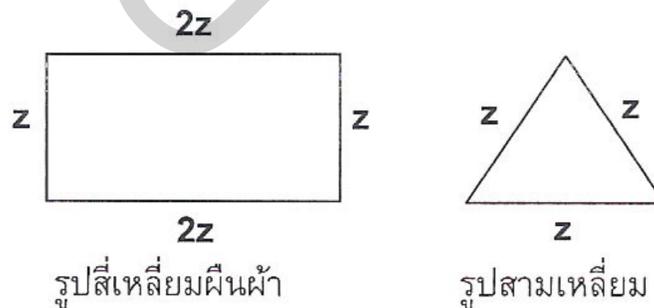
ยาวเท่ากับความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

และรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารวมกันเท่ากับ 270 นิ้ว

3.

สร้างสมการ



พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = กว้าง \times ยาว

$$= z \times 2z$$

ความยาวรอบรูปของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$2z + z + 2z + z = 6z$$

ความยาวรอบรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

$$z + z + z = 3z$$

ความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

และรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารวมกันเท่ากับ 270 นิ้ว

ดังนั้น

4. แก้สมการ
- $$6z + 3z = 270$$
- $$9z = 270$$
- นำ 9 มาหารทั้งสองข้างของสมการ
- จะได้ $\frac{9z}{9} = \frac{270}{9}$
- $$z = 30$$
- พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $= 30 \times 2(30)$
- $$= 1,800$$
5. ตรวจสอบ
- แทน z ด้วย 30 ในสมการ $3z = 270$
- จะได้ $9 \times 30 = 270$ เป็นสมการที่เป็นจริง
- ดังนั้น 30 เป็นคำตอบของสมการ $9z = 270$

DPU

แบบฝึกหัดที่ 2

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียวในคำถามแต่ละข้อ

1. สมใจซื้อส้มมาจำนวนหนึ่ง เพื่อแบ่งให้เด็ก 10 คน ปรากฏว่าแบ่งได้ไม่เท่ากัน จึงไปซื้อมาเพิ่มอีก 5 ผล เมื่อแบ่งแล้วจะได้รับคนละ 4 ผล จงหาจำนวนส้มที่สมใจซื้อมาครั้งแรก

ก. 20 ผล	ข. 25 ผล	ค. 30 ผล
ง. 35 ผล	จ. 40 ผล	

2. ปัจจุบัน ปุ๊กมีอายุ 47 ปี เมื่อ 12 ปีล่วงมาแล้ว นุ๊กมีอายุเป็น $\frac{1}{5}$ เท่าของอายุปุ๊ก จงหาว่าปัจจุบัน นุ๊กมีอายุเป็นเท่าใด

ก. 17 ปี	ข. 19 ปี	ค. 23 ปี
ง. 27 ปี	จ. 30 ปี	

3. ไก่ มีเงินน้อยกว่า ไท 800 บาท ไก่ มีเงินมากกว่า แทน 350 บาท ถ้าทั้งสามคนมีเงินรวมกันเท่ากับ 12,500 บาท ไท มีเงินเท่าใด

ก. 4,316.67 บาท	ข. 4,516.67 บาท
ค. 4,816.67 บาท	ง. 5,216.67 บาท
จ. 5,516.67 บาท	

4. มุกิตา ใช้เงินไปในแต่ละเดือนเป็น $\frac{4}{5}$ ของเงินเดือนของเขา ปรากฏว่า มุกิตา เหลือเงินฝากธนาคารเดือนละ 600 บาท มุกิตา ได้รับเงินเดือน เดือนละเท่าใด

ก. 3,000 บาท	ข. 4,000 บาท
ค. 5,000 บาท	ง. 6,000 บาท
จ. 7,000 บาท	

5. เงินจำนวน 540 บาท เท่ากับเงินของเมตตาลบด้วยเงินจำนวน 280 บาท เมตตามีเงินเท่าใด

ก. 520 บาท	ข. 620 บาท
ค. 720 บาท	ง. 820 บาท
จ. 920 บาท	

บรรณานุกรม

1. John S. Croucher., Introductory Mathematics and Statistics for Bussiness, McGraw-Hill, 2000
2. Alfonse Gobran., College Algebra, PWS. Publishers, U.S.A., 1987
3. A. J. Sadler., Introductory Calculus, Second Edition, Sadler Family Trust, Australia, 1996
4. A. J. Sadler., Calculus, Sadler Family Trust, Australia, 1999
5. ประสงค์ ปานเจริญ, “แบบเรียนคณิตศาสตร์ ค.412 ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย”, กรุงเทพฯ, โรงพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช, 2520
6. ยุพิน พิพิธกุล และ สิริพร ทิพย์คง, “หนังสือเสริมทักษะคณิตศาสตร์ ค 101 ”, กรุงเทพฯ, สถาบันพัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว), 2533